

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baldinger, E. Baumann
R. Mercier, P. Scherrer, E. Stiefel, F. Stüssi, W. Traupel, H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

Vol. XI – 1960



BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL
SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten

© Birkhäuser Verlag, Basel 1960

Printed in Switzerland

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

	Seite Page	Nr. Issue
PAUL SCHERRER 70jährig	1	(1)

ORIGINALARBEITEN

Original Papers · Articles originaux

ABONYI, I.: Steady State Solution of the Relativistic Boltzmann Transport Equation	169	(3)
BASSALI, W. A.: The Transverse Flexure of a Thin Circular Plate Subject to Parabolic Loading over a Concentric Ellipse	176	(3)
BEAN, R. J., GILBERT, R. P., and KENDALL, H.: On a Two-Dimensional Free-Boundary Problem	341	(5)
BEGUIN, G. H.: A Type of Solution for Thin Shells in the Form of an Hyperbolic Paraboloid	356	(5)
BOREL, J.-P., et CORNAZ, P.: Redresseurs synchrones thermiques	89	(2)
COLLINS, D.: On the Stress Distributions Due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere	3	(1)
COTTI, P.: Über die Erzeugung von hohen, kurzzeitigen Magnetfeldern	17	(1)
EASON, G.: The Minimum Weight Design of Circular Sandwich Plates	368	(5)
EASON, G., and SHIELD, R. T.: The Plastic Indentation of a Semi-Infinite Solid by a Perfectly Rough Circular Punch	33	(1)
EGERVÁRY, E.: On Rank-Diminishing Operations and their Applications to the Solution of Linear Equations	376	(5)
FRIEDRICH, J.: Bemerkung zur Abelschen Integralgleichung	191	(3)
GIBSON, R. E.: A Linear Heat Problem with a Moving Interface	198	(3)
GUPTA, A. S.: Flow of an Electrically Conduction Fluid Past a Porous Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field	43	(1)
HEINS, A. E., and MACCAMY, R. C.: On the Scattering of Waves by a Disk	249	(4)
HERSCH, J.: Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluation par défaut et principe de maximum	387	(5)
HORVAY, G.: Orthogonal Edge Polynomials in the Variational Solution of Some Boundary Layer Problems in Elasticity	102	(2)
JONES, E. E.: Solution of the Poisson Equation Related to a Boundary-Value Problem for the Sphere	265	(4)
LÄUCHLI, P., und WALDBURGER, H.: Berechnung von Beulwerten mit Hilfe von Mehrstellenoperatoren	445	(6)
LEIPHOLZ, H.: Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck bei Berücksichtigung des Eigengewichtes	455	(6)
LEIPNIK R.: First and Second Order Distributions of a Sine Wave of Random Phase plus Gaussian Noise	117	(2)
LIST, R.: Zur Thermodynamik teilweise wässriger Hagelkörner	273	(4)
MEYER, R. X.: Heat-Transfer Near the Stagnation Point of a Body of Revolution in the Presence of a Magnetic Field	127	(2)
MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Die Harmonischen der Rotationsenergie bei der Schubkurbel und verwandte Fourier-Reihen	207	(3)
MUKI, R., and STERNBERG, E.: Steady-State Heat Conduction in a Circular Cone	306	(4)

	Seite Page	Nr. Issue
MUKI, R., and STERNBERG, E.: Steady-State Thermal Stresses in an Elastic Cone	471	(6)
NOWINSKI, J.: Cylindrically Orthotropic Circular Plates with Large Deflections	218	(3)
SAIBEL, E., and TADJBAKHS, I.: Large Deflections of Circular Plates under Uniform and Concentrated Central Loads	496	(6)
YEN, K.-T.: Optimal Coordinates for a Simple Shear Flow over a Flat Plate	228	(3)
ZIEGLER, H.: Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines starrplastischen Körpers und seinem Fließgesetz	413	(5)

KURZE MITTEILUNGEN

Brief Reports · Communications brèves

BECKER, E.: Eine einfache Verallgemeinerung der Rayleigh-Grenzschicht . .	146	(2)
BHOWMICK, S. K.: Note on the Effect of a Centre of Dilatation in a Semi-Infinite Elastic Solid with its Plane Face Fixed	315	(4)
CESS, R. D.: Laminar-Film Condensation on a Flat Plate in the Absence of a Body Force	426	(5)
GADD, G. E.: The Possibility of Normal Shock Waves on a Body with Convex Surfaces in Inviscid Transonic Flow	51	(1)
HÄLG, W.: Signalfluss und Analogiedarstellung der Neutronenökonomie beim Abbrand von Reaktorbrennstoffen	433	(5)
HUNZIKER, R.: On the Calculation of the Minimum Wave plus Vortex Drag of Supersonic Wings	504	(6)
KATZ, U.: Zur Eiskeimbildungsfähigkeit von Kupferoxyden und Kupfersulfiden	237	(3)
KROGDAHL, W. S.: Numerical Solutions of the Van der Pol Equation	59	(1)
LEVY, H. C.: The Back Effect of a Wall on a Jet	152	(2)
MEKSYN, D.: Plate Thermometer.	63	(1)
PAINTER, P. R., and SCHAEFER, V. J.: Permanent Replicas of the Crystalline Structure of Hailstones	318	(4)
RAMASWAMY, M. A., and RAO, D. M.: Measurements of Two-Dimensional Zero-Lift Interference of Ventilated Boundaries at Speeds up to Sonic.	327	(4)
RUTISHAUSER, H.: Bemerkungen zur glatten Interpolation	508	(6)
SCHLAEPFER, F.: Eine Methode zur numerischen Lösung einfacher nicht-linearer Randwertaufgaben mit Anwendung auf ein Randwertproblem der Himmelsmechanik	514	(6)
STRNAD, J.: Über die Trennung von Gasgemischen in laminarer Strömung . .	245	(3)
ZIEGLER, H.: Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie	157	(2)

VARIA

Miscellaneous · Divers

Addendum. Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. Par J. HERSCH	545	(6)
ASICA, Association Internationale pour le Calcul Analogique	335	(4)
Errata. On the Scattering of Waves by a Disk. By A. E. HEINS and R. C. MACCAMY	543	(6)
IFIPS, International Federation of Information Processing Societies	542	(6)
2nd ILMAC from 15th to 20th October 1962 in Basle	444	(5)
International Symposium on Active Networks and Feedback Systems, New York, April 19-21, 1960.	80	(1)
Journal of Mathematical Analysis and Applications.	444	(5)

	Seite Page	Nr. Issue
Réunion d'automne de la Société Suisse de Physique dans le cadre de la 139e assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles, à Lausanne le 12 septembre 1959. Compte rendu des communications de physique et de mathématiques appliquées:		
BALDINGER, E. und MAIER, A.: Ein stabiler Thermostat zur Messung des Rauschens und des Drifts von Halbleiter-Schaltelementen	68	(1)
DESSOULAVY, R., et SECRÉTAN, B.: Détermination des paramètres \bar{h}_{12} et \bar{h}_{22} de transistors	75	(1)
GLÄTTLI, H., und MÜLLER, H. R.: Über die Möglichkeit digitaler hydraulischer Elemente	73	(1)
Réunion de Printemps de la Société Suisse de Physique, à Winterthour les 7 et 8 Mai 1960. Compte rendu des communications de physique et de mathématiques appliquées:		
ATHANASSIADIS, N.: An Experimental Investigation on Potential Flow through Spiral Casings	525	(6)
BALDINGER, E., HÄLG, W., und WEHRLI, P.: Automatische Anlage zur Registrierung digitaler Messwerte	521	(6)
BALDINGER, E., und SPYCHER, U.: Über das Impulsverhalten von Tunnel-dioden	518	(6)
BAS, E.: Ein Ultrahochvakuum-System mit einer ausheizbaren Hg-Diffusionspumpe zur Erzeugung von Vakua im Gebiet von 10^{-11} Torr	539	(6)
BAUMANN, H.: Zur Theorie der Luftkissenfahrzeuge	528	(6)
GLÄTTLI, H., und MÜLLER, H. R.: Vergleich hydraulischer digitaler Schaltelemente mit elektronischen und elektromechanischen Äquivalenten	535	(6)
KARTASCHOFF, P., DE PRINS, J., und BONANOMI, J.: Méthode de mesure de la stabilité à court terme de la fréquence d'oscillateurs à quartz	536	(6)
STINGELIN, V.: Laminare Strömung in Rohren mit verschiedenen Querschnitten	529	(6)
WYDER, P.: Auswertung von Wärmeleitfähigkeitsexperimenten mit Hilfe eines elektronischen Rechenautomaten	530	(6)
Seventh National Symposium on Reliability and Quality Control in Philadelphia, Pa., USA	543	(6)

BUCHBESPRECHUNGEN

Book Reviews · Notices bibliographiques

American Vacuum Society: Glossary of Terms Used in Vacuum Technology (Pergamon Press, London 1958) (Ref. E. Bas)	547	(6)
Archiv der Mathematik: Festschrift für ALEXANDER M. OSTROWSKI (Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules)	81	(1)
ATHEN, H.: Ballistik (Quelle & Meyer, Heidelberg 1958) (Ref. E. Roth-Desmeules)	83	(1)
BELEVITCH, V.: Théorie des circuits non-linéaires en régime alternatif (Gauthier-Villars, Editeurs, Paris 1959) (Ref. H. Weber)	337	(4)
BENDAT, J. S.: Principles and Applications of Random Noise Theory (John Wiley & Sons, New York 1958) (Ref. H. Weber)	164	(2)
BURRINGTON, R. S., und MAY, D. C. Jr.: Handbook of Probability and Statistics with Tables (McGraw-Hill Book Co., New York 1959) (Ref. P. Schmid)	248	(3)
DUNWORTH, J. V.: Plasma Physics - Accelerators - Thermonuclear Research (Journal of Nuclear Physics: Part C) (Pergamon Press, London 1959) (Ref. F. Heinrich)	548	(6)
ECKERT, E.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. W. Traupel)	340	(4)
EIRICH, F. R.: Rheology, Theory and Applications. Vol. I (Academic Press Inc., New York 1956) (Ref. J. R. de Fries)	337	(4)

	Seite Page	Nr. Issue
FANO, U. und FANO, L. (Mrs.): Basic Physics of Atoms and Molecules (John Wiley & Sons, New York 1959) (Ref. R. Jost)	248	(3)
FISCHER, F. A.: Grundzüge der Elektroakustik (Fachverlag Schiele & Schön GmbH, Berlin 1959) (Ref. H. Weber)	545	(6)
FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Bd.12: Thermodynamik der Gase (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. W. Traupel)	87	(1)
FLÜGGE, S.: do. Bd. 52: Astrophysik, III: Das Sonnensystem (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. M. Waldmeier)	247	(3)
FLÜGGE, S., und CREUTZ, E.: do. Bd. 44, 1. Teil: Instrumentelle Hilfsmittel des Kernphysikers (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. F. Heinrich)	167	(2)
FLÜGGE, S., und CREUTZ, E.: do. Bd. 41, 1. Teil: Kernreaktionen II, Theorie (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. F. Heinrich)	548	(6)
FLÜGGE, S., und CREUTZ, E.: do. Bd. 38, 2. Teil: Neutronen und verwandte Gammastrahlprobleme (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. F. Heinrich)	339	(4)
FÖPPL, L., und MÖNCH, E.: Praktische Spannungsoptik (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. W. Schumann)	166	(2)
FRAUNFELDER, P., und HUBER, P.: Einführung in die Physik, Bd. II: Elektrizitätslehre, Wellenlehre, Akustik und Optik (Ernst Reinhardt Verlag, München 1958) (Ref. W. Hardmeier)	84	(1)
FRISCH, O. R., PANETTI, F. A., LAVES, F., und ROSBAUD, P.: Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrhunderts. LISE MEITNER, OTTO HAHN und MAX VON LAUE zum 80. Geburtstag (Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1959) (Ref. R. Jost)	336	(4)
GARNIR H. G.: Les problèmes aux limites de la physique mathématique (Introduction à leur étude générale). (Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart 1958) (Ref. E. Stamm)	547	(6)
GROSHEV, L. D., LUTSENKO, N., DEMODOV, A. M., und PELEKHOV, V. I.: Atlas of Gamma-Ray Spectra from Radiative Capture of Thermal Neutrons (Pergamon Press, London 1959) (Ref. P. Stoll)	247	(3)
HERRMANN, G.: Applied Mathematics and Mechanics - Prikladnaia matematika i mekhanika (Pergamon Press Inc., New York und London) (Ref. E. Roth-Desmeules)	81	(1)
KANTOROVICH, L. V., und KRYLOV, V. I.: Approximate Methods of Higher Analysis (P. Noordhoff Ltd., Groningen 1958) (Ref. P. Läuchli)	168	(2)
KOCKEL, B., MACKE, W., und PAPAPETROU, A.: Max-Planck-Festschrift 1958 (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959) (Ref. R. Jost) . .	85	(1)
KÜHL, H.: Probleme des Kreuzstrom-Wärmeaustauschers (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. W. Traupel)	339	(4)
KUNTZMANN, J.: Méthodes Numériques; Interpolation, Dérivées (Dunod Editeur, Paris 1959) (Ref. M. Engeli)	546	(6)
LURJE, A. I.: Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung (Akademie-Verlag, Berlin 1957) (Ref. Th. Ginsburg)	86	(1)
LUTZ, O., und WOLF, F.: IS-Tafel für Luft und Verbrennungsgase. 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. W. Traupel)	546	(6)
MALKIN, J. G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung (R. Oldenbourg, München 1959) (Ref. H. Ziegler)	165	(2)
MIKHLIN, S. G.: Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics. Mathematical Physics and Technology (Pergamon Press, London 1957) (Ref. Th. Ginsburg)	83	(1)
National Physical Laboratory: Modern Computing Methods (Her Majesty's Stationery Office, London 1957) (Ref. H. Rutishauser)	88	(1)
NIEBERGALL, W.: Handbuch der Kältetechnik, Bd. VII: Sorptions-Kältemaschinen (Springer-Verlag, Berlin 1959) (Ref. P. Grassmann)	336	(4)

	Seite Nr. Page Issue
OPPELT, W.: Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen (Vorträge gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der GAMM) (R. Oldenbourg, München 1958) (Ref. H. J. Bürgin)	82 (1)
PARKUS, H.: Instationäre Wärmespannungen (Springer-Verlag, Wien 1959) (Ref. H. Ziegler)	165 (2)
Pearson, C. E.: Theoretical Elasticity (Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1959) (Ref. H. Ziegler)	86 (1)
PINNEY, E.: Ordinary Difference-Differential Equations (University of Cali- fornia Press, Berkeley 1958) (Ref. Th. Ginsburg)	85 (1)
PRAGER, W.: An Introduction to Plasticity (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading 1959) (Ref. H. Ziegler)	168 (2)
ROBIN, L.: Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Bd. 1-3 (Gauthier-Villars, Paris 1957) (Ref. E. Roth-Desmeules)	338 (4)
ROUSE, H.: Advanced Mechanics of Fluids (John Wiley & Sons, Inc., New York 1959) (Ref. P. de Haller)	546 (6)
SANDEN, K. v.: Festschrift Richard Grammel (Springer-Verlag, Berlin 1959) Ref. H. Ziegler)	164 (2)
SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. Th. Ginsburg)	84 (1)
VILBIG, F.: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. 5. Aufl., Bd. II (Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Frankfurt am Main 1959) (Ref. F. Tank)	87 (1)
WOSNIK, J.: Gasentladungsröhren in der Nachrichtentechnik. Nachrichten- technische Fachberichte NFT, Bd. 9 (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1957) (Ref. F. Kummer)	166 (2)

AUTORENREGISTER

Index of Authors · Table des auteurs

- O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux
M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves
V = Varia - Miscellaneous - Divers
B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

- ABONYI, I., O 169
ATHANASSIADIS, N., V 525
- BALDINGER, E., HÄLG, W., und WEHRLI, P., V 521
BALDINGER, E., und MAIER, A., V 68
BALDINGER, E., und SPYCHER, U., V 548
BAS, E., V 539, B 547
BASSALI, W. A., O 176
BAUMANN, H., V 528
BEAN, R. J., GILBERT, R. P., und KENDALL, H., O 341
BECKER, E., M 146
BEGUIN, G. H., O 356
BHOWMICK, S. K., M 315
BONANOMI, J., KARTASCHOFF, P., und DE PRINS, J., V 536
BOREL, J.-P., und CORNAZ, P., O 89
BÜRGIN, H. J., B 82
- CRESS, R. D., M 426
COLLINS, D., O 3
- CORNAZ, P., und BOREL, J.-P., O 89
COTTI, P., O 17
- DESSOULAVY, R., und SECRÉTAN, B., V 75
- EASON, G., O 368
EASON, G., und SHIELD, R. T., O 33
EGERVÁRY, E., O 376
ENGELI, M., B 546
- FRIEDRICH, J., O 191
FRIES, R. DE, B 337
- GADD, G. E., M 51
GILBERT, R. P., BEAN, R. J., und KENDALL, H., O 341
GIBSON, R. E., O 198
GINSBURG, TH., B 83, 84, 85, 86
GLÄTTLI, H., und MÜLLER, H. R., V 73, 535
GRASSMANN, P., B 336
GUPTA, A. S., O 43

- HÄLG, W., M 433
 HÄLG, W., BALDINGER, E., und WEHRLI, P., V 521
 HALLER, P. DE, B 546
 HARDMEIER, W., B 84
 HEINRICH, F., B 168, 340, 548
 HEINS, A. E., und MacCAMY, R. C., O 249, V 543
 HERSCH, J., O 387, V 545
 HORVAY, G., O 102
 HUNZIKER, R., M 504
- JONES, E. E., O 265
 JOST, R., B 85, 248, 336
- KARTASCHOFF, P., DE PRINS, J., und BONANOMI, J., V 536
 KATZ, U., M 237
 KENDALL, H., BEAN, R. J., und GILBERT, R. P., O 341
 KROGDAHL, W. S., M 59
 KUMMER, F., B 166
- LÄUCHLI, P., B 168
 LÄUCHLI, P., und WALDBURGER, H., O 445
 LEIPHOLZ, H., O 455
 LEIPNIK, R., O 117
 LEVEY, H. C., M 152
 LIST, R., O 273
- MACCAMY, R. C., und HEINS, A. E., O 249, V 543
 MAIER, A., und BALDINGER, E., V 68
 MEKSYN, D., M 63
 MEYER, R. X., O 127
 MEYER ZUR CAPELLEN, W., O 207
 MUKI, R., und STERNBERG, E., O 306, 471
 MÜLLER, H. R., und GLÄTTLI, H., V 73, 535
- NOWINSKI, J., O 218
- PAINTER, P. R., und SCHAEFER, V. J., M 318
 PRINS, J. DE, KARTASCHOFF, P., und BONANOMI, J., V 536
- RAMASWAMY, M. A., und RAO, D. M., M 327
 RAO, D. M. und RAMASWAMY, M. A., M 327
 ROTH-DESMEULES, E., B 81, 83, 338
 RUTISHAUSER, H., M 508, B 88
- SAIBEL, E., und TADJBAKHS, I., O 496
 SCHAEFER, V. J., und PAINTER, P. R., M 318
 SCHLAEPPER, F., M 514
 SCHMID, P., B 248
 SCHUMANN, W., B 166
 SECRÉTAN, B., und DESSOULAVY, R., V 75
 SHIELD, R. T., und EASON, G., O 33
 STAMM, E., B 547
 STERNBERG, E., und MUKI, R., O 306, 471
 STINGELIN, V., V 529
 STOLL, P., B 248
 STRNAD, J., M 245
- TADJBAKHS, I., und SAIBEL, E., O 496
 TANK, F., B 87
 TRAUPEL, W., B 87, 339, 340, 546
- WALDBURGER, H., und LÄUCHLI, P., O 445
 WALDMEIER, M., B 247
 WEBER, H., B 164, 337, 545
 WEHRLI, P., BALDINGER, E., und HÄLG, W., V 521
 WYDER, P., V 530
- YEN, K. T., O 228
- ZIEGLER, H., O 413, M 157, B 86, 164, 165, 166, 168

Fasc. 1 (25. 1. 1960) . . .	pag. 1–88
Fasc. 2 (25. 3. 1960) . . .	pag. 89–168
Fasc. 3 (25. 5. 1960) . . .	pag. 169–248
Fasc. 4 (25. 7. 1960) . . .	pag. 249–340
Fasc. 5 (25. 9. 1960) . . .	pag. 341–444
Fasc. 6 (25. 11. 1960) . . .	pag. 445–548

Paul Scherrer 70jährig

Am 3. Februar 1960 begeht Prof. Dr. PAUL SCHERRER, Direktor des Physikalischen Institutes der ETH, seinen 70. Geburtstag. Dieses Ereignis bedeutet gemäss den üblichen Vorschriften einer Hochschule mehr als nur einen Markstein im physischen Leben eines Menschen, sondern bedingt meistens den Rücktritt von Amt und Würden und im Falle SCHERRER das Ende einer mehr als 30jährigen Epoche der physikalischen Lehr- und Forschungstätigkeit, welcher der Jubilar sein ureigenstes Gepräge aufdrückte.

1920 kam SCHERRER zusammen mit dem grossen Gelehrten DEBYE von Göttingen nach Zürich, um hier die zweite Lehrstelle für Experimentalphysik an der ETH zu bekleiden. Es folgte eine selten glückliche Zeit am Physikalischen Institut der ETH, die getragen war von den beiden Persönlichkeiten DEBYE und SCHERRER. Das lebendige Zusammenspiel der beiden, in ihren Grundzügen so verschiedenen, Gelehrten liess seine befruchtende Wirkung weit in die Welt ausstrahlen und Zürich in kürzester Zeit zu einem Physikzentrum internationalen Formats heranwachsen.

Leider fand diese herrliche Episode schon 1927 ein Ende, indem DEBYE sich entschloss, dem an ihn ergangenen Ruf an die Universität Leipzig Folge zu leisten. An der ETH wurden daraufhin die beiden Hauptprofessuren für Experimentalphysik in eine zusammengelegt und diese SCHERRER übertragen, dessen Lehrerfolg sich bereits damals eines grossen Rufes erfreute. Damit war der Start für die weitere Entwicklung von Forschung und Unterricht auf dem Gebiete der Physik vorgezeichnet, und zwar in einer Eigenart, wie sie nur einmalig anzutreffen ist. Wenn der Schreibende mit besonderer Betonung auf die Jahre hinwies, wo das Doppelgestirn DEBYE-SCHERRER das physikalische Geschehen in Zürich beherrschte, so auch deshalb, weil es ihm persönlich vergönnt war, diese Zeitspanne als Assistent von DEBYE mitzuerleben und sie ihm wie ein leuchtendes Kleinod unauslöschlich in Erinnerung blieb.

Die nun folgenden drei Dezennien zeugen von einer unerwarteten, mächtigen Entwicklung der physikalischen Disziplinen an der ETH. Sicherlich hat auch WOLFGANG PAULI, der sich dem Jubilar kurze Zeit nach seiner Ernennung zum Leiter des Physikalischen Institutes der ETH, als Ordinarius für theoretische Physik, beigesellte, entscheidenden Einfluss auf das physikalische Leben in Zürich; im engeren Sektor der Experimentalphysik war es aber SCHERRER allein, der dem Geschehen seine ihm charakteristischen Züge aufprägte, alles überstrahlt und beschattet von einer beispiellosen Meisterschaft in der

Darstellungskunst, wie sie sich vor allem in den Vorlesungen SCHERRERS in seltener Blüte offenbaren konnte. Jede neue Erkenntnis auf dem Gebiete der Physik wurde unmittelbar nach ihrem Bekanntwerden in das Pensum der Vorlesungen über Experimentalphysik eingebaut und in einer beglückenden, lebendigen und einfachen Weise vorgetragen, die die Zuhörerschaft stets in helle Begeisterung versetzte. Eine Begeisterung, die mitgeholfen hat, die Kunde von der Meisterschaft des Jubilars weit über die ganze Welt zu verbreiten.

Die Würdigung SCHERRERS als Forscher und Gelehrter findet ihren schönsten Ausdruck in einer im Birkhäuser Verlag, Basel, erschienenen Festschrift zur Feier seines 70. Geburtstages, in welcher sich zahlreiche seiner Schüler und Mitarbeiter zum Worte melden und Zeugnis ablegen von der Vielgestaltigkeit seiner wissenschaftlichen Tätigkeit. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass diese Tätigkeit namentlich Fragen des strukturellen Aufbaues der festen Körper und der Deutung ihrer physikalischen Eigenschaften berührte und sich auch auf eine Fülle von Problemen aus dem Gebiete der Kernphysik erstreckte, wobei SCHERRER schon frühzeitig, unmittelbar nach Bekanntwerden der ersten Befunde und Entdeckungen, die fundamentale Bedeutung dieses neuen Forschungszweiges in seiner vollen Tragweite erkannte.

In überzeugender Weise hatte SCHERRER schon kurz nach dem Zweiten Weltkrieg begonnen, in Vorträgen vor Kreisen der schweizerischen Wirtschaft und Industrie wie auch der breiteren Öffentlichkeit auf die überragende Rolle aufmerksam zu machen, welche die Kernenergie als Energielieferant der Zukunft spielt. Es ist weitgehend sein Verdienst, wenn heute in der Schweiz eine Kernreaktoranlage in Betrieb steht, die sowohl in bezug auf die Energiegewinnung und Isotopenverwertung als auch für die Heranbildung eines Stabes qualifizierter Fachleute bereits zukunftsverbundene Arbeit leistet, zu Nutz und Frommen der schweizerischen Wirtschaft.

In seiner Eigenschaft als Redaktor der ZAMP verbleibt dem Schreibenden noch die angenehme Pflicht, dem Jubilar für seine bei der Gründung der Zeitschrift vor 10 Jahren bekundete Bereitwilligkeit zum Beitritt in die Redaktionskommission und für seine in der Folge getätigte Mithilfe während eines ganzen Dezenniums herzlich zu danken.

R. SÄNGER

On the Stress Distributions Due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere

By DEREK COLLINS, Newcastle upon Tyne, England¹⁾

1. Introduction

Although solutions for the problem of a force nucleus acting at a point in a semi-infinite isotropic elastic solid with stress free surface have been known for some time [1-3,²⁾], the corresponding problem of a force nucleus acting at a point in an infinite elastic solid containing a spherical hollow appears to have received little attention. The simplicity of the solutions of the problem for the semi-infinite solid and of similar problems in the Stokes flow of viscous fluid [4] suggest that the stresses in the problem for the solid containing a spherical hollow ought to be expressible in terms of elementary functions only. In an attempt to find such a solution I obtained general expressions for the stresses due to elastic distributions in an infinite solid containing a spherical hollow in terms of the stresses due to the same distributions in an infinite unbounded solid, these being given in a recent paper [5], henceforth referred to as SH. If the elastic distribution is taken to be a force nucleus, expressions are obtained for the stresses, which, while in closed form, contain elementary functions and integrals which it does not appear possible to evaluate as elementary functions. These integrals could however be evaluated numerically to obtain the stresses on the boundary of the hollow. However, in practice, it proved more convenient to obtain expressions for the stresses as infinite series of spherical harmonics and use these for numerical work.

In section 2 of the present paper I give expressions for the stresses due to a force nucleus acting at a point of an infinite unbounded solid and in section 3 expressions for the additional stresses which must be added to these to give the stress distribution due to the nucleus in a solid containing a spherical hollow, these expressions being infinite series of spherical harmonics. Expressions in closed form are also given for the stresses on the boundary of the hollow, the expressions in this form for the complete stress distribution being omitted because of their length. Numerical examples are given to show the variation of the stresses over the boundary of the hollow. In section 4 I consider the

¹⁾ University of Durham, King's College, Department of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 16.

problem of an elastic sphere in equilibrium under the action of two equal and opposite force nuclei at internal points of the sphere, expressions for the stresses as series of sperical harmonics and numerical examples being given.

2. Force Nucleus in an Infinite Solid

We first give the stresses due to a force nucleus acting at a point of an infinite unbounded solid. If (x, y, z) are the cartesian and (r, θ, φ) the spherical polar co-ordinates of a general point referred to an origin O , the positive z -axis being the line $\theta = 0$, we suppose the force nucleus of magnitude F acts at the point O_1 , cartesian co-ordinates $(0, 0, f)$, $f > 0$, and is directed along the z -axis in the positive sense. LOVE [6] then gives the cartesian components (u_0, v_0, w_0) of the displacement at the point (x, y, z) as

$$u_0 = \frac{A x (z - f)}{R^3}, \quad v_0 = \frac{A y (z - f)}{R^3}, \quad w_0 = A \left(\frac{(z - f)^2}{R^3} + \frac{3 - 4\eta}{R} \right), \quad (2.1)$$

where $R^2 = x^2 + y^2 + (z - f)^2$, $F = 16 \pi \mu A (1 - \eta)$, η being Poisson's ratio and μ the rigidity.

We can now find the stresses $\widehat{r r}_0, \widehat{r \theta}_0, \widehat{\theta \theta}_0$ and $\widehat{\varphi \varphi}_0$ in terms of elementary functions from the stress-strain relations. The notation for the stresses is that of SH, the suffix 0 indicating stresses in the unbounded solid. When $r < f$, these stresses can be expanded in series of spherical harmonics as

$$\widehat{r r}_0 = \frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n^2 - n - 2 - 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{n(n-1)(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] P_n(\cos \theta), \quad (2.2)$$

$$\widehat{r \theta}_0 = -\frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n^2 + 2n - 1 + 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{(n-1)(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos \theta), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta \theta}_0 = & \frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n^2 + 4n + 2 + 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{n^2(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] P_n(\cos \theta) \\ & + \frac{2 \mu A \cot \theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+5-4\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi\varphi}_0 = & - \frac{2\mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n-4n\eta-2-2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n \right. \\ & \left. - \frac{n(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] P_n(\cos\theta) \\ & - \frac{2\mu A \cot\theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+5-4\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n \right. \\ & \left. - \frac{(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

where $P_n(\cos\theta)$ is the Legendre function of the first kind of degree n and $T_n^1(\cos\theta)$ the associated Legendre function of the first kind of degree n and order 1, defined by [7]

$$T_n^1(\sigma) = -(1-\sigma^2)^{1/2} \frac{dP_n(\sigma)}{d\sigma}, \quad \sigma = \cos\theta.$$

When $r > f$, the expressions for the stresses are obtained from equations (2.2) to (2.5) by replacing n by $-(n+1)$ in the n -th term of each series.

3. Force Nucleus Acting at a Point in an Elastic Solid Containing an Unstressed Spherical Hole

We now consider a solid bounded internally by an unstressed spherical hollow $r = a$ ($a < f$), centre O . To obtain expressions in closed form for the stresses $\widehat{r}r_1$, $\widehat{r}\theta_1$, $\widehat{\theta}\theta_1$ and $\widehat{q}q_1$, which must be added to the stresses $\widehat{r}r_0$, $\widehat{r}\theta_0$, $\widehat{\theta}\theta_0$ and $\widehat{q}q_0$ respectively to give the stress distribution due to a force nucleus acting at the point $(0, 0, f)$ of this solid, its axis directed radially outwards from the centre of the hollow, we use equations (3.16), (3.18), (4.5) and (4.7) of SH. In the last two of these equations and in equation (4.6) the expressions $G(a)$ and $H(a)$ should each be multiplied by a factor a^{-2} . The stresses $\widehat{r}r_0$ and $\widehat{r}\theta_0$ and the stress combination $\Theta_0 = \widehat{r}r_0 + \widehat{\theta}\theta_0 + \widehat{q}q_0$ for the nucleus in the unbounded solid, which are to be substituted in these equations, are taken in the forms containing elementary functions and not as given by equations (2.2) to (2.5). The stresses obtained in this way are in closed form, containing elementary functions together with integrals which it does not appear possible to evaluate as elementary functions. Because of the length of these expressions, only those for the stresses $\widehat{\theta}\theta = \widehat{\theta}\theta_0 + \widehat{\theta}\theta_1$ and $\widehat{q}q = \widehat{q}q_0 + \widehat{q}q_1$ on the boundary of the hollow are given. These are

$$\widehat{\theta}\theta(a) = \frac{\mu A}{f^2} \left[\frac{2f^2 Q_1(\theta)}{R^5} - Q_2(\theta) - 4 Q_3(\theta) + \frac{2 Q_4(\theta)}{R_1^5} \right] \quad (3.1)$$

and

$$\widehat{q}(a) = \frac{\mu A}{f^2} \left[\frac{2 f^2 (1 - 2 \eta) (a \cos \theta - f)}{R^3} + Q_5(\theta) + 4 Q_3(\theta) + \frac{2 Q_6(\theta)}{R_1^3} \right], \quad (3.2)$$

where

$$R_1^2 = x^2 + y^2 + (z - f')^2, \quad f' = a^2.$$

The functions $Q_i(\theta)$; $i = 1, \dots, 6$, are given by

$$Q_1(\theta) = (1 - 2 \eta) a^3 \cos \theta + (1 - 2 \eta) a^2 f (1 - 4 \cos^2 \theta) \\ + a f^2 \cos \theta (-4 + 2 \eta + (7 - 8 \eta) \cos^2 \theta) + f^3 (4 - 2 \eta - (5 - 4 \eta) \cos^2 \theta),$$

$$Q_2(\theta) = (1 - \eta) a \{ 2 (3 - 8 \eta^2) I(c - 2, s, 1) \\ - (1 + 12 \eta - 16 \eta^3) s^{-1} J(c - 2, s, 1) \} \\ + (3 - \eta) a \{ 2 (25 - 64 \eta + 40 \eta^2) I(c, s, 1) \\ - (27 + 20 \eta - 128 \eta^2 + 80 \eta^3) s^{-1} J(c, s, 1) \} \\ + f \cos \theta \{ 2 (-51 + 183 \eta - 180 \eta^2 + 48 \eta^3) I(c - 1, s, 1) \\ + 3 (29 - 7 \eta - 110 \eta^2 + 120 \eta^3 - 32 \eta^4) s^{-1} J(c - 1, s, 1) \} \\ + (1 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (1 - 4 \eta) I(c - 1, s, 3) \\ - (5 + 2 \eta - 8 \eta^2) s^{-1} J(c - 1, s, 3) \} \\ - (3 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (5 - 4 \eta) I(c + 1, s, 3) \\ + (3 - 10 \eta + 8 \eta^2) s^{-1} J(c + 1, s, 3) \} \\ + 2 a^3 I(c, s, 3) \{ 47 - 70 \eta + 16 \eta^2 - (27 - 44 \eta + 8 \eta^2) \cos^2 \theta \} \\ + a^3 s^{-1} J(c, s, 3) \{ 3 - 102 \eta + 140 \eta^2 - 32 \eta^3 \\ + (9 + 56 \eta - 88 \eta^2 + 16 \eta^3) \cos^2 \theta \},$$

$$Q_3(\theta) = \frac{7 (3 - \eta) a^2 \cos \theta}{f^3} [a (1 + \cos \theta) - (f' + R_1) (1 + \cos \theta_1)] \\ + \frac{(1 - \eta) a^2 \cos^2 \theta}{2 f^2} \left[\operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{(f' + R_1) a}{R_1^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta_1}{2} \right] \\ + \frac{a}{f'^2 R_1} [(R_1 - a) (a (1 - \eta) - 7 (3 - \eta) f \cos \theta) \\ - 7 (3 - \eta) a^2 \cos^2 \theta - (11 - 3 \eta) a f' \cos \theta + (17 - 5 \eta) f'^2],$$

$$Q_4(\theta) = -4 a^5 (3 - 15 \eta + 4 \eta^2) - a^5 \cos^2 \theta (75 - 260 \eta + 96 \eta^2) \\ + 2 a^4 f' \cos \theta (52 - 187 \eta + 56 \eta^2) + a^4 f' \cos^3 \theta (77 - 264 \eta + 96 \eta^2) \\ + 8 a^4 f \cos \theta (2 - 8 \eta + 3 \eta^2) - a^3 f'^2 (37 - 122 \eta + 32 \eta^2) \\ - 16 a^3 f'^2 \cos^2 \theta (9 - 32 \eta + 10 \eta^2) + a^2 f'^3 \cos \theta (87 - 314 \eta + 88 \eta^2) \\ - 2 a f'^4 (8 - 31 \eta + 8 \eta^2), \quad (3.6)$$

$$Q_5(\theta) = (1 - \eta) a \{ 2 (2 + 9 \eta - 4 \eta^2 - 16 \eta^3) I(c - 2, s, 1) \\ + (4 - 7 \eta - 30 \eta^2 + 8 \eta^3 + 32 \eta^4) s^{-1} J(c - 2, s, 1) \} \\ + (3 - \eta) a \{ -2 (22 - 47 \eta + 44 \eta^2 - 16 \eta^3) I(c, s, 1) \\ + (12 + 11 \eta - 82 \eta^2 + 88 \eta^3 - 32 \eta^4) s^{-1} J(c, s, 1) \} \\ + f \cos \theta \{ 2 (39 - 109 \eta + 162 \eta^2 - 120 \eta^3 + 32 \eta^4) I(c - 1, s, 1) \\ - (27 - 27 \eta - 128 \eta^2 + 300 \eta^3 - 240 \eta^4 + 64 \eta^5) \\ \times s^{-1} J(c - 1, s, 1) \} \\ - (1 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (1 - 4 \eta) I(c - 1, s, 3) \\ - (5 + 2 \eta - 8 \eta^2) s^{-1} J(c - 1, s, 3) \} \\ + (3 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (5 - 4 \eta) I(c + 1, s, 3) \\ + (3 - 10 \eta + 8 \eta^2) s^{-1} J(c + 1, s, 3) \} \\ + 2 a^3 I(c, s, 3) \{ -44 + 61 \eta - 28 \eta^2 + (24 - 35 \eta + 20 \eta^2) \cos^2 \theta \} \\ + a^3 s^{-1} J(c, s, 3) \{ -18 + 81 \eta - 122 \eta^2 + 56 \eta^3 \\ + (6 - 35 \eta + 70 \eta^2 - 40 \eta^3) \cos^2 \theta \}, \quad (3.7)$$

and

$$Q_6(\theta) = a^5 (5 - 48 \eta + 32 \eta^2) - 8 a^5 \cos^2 \theta (22 \eta - 25 \eta^2 + 8 \eta^3) \\ - a^4 f' \cos \theta (23 - 306 \eta + 232 \eta^2 - 32 \eta^3) \\ + 4 a^4 f' \cos^3 \theta (45 \eta - 52 \eta^2 + 16 \eta^3) + 8 a^4 f \cos \theta (5 \eta - 6 \eta^2 + 2 \eta^3) \\ + a^3 f'^2 (13 - 114 \eta + 64 \eta^2) + 2 a^3 f'^2 \cos^2 \theta (13 - 200 \eta + 172 \eta^2 - 32 \eta^3) \\ - a^2 f'^3 \cos \theta (29 - 266 \eta + 184 \eta^2 - 16 \eta^3) \\ + 2 a f'^4 (4 - 27 \eta + 16 \eta^2). \quad (3.8)$$

In equation (3.5) we have

$$R_1 \cos \theta_1 = a \cos \theta - f',$$

and it may be noted that $Q_3(\theta)$ is finite on the axis $\theta = 0$. We define the integrals $I(m, s, n)$ and $J(m, s, n)$ which occur in equations (3.4) and (3.7) as

$$I(m, s, n) = \int_0^1 \frac{\lambda^m \cos(s \log \lambda)}{R_\lambda^n} d\lambda, \quad J(m, s, n) = \int_0^1 \frac{\lambda^m \sin(s \log \lambda)}{R_\lambda^n} d\lambda,$$

where $R_\lambda^2 = x^2 + y^2 + (z - \lambda f')^2$. Further, we have $4s^2 = 3 - 4\eta^2$ and $c = 3/2 - \eta$.

Since the expressions (3.1) and (3.2) do not lend themselves so readily to numerical computation as the expressions for the stresses in series of spherical harmonics, we now give these latter expressions. These can be found by using equations (2.2) to (2.5) together with equations (3.16), (3.18), (4.5) and (4.7) of SH. An alternative method is to obtain solutions of the equations satisfied by the displacement components as series of spherical harmonics suitable for the region $r > a$, the coefficients of the harmonics in these series being found from the condition that the boundary $r = a$ of the hollow is stress free. The additional stresses $\widehat{r r}_1$ and $\widehat{r \theta}_1$ are given by

$$\widehat{r r}_1 = - \frac{\mu A}{(a f)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n(n-1)(n^2+3n-2\eta)}{(2n-1)W(n)} \frac{U_0(n)}{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}} - \frac{(n+1)U_1(n)}{(2n+3)W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \right] \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (3.9)$$

and

$$\widehat{r \theta}_1 = - \frac{\mu A}{(a f)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n-1)(n^2-2+2\eta)}{(2n-1)W(n)} \frac{U_0(n)}{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}} - \frac{U_1(n)}{(2n+3)W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \right] \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos \theta), \quad (3.10)$$

where

$$W(n) = n^2 + (1 - 2\eta)n + 1 - \eta,$$

$$U_0(n) = f^2(2n+1)(n+3-4\eta) - a^2(2n-1)(n+1),$$

$$U_1(n) = n(n-1)(n+2)[f^2(2n+3)(n+3-4\eta) - a^2(2n+1)(n+1)] - 4a^2(2n+1)(1-\eta^2).$$

The stresses $\widehat{\theta}\widehat{\theta}$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}$ on the boundary $r = a$ are obtained as

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta}\widehat{\theta} &= \frac{2\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_0(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ &+ \frac{2\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_1(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi}\widehat{\varphi} &= \frac{2\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_2(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ &- \frac{2\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_1(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

where

$$\begin{aligned} V_0(n) &= a^2(n+1) [4n^5 + 4(4-\eta)n^4 + (19-16\eta)n^3 \\ &\quad + (14-19\eta-8\eta^2)n^2 + 2(8-3\eta-8\eta^2)n + 6(1-\eta^2)] \\ &\quad - f^2(2n-1)(2n+3)n(n+2)(n+3-4\eta)(n-\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(n) &= a^2 [4n^4 + 20n^3 + (27-8\eta)n^2 + (9-16\eta)n - 6\eta] \\ &\quad - f^2(2n+1)(2n+3)(n+2)(n+3-4\eta) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} V_2(n) &= a^2(n+1) [4\eta n^5 - 4(1-4\eta)n^4 - (8-19\eta+8\eta^2)n^3 \\ &\quad + (5+6\eta-24\eta^2)n^2 + 2(8-11\eta^2)n + 6(1-\eta^2)] \\ &\quad - f^2(2n+1)(2n+3)n(n+2)(n+3-4\eta)(\eta n - 1). \end{aligned}$$

To illustrate the variation of the stresses $\widehat{\theta}\widehat{\theta}$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}$ on the boundary $r = a$ these stresses have been calculated for different values of f and η . These calculations were performed by truncating each of the series in (3.11) and (3.12) after N terms, N being chosen so that the truncation error in each case is sufficiently small to ensure the calculated values of the stresses are correct to four decimal places. The sums of the series to N terms were then calculated on the University of Durham Computing Laboratory Pegasus Computer using a method due to CLENSHAW [8]. The values of the stresses thus obtained are given in Tables 1 and 2 and plotted in Figures 1 to 3. The actual values shown are those of $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$.

Table 1
Elastic Solid Containing a Spherical Hollow. Values of $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 2$	$f = 4$	$f = 10$	$f = 2$
0°	-9.2069	-0.8371	-0.0814	-9.9313
10°	5.7950	0.6857	0.0709	6.6079
20°	+0.5016	0.2950	0.0417	0.4508
30°	4.6533	+0.1871	+0.0003	+3.6740
40°	5.9566	0.6148	0.0472	5.0752
50°	5.6344	0.9030	0.0909	4.9113
60°	4.7072	1.0334	0.1252	4.1478
70°	3.6822	1.0308	0.1461	3.2651
80°	2.7550	0.9357	0.1526	2.4509
90°	1.9795	0.7870	0.1458	1.7604
100°	1.3545	0.6156	0.1280	1.1971
110°	0.8611	0.4427	0.1026	0.7471
120°	0.4771	0.2818	0.0731	0.3930
130°	0.1828	0.1407	0.0426	0.1188
140°	-0.0380	0.0234	0.0139	-0.0889
150°	0.1979	-0.0683	-0.0106	0.2405
160°	0.3060	0.1337	0.0293	0.3436
170°	0.3685	0.1729	0.0410	0.4034
180°	0.3889	0.1859	0.0449	0.4231

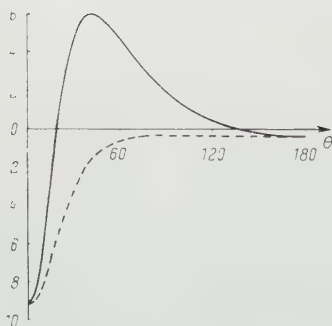


Figure 1

Elastic solid containing a spherical hole.
 Graphs of $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$ for $f = 2$,
 $\eta = 0.2$. — $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$.

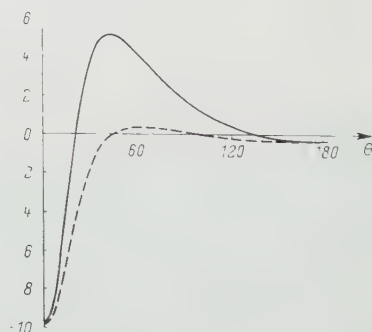


Figure 2

Elastic solid containing a spherical hole.
 Graphs of $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$ for $f = 2$,
 $\eta = 0.4$. — $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$.

Table 2
Elastic Solid Containing a Spherical Hollow. Values of $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 2$	$f = 4$	$f = 10$	$f = 2$
0°	-9.2069	-0.8371	-0.0814	-9.9313
10°	7.9420	0.7940	0.0790	8.1241
20°	5.3457	0.6801	0.0721	4.5680
30°	3.1113	0.5318	0.0620	1.7761
40°	1.7288	0.3866	0.0505	0.3088
50°	0.9923	0.2685	0.0393	+0.2694
60°	0.6275	0.1861	0.0298	0.4042
70°	0.4560	0.1367	0.0230	0.3513
80°	0.3811	0.1131	0.0190	0.2327
90°	0.3533	0.1074	0.0179	0.1019
100°	0.3477	0.1125	0.0191	-0.0196
110°	0.3518	0.1236	0.0221	0.1245
120°	0.3595	0.1370	0.0263	0.2112
130°	0.3678	0.1504	0.0308	0.2806
140°	0.3752	0.1626	0.0353	0.3344
150°	0.3812	0.1726	0.0393	0.3743
160°	0.3855	0.1799	0.0423	0.4018
170°	0.3881	0.1844	0.0443	0.4178
180°	0.3889	0.1859	0.0449	0.4231

It is of interest to compare the variation of the stress $\widehat{\theta\theta}$ in this problem with the variation of the hoop stress round the boundary of a circular hole in an infinite plate in a state of generalized plane stress due to the action of a force nucleus at a point of the plate, the nucleus being directed radially outwards from the centre of the hole. This problem has been discussed by HOLGATE (9) and the stress curves given by him are found to be similar to the curves given in Figures 1 to 3.

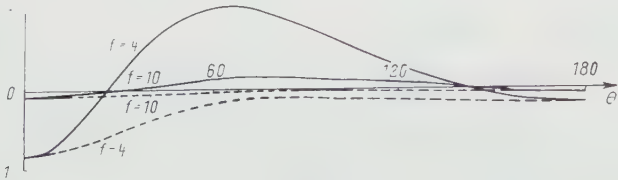


Figure 3
Elastic solid containing a spherical hole. Graphs of $\widehat{\theta\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$ for $f = 4$ and $f = 10$, $\eta = 0.2$ (note different scale from Figures 1 and 2). — $\widehat{\theta\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$.

4. Force Nuclei Acting at Internal Points of an Elastic Sphere

We now consider the problem of an elastic sphere under the action of two equal and opposite force nuclei, magnitude F , applied at points on a diameter of the sphere equidistant from the centre, the axes of the nuclei being directed along this diameter. Since the case when the forces act at the surface of the sphere has been discussed by STERNBERG and ROSENTHAL [10], we suppose the nuclei to act at internal points, the boundary of the sphere being unstressed. As the method given in SH for an infinite solid containing a spherical hollow can be extended to an elastic sphere (see SH, p. 250), it is possible to find closed form expressions for the stresses similar to those found in section 3. Since it is again more convenient for numerical work to use expressions for the stresses as infinite series of spherical harmonics, we give only these expressions.

If the nuclei act at the points whose cartesian coordinates are $(0, 0, f)$ and $(0, 0, -f)$, ($f < a$), and are directed radially outwards from the centre of the sphere, the stresses due to these nuclei acting in an infinite unbounded elastic solid are, when $f < r$,

$$\widehat{r r}_0 = -\frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2 n (4 n^2 + 6 n - 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 1) (2 n + 2) (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos \theta), \quad (4.1)$$

$$\widehat{r \theta}_0 = \frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(4 n^2 - 2 + 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 2) (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] T_{2n}^1(\cos \theta), \quad (4.2)$$

$$\widehat{\theta \theta}_0 = \frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2 n (4 n^2 - 4 n - 1 + 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 1)^2 (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos \theta) + \frac{4 \mu A \cot \theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2 n - 4 + 4 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n-1} - \frac{(2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] T_{2n}^1(\cos \theta) \quad (4.3)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi} \widehat{\varphi}_0 = & \frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2 n (2 n - 8 n \eta + 3 - 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} \right. \\ & \left. - \frac{(2 n + 1) (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos \theta) \\ & - \frac{4 \mu A \cot \theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2 n - 4 + 4 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} \right. \\ & \left. - \frac{(2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] T_{2n}^1(\cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

where $F = 16 \pi \mu A (1 - \eta)$. When $r < f$, the expressions for the stresses are obtained from equations (4.1) to (4.4) by replacing n by $-(n + 1)$ in the n -th term of each series.

The additional stresses $\widehat{r} \widehat{r}_1$ and $\widehat{r} \widehat{\theta}_1$ which must be added to the stresses $\widehat{r} \widehat{r}_0$ and $\widehat{r} \widehat{\theta}_0$ respectively to give the stress distribution due to the force nuclei acting in the elastic sphere, can be found by methods similar to those given in section 3 for the solid containing a spherical hollow. We find that

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r} \widehat{r}_1 = & \frac{16 \mu A}{(a f)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \frac{(n + 1) (2 n + 1) (2 n^2 - n - 1 - \eta) A_0(n)}{(4 n + 3) C(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right. \\ & \left. + \frac{n A_1(n)}{(4 n - 1) C(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} \right] \left(\frac{f}{a} \right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r} \widehat{\theta}_1 = & \frac{8 \mu A}{(a f)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \frac{(n + 1) (4 n^2 + 4 n - 1 + 2 \eta) A_0(n)}{(4 n + 3) C(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right. \\ & \left. + \frac{A_1(n)}{(4 n - 1) C(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} \right] \left(\frac{f}{a} \right)^{2n+1} T_{2n}^1(\cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

where

$$C(n) = 4 n^2 + 2 (1 + 2 \eta) n + 1 + \eta,$$

$$A_0(n) = a^2 (4 n + 3) n - f^2 (4 n + 1) (n - 1 + 2 \eta),$$

$$\begin{aligned} A_1(n) = & (n + 1) (4 n^2 - 1) [a^2 (4 n + 1) n - f^2 (4 n - 1) (n - 1 + 2 \eta)] \\ & + a^2 (4 n + 1) (1 - \eta^2). \end{aligned}$$

Further, we obtain the stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ on the surface of the sphere as

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{8\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_0(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n-1} P_{2n}(\cos\theta) + \frac{8\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n-1} T_{2n}^1(\cos\theta),$$

and

$$\widehat{\varphi\varphi} = \frac{8\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta) + \frac{8\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} T_{2n}^1(\cos\theta),$$

where

$$B_0(n) = a^2 n [128 n^5 + 64 (1 + \eta) n^4 - 40 n^3 - 4 (13 + 8 \eta) (1 + \eta) n^2 + 2 n + (3 - 2 \eta) (1 + \eta)] - f^2 (16 n^2 - 1) (4 n^2 - 1) (2 n + 1 + \eta) (n - 1 + 2 \eta),$$

$$B_1(n) = a^2 [32 n^4 - 16 n^3 - 2 (9 + 8 \eta) n^2 + n + 1 + \eta] - f^2 (16 n^2 - 1) (2 n - 1) (n - 1 + 2 \eta),$$

and

$$B_2(n) = a^2 n [128 \eta n^5 + 64 (1 + \eta) n^4 + 8 (8 - 5 \eta - 8 \eta^2) n^3 - 20 (1 + \eta) n^2 - 2 (2 - \eta - 2 \eta^2) n + 1 + \eta] - f^2 (16 n^2 - 1) (4 n^2 - 1) (2 \eta n + 1 + \eta) (n - 1 + 2 \eta).$$

To illustrate the variation of the stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ over the surface of the sphere, these stresses have been calculated for different values of f and η using equations (4.7) and (4.8). The values obtained are given in Tables 3 and 4 and plotted in Figures 4 to 6, the actual values shown being those of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$. Since the stresses have mirror symmetry about the plane $z = 0$, only the values for θ between 0° and 90° are given.

In conclusion, I wish to thank the University of Durham Computing Laboratory for the facilities placed at my disposal.

Table 3
Elastic Sphere. Values of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 0.1$	$f = 0.3$	$f = 0.5$	$f = 0.5$
0°	+0.5834	+2.1196	+5.4008	+5.0576
10°	0.5582	1.9592	4.4333	4.1131
20°	0.4867	1.5469	2.5456	2.2776
30°	0.3796	1.0345	1.0773	0.8630
40°	0.2523	0.5580	0.2966	0.1241
50°	0.1214	0.1858	-0.0421	-0.1855
60°	0.0027	-0.0717	0.1695	0.2939
70°	-0.0911	0.2322	0.2103	0.3230
80°	0.1509	0.3178	0.2203	0.3266
90°	0.1715	0.3445	0.2217	0.3259

Table 4
Elastic Sphere. Values of $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 0.1$	$f = 0.3$	$f = 0.5$	$f = 0.5$
0°	+0.5834	+2.1196	+5.4008	+5.0576
10°	0.5580	1.9833	4.7091	4.2918
20°	0.4855	1.6205	3.2059	2.6901
30°	0.3761	1.1384	1.7661	1.2588
40°	0.2445	0.6464	0.7366	0.3223
50°	0.1076	0.2170	0.0859	-0.2151
60°	-0.0182	-0.1170	-0.3035	0.5075
70°	0.1188	0.3493	0.5259	0.6607
80°	0.1835	0.4846	0.6396	0.7340
90°	0.2058	0.5288	0.6745	0.7557

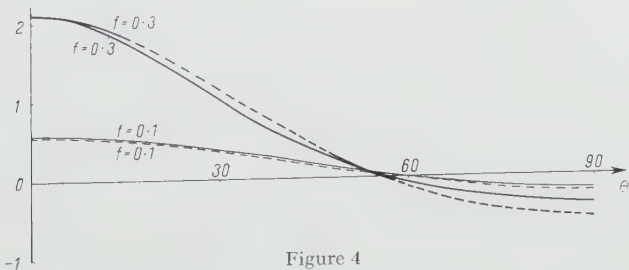


Figure 4
Elastic sphere. Graphs of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ for $f = 0.1$ and $f = 0.3$, $\eta = 0.2$.
— $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$; --- $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$.

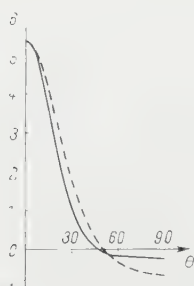


Figure 5

Elastic sphere. Graphs of $\hat{\theta}\theta/8\mu A$ and $\hat{\varphi}\varphi/8\mu A$ for $f = 0.5$, $\eta = 0.2$
(note different scale from Figure 4).

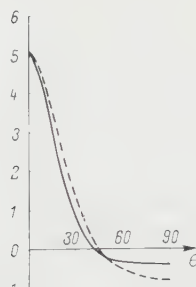


Figure 6

Elastic sphere. Graphs of $\hat{\theta}\theta/8\mu A$ and $\hat{\varphi}\varphi/8\mu A$ for $f = 0.5$, $\eta = 0.4$
(note different scale from Figure 4).

REFERENCES

- [1] R. D. MINDLIN, *Physics* 7, 195-202 (1936).
- [2] B. SEN, *Bull. Calcutta math. Soc.* 22, 73-83 (1940).
- [3] W. R. DEAN, H. W. PARSONS and I. N. SNEDDON, *Proc. Camb. phil. Soc.* 40, 5-19 (1944).
- [4] W. D. COLLINS, *Mathematika* 1, 125-130 (1954).
- [5] W. D. COLLINS, *Proc. London math. Soc.* 9 (3), 242-252 (1959).
- [6] A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, 1927), p. 185-186.
- [7] T. M. MACROBERT, *Spherical Harmonics* (Methuen, 1947), p. 125.
- [8] C. W. CLENSHAW, *M. T. A. C.* 9, 118-120 (1955).
- [9] S. HOLGATE, *Proc. Camb. phil. Soc.* 40, 172-188 (1944).
- [10] E. STERNBERG and F. ROSENTHAL, *J. appl Mech.* 19, 413-421 (1952).

Résumé

Dans cette communication, nous donnons des expressions pour les efforts causés par des noyaux de forces agissant à certains points

- (i) d'un solide élastique contenant une cavité sphérique;
- (ii) d'une boule élastique.

Dans le premier cas, on obtient des expressions en séries de fonctions de LEGENDRE. Des expressions équivalentes contenant des intégrales et des fonctions élémentaires sont également obtenues. Dans le deuxième cas, on obtient seulement des expressions en fonction de LEGENDRE. Dans chaque cas, des résultats numériques sont obtenus pour les efforts sur la surface sphérique.

(Received: July 17, 1959.)

Über die Erzeugung von hohen, kurzzeitigen Magnetfeldern

Von PIERO COTTI, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Die Erzeugung von Dauermagnetfeldern über 60 000 A/cm (75 000 Oe) erfordert bekanntlich einen so grossen apparativen Aufwand, dass nur sehr wenige Laboratorien über die entsprechenden Installationen verfügen. Die höchsten Dauermagnetfelder, die bis jetzt hergestellt werden konnten, liegen bei etwa 80 000 A/cm (100 000 Oe). Wie KAPITZA [1, ²⁾] aber schon 1924 gezeigt hat, ist es mit einem relativ bescheidenen Aufwand möglich, drei- bis viermal so starke Magnetfelder zu erzeugen, sobald man sich darauf beschränkt, diese nur für ein sehr kurzes Zeitintervall (Grössenordnung Millisekunden) zur Verfügung zu halten.

KAPITZA verwendete zuerst eine Serie von Akkumulatoren als Energiequelle. Mit einem mechanischen Schalter wurde diese während einiger Hundertstelsekunden über eine kleine Spule kurzgeschlossen, wobei Magnetfelder bis zu 100 000 A/cm erzeugt wurden. Um noch höhere Magnetfelder zu erreichen und diese auch in einem grösseren Volumen von mehreren Kubikzentimetern zur Verfügung zu haben, benützte KAPITZA [2] später seine berühmt gewordene Dynamomaschine als Energiequelle. Er konnte so während einer Impulsdauer von rund 30 ms in einem Volumen von ungefähr 6 cm³ Magnetfelder bis zu 256 000 A/cm (320 000 Oe) erzeugen.

Eine starke Reduktion des apparativen Aufwandes brachte 1926 die Idee von WALL [3], eine Batterie von Kondensatoren als Energiequelle zu benützen. Die Kondensatorenbatterie von WALL wies eine Kapazität von 1400 μ F auf und konnte auf maximal 2000 V aufgeladen werden. Durch die Entladung dieser Kondensatorenbatterie über eine kleine Hochfeldspule konnte WALL Magnetfelder bis zu 182 000 A/cm (228 000 Oe) erzeugen, wobei allerdings die Hochfeldspule infolge der Biot-Savart-Kräfte explodierte. Diese Technik wurde seither in fast allen Laboratorien [4-10], die sich mit der Erzeugung von kurzzeitigen, hohen Magnetfeldern beschäftigen, verwendet.

Im Verlaufe der letzten 5 Jahre sind am Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH einige Apparaturen gebaut worden, die ebenfalls nach diesem Prinzip arbeiten. Diese Apparaturen wurden hauptsächlich für die Messung der Änderung des elektrischen Widerstandes von reinen Metallen in

¹⁾ ETH. Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 32.

hohen Magnetfeldern benützt. Dazu sind relativ lange Impulszeiten erforderlich, denn zu schnell veränderliche Felder werden im allgemeinen die gut leitenden Metallproben nicht genügend durchdringen und sie auch durch starke Wirbelströme aufheizen. Es wurden hier zum Beispiel während einer Impulsdauer von ungefähr einer Millisekunde in einem Volumen von $0,5 \text{ cm}^3$ Magnetfelder bis zu 320000 A/cm (400000 Oe), oder während etwa 100 Millisekunden und in einem Volumen von 10 cm^3 Magnetfelder bis zu 80000 A/cm (100000 Oe) erzeugt.

Über die Erzeugung noch höherer Felder (bis zu 750000 Oe) während einer Zeit von grössenordnungsmässig $100 \mu\text{s}$ sind in den letzten Jahren drei ausführliche Arbeiten erschienen [6, 7, 18]. Ergänzend soll hier im folgenden die Erzeugung von Hochfeldern während relativ langer Zeiten und die ökonomisch günstigste Dimensionierung einer solchen Hochfeldapparatur behandelt werden. Die hier angeführten Berechnungen folgen zum Teil einer wertvollen Arbeit von CHAMPION [4], sind aber speziell unseren Zwecken angepasst worden.

Die Messmethode, die hier angewendet wird, soll am Schluss kurz beschrieben und eine Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Kupfer gezeigt werden.

2. Theorie

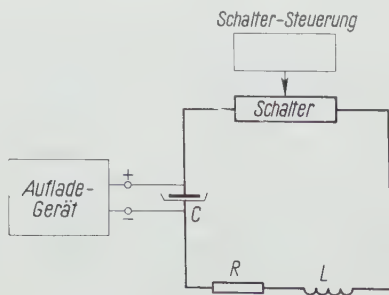
Figur 1 zeigt das prinzipielle Schaltbild unserer Apparatur. Die Stromstärke in einem solchen Entladungskreis wird

$$I(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-t R/2L} \sin \omega t, \quad (1)$$

wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

U bezeichnet hier die Aufladespannung der Kondensatorenbatterie, L die Selbstinduktion der Hochfeldspule, C die Kapazität der Kondensatorenbatterie und R den Ohmschen Widerstand des Entladungskreises.



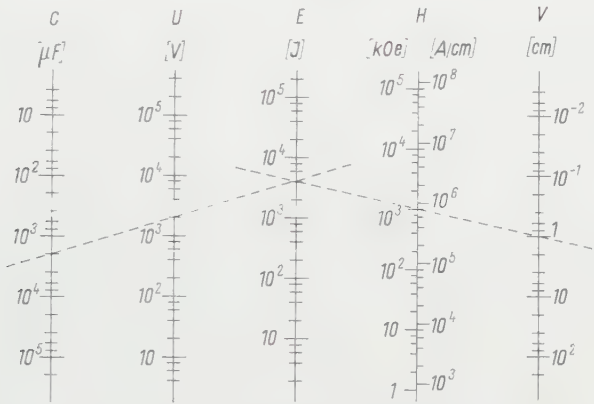
Figur 1

Prinzipielles Schaltschema der Hochfeldapparatur.

Diese Beziehung gilt sowohl für reelle als auch für imaginäre ω und geht im aperiodischen Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ gegen den Ausdruck

$$I(t) = \frac{U}{L} t e^{-t R/2L} . \tag{3}$$

Wie die Erfahrung zeigt, liegt die Art unserer Entladungen meistens in der Nähe dieses aperiodischen Grenzfalles.



Figur 2

Nomogramm. Das maximal erzeugbare Magnetfeld H als Funktion der eingesetzten Energie E und des inneren Volumens V der Hochfeldspule (energetischer Idealfall). Zur Auswertung sind die drei linken und die drei rechten Funktionskalen je durch eine Gerade zu verbinden (C und U sind Kapazität und Aufladespannung der Kondensatorenbatterie).

Im energetisch günstigsten Fall würde die gesamte, ursprünglich in den Kondensatoren aufgespeicherte, elektrische Energie $E = C U^2/2$ im Augenblick des Feldmaximums lediglich in Form von magnetischer Energie im innern Volumen der Hochfeldspule stecken. In Giorgi-Einheiten würde also

$$E = \frac{C U^2}{2} = \frac{\mu_0 H_{max}^2}{2} V , \tag{4}$$

wobei H_{max} das Feldmaximum im Mittelpunkt der Spule und V das innere Volumen der Spule bezeichnet.

Das Nomogramm von Figur 2 gibt eine Darstellung dieses Zusammenhanges. Wir werden allerdings sehen, dass der Wirkungsgrad dieser Energieumformung selten über 50% liegt. Es ist zweckmässig, diesen Wirkungsgrad mit K^2 zu bezeichnen. Dann wird

$$H_{max} = K U \sqrt{\frac{250 C}{\pi V}} , \quad 0 < K < 1 , \tag{5}$$

H_{max} [A/cm], C [μ F], V [cm^3], U [V].

Nach CHAMPION kann K in zwei Faktoren aufgespalten werden:

$$K = J S \quad \begin{cases} 0 < J < 1, \\ 0 < S < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Der Faktor J berücksichtigt die Ohmschen Energieverluste, während S der Tatsache Rechnung trägt, dass in einer Spule die magnetische Feldenergie nicht nur im Spuleninnern konzentriert werden kann. CHAMPION, der sich ausführlich mit diesen beiden Faktoren auseinandergesetzt hat, gibt einen expliziten Ausdruck für S . Tabelle 1 wurde einer seiner graphischen Darstellungen entnommen.

Tabelle 1
Der Faktor S als Funktion von α und β (siehe auch Figur 4)

$\beta \backslash \alpha$	1,1	1,5	2	4	8
0,5	0,60	0,50	0,40	0,23	0,12
1	0,82	0,70	0,57	0,32	0,17
2	0,96	0,83	0,70	0,41	0,21
4	0,98	0,88	0,75	0,47	0,26
8	0,99	0,88	0,75	0,48	0,28

Wie man sich leicht überlegt, gilt für den Faktor J

$$J = \frac{I_{max}}{I_{max}(R=0)}. \quad (7)$$

Mit der Substitution

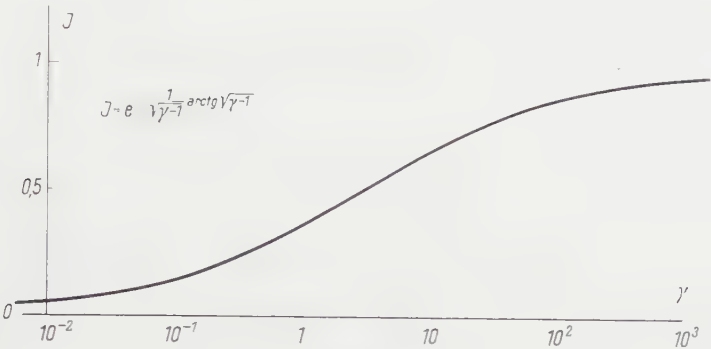
$$\gamma = \frac{4L}{R^2 C} \quad (8)$$

erhält man aus Gleichung (1)

$$J = e^{-(1/\sqrt{\gamma-1}) \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma-1}}. \quad (9)$$

J wächst monoton mit γ (Figur 3). $\gamma - 1$ entspricht dem aperiodischen Grenzfall.

Man wird also eine Hochfeldspule so dimensionieren, dass γ möglichst gross und zugleich S nicht zu klein wird. Im Bereiche kleiner γ -Werte ist vor allem die erste Bedingung massgebend, während für γ -Werte über 5 mehr Gewicht auf die zweite Bedingung gelegt werden muss. Ohne eine Nebenbedingung zu stellen, wird man dabei auf den Extremfall einer Spule geführt, die aus einer einzelnen Windung von möglichst grossen Dimensionen besteht.



Figur 3
Der Faktor J als Funktion von γ .

Als Nebenbedingung soll die Selbstinduktion L der Hochfeldspule vorgeschrieben werden, da L im wesentlichen die Impulsdauer der Entladung bestimmt. Für eine Spule von rechteckigem Wicklungsquerschnitt gilt bekanntlich (Bezeichnungen nach Figur 4)

$$L = n^2 r_i \lambda(\alpha, \beta), \tag{10}$$

wobei L in Mikrohenry und r_i in Zentimeter einzusetzen sind, während λ einen Formfaktor bezeichnet, der nur von den relativen Spulenparametern α und β abhängt ($\alpha = r_a/r_i$, $\beta = l/r_i$, siehe Tabelle 2).

Tabelle 2
Der Formfaktor λ , $L = n^2 r_i \lambda$, L in Mikrohenry, r_i in Zentimeter

$\alpha \backslash \beta$	1,1	1,5	2	4	8
0,5	21,5	23,0	25,5	37,5	65
1	14,0	16,5	19,0	31,5	58
2	8,5	10,3	12,9	24,0	47,8
4	4,8	6,2	7,6	15,8	37,0
8	2,55	3,2	4,0	9,3	24,0

Der Ohmsche Widerstand R einer Spule wird

$$R = \frac{\varrho n^2 \pi (\alpha + 1)}{2 f r_i (\alpha - 1) \beta}, \tag{11}$$

wobei f den Füllungs faktor nach Figur 4 und ϱ den spezifischen Widerstand bezeichnet. Die Tatsache, dass sich ϱ während einer Entladung infolge der Erwärmung der Hochfeldspule verändert, soll vorläufig vernachlässigt werden.

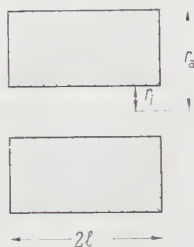
Wenn die Windungszahl n durch die Selbstinduktion L substituiert wird, erhält man für γ

$$\gamma = \frac{16 f^2}{2 \varrho^2} \cdot \frac{r_i^4}{L C} F(\alpha, \beta), \quad (12)$$

wobei

$$F(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \beta \lambda \right)^2 \quad (13)$$

und somit nur von den relativen Spulenparametern α und β abhängt.



Figur 4

Bezeichnungen der Hochfeldspule: $r_a/r_i = \alpha$; $1/r_i = \beta$; n Windungszahl; ϱ Drahtdurchmesser; f Füllungsfaktor $= n \varrho^2 \pi / 8 l (r_o - r_i)$.

Der Geometriefaktor F wächst sehr schnell mit α und etwa 1000mal langsamer mit β (Tabelle 3).

Tabelle 3
Der Geometriefaktor $F(\alpha, \beta)$ in $10^{-18} \text{ Hy}^2/\text{cm}^2$

$\alpha \backslash \beta$	1,2	1,5	2	4	8
0,5	1,0	5,29	17,7	126	1670
1	1,74	10,22	40,0	368	2180
2	2,66	17,6	75,0	822	5620
4	3,72	23,0	100	1470	13270
10	3,82	29,2	128	2130	26250

Die energetisch günstigste Dimensionierung der Hochfeldapparatur kann nun aus Gleichung (12) herausgelesen werden. Die Kondensatorenbatterie soll so angelegt werden, dass sie bei relativ kleiner Kapazität auf möglichst hohe Spannungen aufgeladen werden kann (Serieschaltung). Die höchsten Aufladespannungen werden durch den Entladeschalter, die Isolation der Hochfeldspule und nicht zuletzt auch durch Sicherheitsbedingungen beschränkt. Da

ausser der Kapazität C nach (12) auch die Selbstinduktion L möglichst klein sein sollte, ist es grundsätzlich möglich, bei kürzeren Impulsdauern einen grösseren energetischen Wirkungsgrad zu realisieren. L darf aber auch aus energetischen Gründen nicht zu klein gemacht werden, denn die Selbstinduktion der Hochfeldspule muss grössenordnungsmässig grösser als diejenige der Zuleitungen und der Kondensatorenatterie sein, da sich ja die magnetische Energie im Verhältnis der Selbstinduktionen aufteilt.

Gleichung (12) besagt weiter, dass eine beliebige Verkleinerung der Hochfeldspule (r_i) bei gegebener Kondensatorenatterie nicht unbedingt ein höheres Magnetfeld liefert, da γ mit der vierten Potenz von r_i zunimmt und J im Bereich kleiner γ -Werte ebenfalls sehr rasch mit γ wächst.

Der Füllungsfaktor f tritt in Gleichung (12) im Quadrat auf. Da sich ein grosses f , wie man sich leicht überlegt, auch günstig auf die mechanische Widerstandsfähigkeit einer Hochfeldspule auswirkt, ist es in doppelter Hinsicht vorteilhaft, Rechteckprofildraht zu verwenden.

Im allgemeinen wird das innere Volumen der Hochfeldspule und die minimale Impulsdauer der Entladung durch die auszuführenden Messungen vorge-schrieben. Anhand der Thomsonschen Formel kann aus der minimalen Impuls-dauer ein Wert für L festgelegt werden:

$$L = \frac{4 \tau_{max}^2}{\pi^2 C}, \quad (14)$$

wobei τ_{max} den Zeitpunkt des Feldmaximums bezeichnet. Bekanntlich ist die Periodendauer von gedämpften Schwingungen immer etwas grösser als der nach der Thomsonschen Formel berechnete Wert. Wie wir gesehen haben, nimmt γ mit α schnell zu. Eine Vergrösserung von α hat allerdings eine Verschlechterung der Homogenität des Magnetfeldes längs der Spulenachse zur Folge. Hat man einmal das grösste α , das sich diesbezüglich noch verantworten lässt, bestimmt, so kann daraus anhand von (10) die Windungszahl n berechnet werden. Bei der Festlegung von α muss ausserdem darauf geachtet werden, dass der Faktor S mit zunehmendem α abnimmt. Eine Vergrösserung von α ist deshalb vor allem dann zweckmässig, wenn der γ -Wert noch kleiner als 5 ist.

3. Die Erwärmung der Hochfeldspule

Da die Erwärmung einer Hochfeldspule im wesentlichen adiabatisch verläuft, gilt hier

$$i^2 \varrho \, dt = c_v \nu \, dT, \quad (15)$$

wobei i die Stromdichte, c_v die spezifische Wärme pro Gramm und ν die Dichte bezeichnet.

Wir trennen die Temperatur- und die zeitabhängigen Größen und integrieren

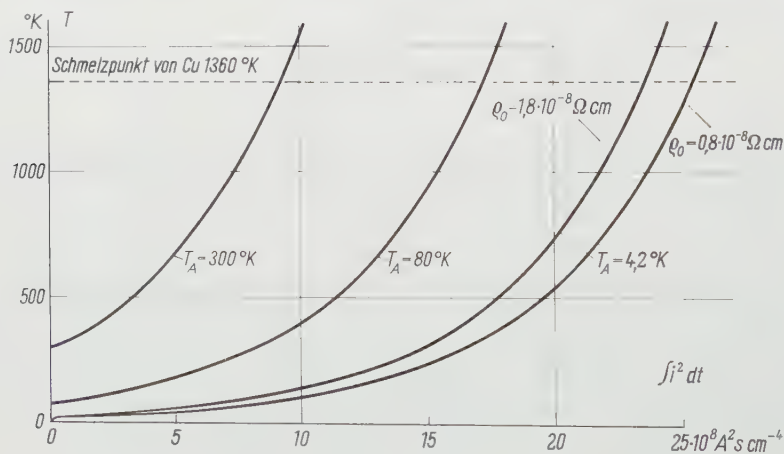
$$\int_0^t i^2 dt = \int_{T_A}^{T_t} \frac{c_v v}{\varrho} dt, \quad (16)$$

wobei T_A die Anfangstemperatur und T_t die Temperatur zur Zeit t bezeichnet.

Für Temperaturen unter 200° K kann das Integral rechts nur numerisch ausgewertet werden. OLSEN [5], der seine Hochfeldspulen in flüssiges Helium getaucht hatte, gibt eine graphische Darstellung dieses Zusammenhanges für Kupferspulen von $1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ bzw. $0,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ spezifischen Restwiderstand. Diese graphische Darstellung geht bis zu Endtemperaturen von 100° K. Bei höheren Temperaturen ist c_v näherungsweise konstant und ϱ proportional zur absoluten Temperatur. Dann wird

$$\frac{T_t}{T_A} = e^{\frac{\varrho_{273}}{273 c_v v} \int_0^t i^2 dt}. \quad (17)$$

Anhand dieser Formel wurden in Figur 5 die graphischen Darstellungen von OLSEN erweitert.



Figur 5

Die Temperaturerhöhung der Hochfeldspule als Funktion von $\int i^2 dt$ für drei verschiedene Ausgangstemperaturen, T_A .

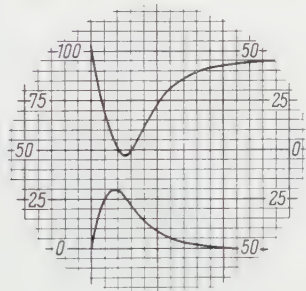
Das Integral $\int i^2 dt$ kann durch das Magnetfeld H ausgedrückt werden, indem für H der Näherungswert $In/2l$ eingesetzt wird. Man erhält so

$$\int i^2 dt \cong \frac{1}{l^2 (r_a - r_i)^2} \int H^2 dt = \frac{H_{\max}^2 \rho \tau_{\max}}{l^2 (r_a - r_i)^2}, \quad (18)$$

wobei $\rho \tau_{\max}$ ein Mass für die Dauer der Entladung darstellt. Für eine ideal

sinusförmige Entladung ($R = 0$) wird $\phi = 1$, während im aperiodischen Grenzfall $\phi = 1,85$ wird,

Eine kleine Hochfeldspule (Tabelle 4, Nr. 1) würde sich zum Beispiel bei der Erzeugung von 250 000 A/cm während 3 ms von 80° K auf etwa 300° K, von 300° K aber auf rund 1000° K erhitzen. Für die Erzeugung von Magnetfeldern über 200 000 A/cm (während Millisekunden und mehr) ist deshalb eine Vorkühlung der Hochfeldspule mit flüssiger Luft unumgänglich. Aus dem letzten Ausdruck geht jedoch hervor, dass sich die Temperaturerhöhung durch eine



Figur 6

Die Messung der Temperaturerhöhung der Hochfeldspule. Die untere Kurve repräsentiert den Feldverlauf (100 Skt = 2440 A = 468 000 A/cm = 608 000 Oe), während die obere Kurve den Verlauf der Ohmschen Spannung an der Hochfeldspule darstellt (100 Skt = 1270 V). Der ganzen Bildbreite entspricht eine Zeit von 10 ms.

Vergrößerung der Wicklungsstärke wirksam reduzieren lässt. Um die Ausdrücke über die Temperaturerhöhung zu kontrollieren, wurde mit einem Kathodenstrahloszillographen der Verlauf des Ohmschen Widerstandes einer in flüssiger Luft vorgekühlten Spule während einer Entladung gemessen.

Dabei wurde die induktive Komponente der an der Spule auftretenden Spannung mit einer Pick-up-Spule auskompensiert. Die Verschiebung der Maxima demonstriert augenfällig die Vergrößerung des Widerstandes während der Entladung. Nach 2,5 ms beträgt der Ohmsche Widerstand 1,65 Ω , was bereits einer Temperatur von 215° K entspricht. Der Füllungs faktor dieser Spule war 0,55 und die Wicklungsstärke 0,6 cm. Um anhand von Formel (17) auf eine Endtemperatur von 215° K zu kommen, muss hier für $\int i^2 dt$ ein Wert von $5,8 \cdot 10^8 \text{ A}^2 \text{ s cm}^{-4}$ eingesetzt werden. Dies entspricht einem $\phi \tau_{\max}$ von 2,1 ms ($H_{\max} = 160\,000 \text{ A/cm}$).

4. Die Verstärkung der Hochfeldspule

Eine unverstärkte Kupferspule von rechteckigem Wicklungsquerschnitt wird auch bei günstigster Dimensionierung bei Magnetfeldern zwischen 200 000 und 250 000 A/cm durch die Biot-Savart-Kräfte in radialer Richtung aus-

einandergerissen. Bei Impulsdauern in der Grössenordnung von Millisekunden und weniger setzt also nicht die Erwärmung der Hochfeldspule der Erzeugung von Magnetfeldern zuerst eine Grenze!

Für die azimutale Zugbeanspruchung σ einer Hochfeldspule durch die Biot-Savart-Kräfte gilt, unter Vernachlässigung der zusätzlichen Belastung der äusseren Windungen durch den Auflagedruck der inneren Windungen,

$$\sigma_{(r)} = \frac{\mu_0 H^2}{f} \cdot \frac{r_a r - r^2}{(r_a - r_i)^2}, \quad (19)$$

wobei r den Abstand von der Spulenachse bezeichnet. Bei der Herleitung dieser Formel wurde für H der Näherungswert $I n/2l$ eingesetzt, der bekanntlich um so genauer stimmt, je länger die betrachtete Spule gegenüber ihrem mittleren Durchmesser ist. Die maximale Zugbeanspruchung tritt für Spulen, deren α grösser als 2 ist, bei $r = r_a/2$, und für Spulen, deren α kleiner oder gleich 2 ist (wo sie bei gleichem H grösser wird), bei $r = r_i$ auf. Für ein H von zum Beispiel 200 000 A/cm ($\alpha = 2$) erhält man für die maximale Zugbeanspruchung ungefähr 50 000 N/cm², was ungefähr dem doppelten Wert der maximal zulässigen Zugbeanspruchung von handelsüblichem Kupfer entspricht. Die stärkere Beanspruchung der inneren Windungen einer Hochfeldspule hat nach mehreren Entladungen eine Ermüdung der Widerstandsfähigkeit zur Folge, indem bei jeder Entladung die inneren Windungen etwas mehr gegen die äusseren Windungen fliessen, bis die Deformation im Innern zu gross und die Spule unterbrochen wird. Einlagige Kupferspulen können schon bei 100 000 A/cm explodieren. Eine unverstärkte Kupferspule, die Felder bis zu 200 000 A/cm aushalten soll, muss deshalb eine möglichst grosse Wicklungsstärke (α gross) aufweisen und wenn möglich, zur Vergrösserung des Füllungs-faktors f , aus Rechteckprofildraht gewickelt werden.

Von den verschiedenen Verstärkungsmöglichkeiten, die hier ausprobiert wurden, haben sich verleimte Glasfasern am besten bewährt³⁾. Solche Glasfasern sind in Glasseidenbandform im Handel erhältlich. Wir haben ein 10 mm breites, etwa 0,05 mm dickes Glasseidenband verwendet, das aus den dünnsten serienmässig hergestellten Mikrofäden gesponnen wird, da so dünne Glasfasern die grösste spezifische Reissfestigkeit aufweisen. Dieses Band wurde in einem Giessharz (zum Beispiel Araldit) getränkt und dann möglichst straff in einzelnen Schichten zwischen die Wicklungslagen und um die Hochfeldspule gewickelt.

Als Beispiel für eine solche Glasfaserverstärkung möge der Aufbau von Spule Nr. 1 (Tabelle 4) dienen. Diese Spule, die speziell für die Erzeugung höchster Magnetfelder während einer Impulsdauer von rund einer Millisekunde dimensioniert ist, wurde aus lackisoliertem Rechteckprofildraht (1,30 · 0,25 mm)

³⁾ Für diesen Vorschlag bin ich Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN zu Dank verpflichtet.

auf einen Plexiglaskörper gewickelt. Nach sechs Lagen wurde eine ungefähr 1,5 mm dicke Glasfaserschicht eingeschaltet. Dabei musste speziell darauf geachtet werden, dass sich die Glasfasern vollständig mit Giessharz durchsetzen (das unverleimte Glasfaserband kann mit Leichtigkeit mit der Hand zerrissen werden). Nach 10 weiteren Lagen (total 231 Windungen) wurde noch eine etwa 5 mm dicke Glasfaserschicht um die ganze Spule gelegt. Nach einer Vorkühlung mit flüssiger Luft konnte in dieser Spule ein maximales Magnetfeld von 290 000 A/cm (360 000 Oe) erzeugt werden, während sie bei 312 000 A/cm (390 000 Oe) explodierte. Es konnte allerdings nicht eindeutig festgestellt werden, ob die Zerstörung infolge der Biot-Savart-Kräfte oder infolge der Erhitzung erfolgte. Der äussere Glasfasermantel ist jedenfalls dabei unversehrt geblieben.

Durch den Übergang zu kürzeren Impulszeiten könnten wahrscheinlich in solchen mit Glasfasern verstärkten Spulen noch beträchtlich höhere Magnetfelder erzeugt werden, denn einerseits kann dadurch die Temperaturerhöhung reduziert werden und andererseits spielt besonders bei sehr kurzen Impulsdauern (zum Beispiel 10 μ s) auch die Trägheit des Spulenmaterials eine entscheidende Rolle, indem sich die Hochfeldspule während einer so kurzen Zeit gar nicht genügend deformieren kann, um zu zerreißen (siehe zum Beispiel [7]).

5. Die Hochfeldapparatur

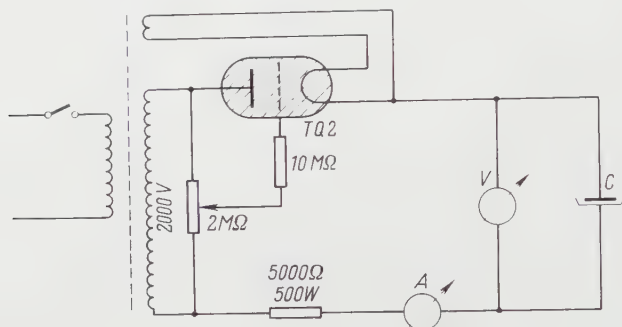
a) Kondensatorenbatterie

Unsere Kondensatorenbatterie besteht zurzeit aus 80 Elektrolytkondensatoren von je 550 μ F Kapazität und 500 V Nennspannung (total 5500 J Fassungsvermögen). Es wurden vor allem aus finanziellen Gründen Elektrolytkondensatoren verwendet, da sich in diesen am meisten «Joule pro Franken» aufspeichern lassen. Diese Kondensatoren können an einem Schaltbrett wahlweise in Serie oder parallel geschaltet werden. Da für unsere Messungen nur Impulsdauern von einigen Millisekunden und mehr in Frage kommen, sind wir nicht auf eine speziell induktionsarme Gestaltung der Zuleitungen zu den verschiedenen Kondensatoren und des Entladungskreises angewiesen (die Selbstinduktion unserer Hochfeldspulen ist von der Grössenordnung 100 μ Hy bis 100 mHy).

b) Das Aufladegerät

Ein Aufladegerät, das in der Lage ist, Stromstärken von 100 mA bis 500 mA zu liefern, wird im allgemeinen für unsere Zwecke vollständig genügen, da in diesem Falle die Aufladezeiten bereits kürzer als die entsprechenden Abkühlungszeiten der Hochfeldspule werden. Unser Aufladegerät wurde so entworfen, dass die Aufladespannung vorgewählt werden kann, um eine beliebige Einstellung der Höhe des Feldmaximums zu ermöglichen. Wie man aus der

Schaltung von Figur 7 ersieht, wird hier der Zündzeitpunkt des Thyratrons mit Hilfe der Steuerspannung am Gitter beeinflusst. Die Aufladespannung kann so zwischen Null und der Amplitude der sekundären Wechselfspannung des Transformators kontinuierlich eingestellt werden.



Figur 7

Prinzipielles Schaltschema der Aufladeapparatur.

Wir sind in der Lage, mit diesem Aufladegerät unsere Kondensatorenbatterie bis auf 2800 V aufzuladen, wobei Stromstärken bis zu 500 mA daraus entnommen werden können.

c) Der Entladeschalter

Für unsere Zwecke kommen nur Schalter in Frage, die einerseits in der Lage sind, Ströme von der Grössenordnung 1000 bis 10000 A zu schalten, und bei denen andererseits der Einschaltvorgang schon nach wenigen Mikrosekunden abgeschlossen ist.

Wenn vor allem auf die zweite Bedingung Gewicht gelegt werden muss, so wird sich im allgemeinen die Verwendung eines elektronischen Schalters (Thyratron oder Ignitron) empfehlen.

Thyratrons und Ignitrons haben jedoch den Nachteil, dass sie sowohl die maximale Stromstärke als auch die Impulsdauer beschränken. Doch eignen sie sich besonders gut im Zusammenhang mit einer Elektrolytkondensatorenbatterie, da durch die Gleichrichterwirkung dieser Schalter eine schädliche, negative Aufladung der Elektrolytkondensatoren verhindert oder zumindest stark reduziert werden kann.

Eine weitere Möglichkeit, das Schalterproblem zu lösen, besteht in der Verwendung von Funkenschaltern. Solche Schalter können leicht selber hergestellt werden. Eine ausführliche Beschreibung zweier solcher Schalter findet man in einer Arbeit von CULLINGTON, CHACE and MORGAN [11].

Für unsere Apparatur haben wir ein Ignitron (Pl 5555) als Entladeschalter benutzt und damit sehr gute Erfahrungen gemacht. Dieses Ignitron soll nach den Angaben der Lieferfirma während 0,15 s Kurzschlußströme bis zu 10000 A aushalten. Es arbeitet in einem Spannungsbereich zwischen 200 und 2000 V.

d) Die Hochfeldspule

Die Richtlinien zur energetisch günstigsten Dimensionierung einer Hochfeldspule sind bereits am Schluss des 2. Kapitels angegeben worden.

Die Daten von drei Spulentypen, die hier besonders häufig verwendet werden, sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Die Spule Nr. 1 ist für die Erzeugung von möglichst hohen Magnetfeldern vorgesehen, wobei allerdings eine für

Tabelle 4
Charakteristische Spulentypen

Nr.	r_i	r_a	$2l$	n	Draht H/I Mitte		H_{max} bei 2000 V 2000 μF	L	τ_{max} bei 2000 μF
	mm	mm	mm	Win- dungen	mm	Oe/A	Oe	mHy	ms
1	2,55	9,0	20,6	231	1,30 $\times 0,25$	122	400 000	0,18	0,7
2	6,6	25,4	75,5	7500	0,4	1155	100 000	420	30
3	2	8,5	76,8	1085	1,30 $\times 0,25$	176	230 000	10,8	2

Die Spule Nr. 1 wurde mit zwei Glasfaserschichten verstärkt (siehe Seite 27).

unsere Verhältnisse sehr kurze Impulsdauer und ein nur in einem sehr kleinen Volumen einigermaßen homogenes Magnetfeld in Kauf genommen werden. Mit der Spule Nr. 2 wurde das Hochfeld im Gegensatz dazu während einer relativ langen Impulsdauer und in einem grossen Volumen erzeugt. Diese Spule wurde so dimensioniert, dass sie über ein spezielles Glasdewargefäß von 10 mm Aussendurchmesser geschoben werden kann. In diesem Dewargefäß kann eine Messung zum Beispiel in flüssigem Helium (4,2° K) oder bei anderen Temperaturen vorgenommen werden, während sich die Hochfeldspule in flüssiger Luft befindet. Die Spule Nr. 3 endlich ist für Messungen vorgesehen, bei denen speziell Gewicht auf die Homogenität des Magnetfeldes längs der Achse gelegt werden muss (Widerstandsänderung im longitudinalen Magnetfeld).

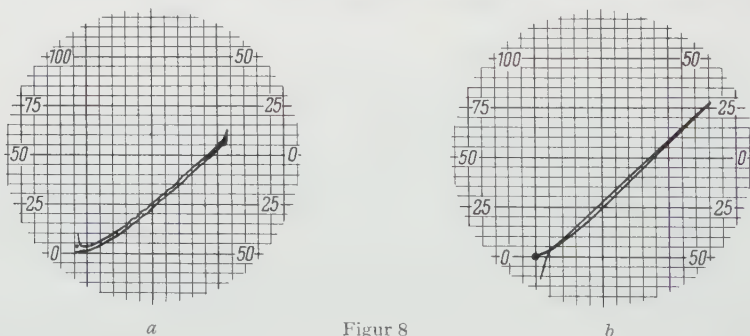
e) Die Messung des Magnetfeldes

Es hat sich gezeigt, dass für unsere Messungen das Magnetfeld mit genügender Genauigkeit der Stromstärke in der Hochfeldspule proportional gesetzt

werden darf, da Abweichungen von dieser Annahme, die aus den Deformationen der Hochfeldspule während der Entladung resultieren, grössenordnungsmässig kleiner sind als die Fehler, die sich zum Beispiel aus der Nichtlinearität und der Strahldicke des Kathodenstrahloszillographen ergeben. Um dies nachzuweisen, wurde für die verschiedenen Spulentypen jeweils die integrierte Spannung einer kleinen Pick-up-Spule gegen die Spannung an einem kleinen, induktionsfreien Messwiderstand im Entladungskreis (Stromstärke), aufgetragen. Die Steilheit der Geraden, die so entsteht, liefert zugleich einen zuverlässigen Wert für den Quotienten H/I , denn die Berechnung dieses Quotienten aus der Geometrie unserer kleinen Hochfeldspulen wird im allgemeinen zu ungenau.

6. Die Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Metallen

Unsere Messmethode arbeitet nach folgendem Prinzip: Durch die Metallprobe, die wegen der Erschütterung der Hochfeldspule möglichst solid in dieser montiert werden muss, wird ein Gleichstrom geleitet. Der Spannungsabfall, der dabei an der Probe entsteht, wird auf den Vertikalverstärker eines Kathodenstrahloszillographen gegeben, während zugleich die Spannung am Messwiderstand des Entladungskreises an den Horizontalverstärker gelegt wird. Während einer Entladung wird so der Verlauf der magnetischen Widerstandsänderung direkt auf den Schirm des Kathodenstrahloszillographen gezeichnet (Figur 8).



Die Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Cu ($\rho_{4,2}/\rho_{300} = 0,88\%$):

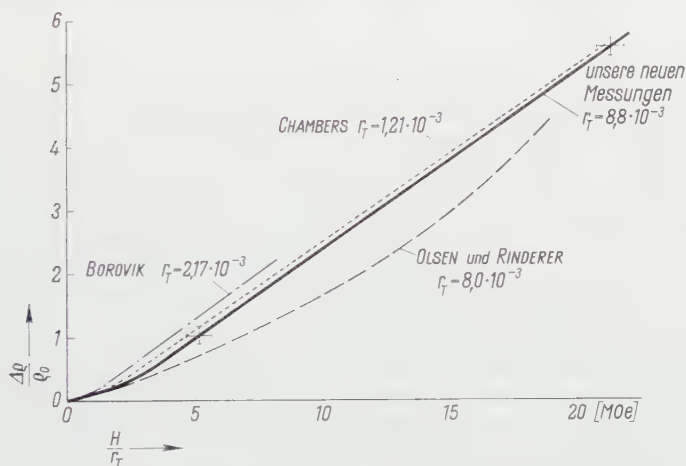
- a* Bei 77° K ($H_{\max} = 260\,000 \text{ A/cm} = 325\,000 \text{ Oe}$, $\Delta\rho/\rho_{0\max} = 0,51$). Die hochfrequenten Störungen werden durch die Erschütterung der Hochfeldspule verursacht.
- b* Bei $4,2^\circ \text{ K}$ ($H_{\max} = 160\,000 \text{ A/cm}$, $\Delta\rho/\rho_{0\max} = 5,82$). Die Hysteresis ist auf Wirbelstromaufheizung zurückzuführen.

Die durch das pulsierende Hochfeld im Messkreis induzierte Spannung äussert sich durch eine Hysteresis und wird hier mit einer Pick-up-Spule über ein Potentiometer auskompensiert.

Mit dieser Methode sind hier zahlreiche Messungen der magnetischen Widerstandsänderung von polykristallinen Metallen und Legierungen ausgeführt

worden [12]. Speziell wurde die longitudinale, magnetische Widerstandsänderung von Ag, Au, Li, Ni, Pb, Pt, Sn und Zn bei 4,2° K untersucht [13].

CHAMBERS [14] weist darauf hin, dass die ersten Messungen der magnetischen Widerstandsänderung von Elektrolytkupfer, die hier in pulsierenden Hochfeldern bei 4,2° K ausgeführt wurden [15], nicht, wie es nach der Kohler'schen Regel zu erwarten wäre, mit seinen (und BOROVIKS [16]), in Dauermagnetfeldern an hochreinen Cu-Proben vorgenommenen Messungen übereinstimmen.



Figur 9

Transversale magnetische Widerstandsänderung $\Delta q/q_0$ von Cu bei 4,2° K als Funktion von H/r_T , wobei $r_T = q_{4,2}/q_{300}$. Die eingezeichneten Kreuze zeigen die Messfehler unserer Messungen an.

Unsere Messungen (und auch eine Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Al [17]) mussten aus energetischen Gründen mit sehr kleinen Hochfeldspulen und entsprechend kleinen Proben ausgeführt werden. Es zeigte sich denn auch, dass eine neue Messung an Elektrolytkupfer Resultate lieferte, die im Kohler-Diagramm gut mit den Messungen von CHAMBERS übereinstimmen⁴⁾. Die verschiedenen Resultate sind in Figur 9 zusammengestellt. Es scheint, dass nach den verschiedenen Verbesserungen, die im Laufe der letzten Jahre an unserer Messmethode vorgenommen wurden (grössere Hochfeldspulen, längere Impulszeiten, verbesserte Kompensationsmethode), nun zuverlässige Resultate erwartet werden dürfen. Unsere Messung wurde an einer Cu-Probe von 0,88% Restwiderstandsverhältnis ($q_{4,2}/q_{300}$) bei 4,2° K in Magnetfeldern bis zu 160 000 A/cm (200 000 Oe) vorgenommen.

⁴⁾ Diese Resultate stimmen auch gut mit Messungen von DE LAUNAY und WEBBER überein, in die uns freundlicherweise vor der Veröffentlichung Einblick gewährt wurde.

Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN, Vorstand des Institutes für kalorische Apparate und Kältetechnik, der mir auch mit einigen sehr nützlichen Ratsschlägen half, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank ausdrücken. Ausserdem bin ich den Herren Dr. J. L. OLSEN und B. LÜTHI für ihre Mitarbeit beim Entwickeln dieser Apparaturen und für ihre Hilfe beim Redigieren dieser Veröffentlichung zu Dank verpflichtet. Diese Arbeit wurde aus dem «Aluminiumfonds Neuhausen» und aus dem «Arbeitsbeschaffungsfonds des Bundes» finanziert. Beiden Institutionen sei auch an dieser Stelle für die zur Verfügung gestellten Mittel gedankt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. L. KAPITZA, Proc. Roy. Soc. [A] 105, 691 (1924).
- [2] P. L. KAPITZA, Proc. Roy. Soc. [A] 115, 658 (1927).
- [3] T. F. WALL, J. Inst. elect. Engrs. 64, 745 (1926).
- [4] K. S. W. CHAMPION, Proc. phys. Soc. [B] 63, 795 (1950).
- [5] J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta 26, 798 (1953).
- [6] S. FONER und H. H. KOLM, Rev. Sci. Instr. 28, 799 (1957).
- [7] H. P. FURTH und R. W. WANIEK, Rev. Sci. Instr. 27, 195 (1956).
- [8] I. S. JACOBS und P. E. LAWRENCE, Rev. Sci. Instr. 29, 713 (1958).
- [9] G. RAOULT, Ann. Phys. 4, 369 (1949).
- [10] D. SHOENBERG, Nature 170, 569 (1952).
- [11] E. H. CULLINGTON, W. G. CHACE und R. L. MORGAN, Instr. for Geophys. Res. Nr. 5 (1955).
- [12] B. LÜTHI, wird demnächst veröffentlicht (Helv. phys. Acta).
- [13] B. LÜTHI, Phys. Rev. Letters 2, 503 (1959).
- [14] R. G. CHAMBERS, Proc. Roy. Soc. [A] 238, 344 (1956).
- [15] J. L. OLSEN und L. RINDERER, Nature 173, 682 (1954).
- [16] E. S. BOROVIK, J. exp. Theor. Phys. USSR 27, 355 (1964).
- [17] B. LÜTHI und J. L. OLSEN, Il Nuovo Cimento [X], 3, 840 (1956).
- [18] H. P. FURTH, M. A. LEVINE und R. W. WANIEK, Rev. Sci. Instr. 28, 949 (1957).

Summary

The design of an apparatus for producing very high pulsed magnetic fields using condenser discharges is discussed. Efficiency, heating and strength are investigated. The calculations are compared with experimental data on coil types producing 320 000 A/cm (400 000 Oe) for 1 ms in a volume of 0,5 cm³ and 80 000 A/cm (100 000 Oe) for 100 ms in 10 cm³. Results of magnetoresistance measurements on copper to 260 000 A/cm (325 000 Oe) at liquid nitrogen temperature and to 160 000 A/cm (200 000 Oe) at liquid helium temperature are given. In a Kohler diagram these results are in agreement with work by CHAMBERS on purer specimens in lower fields.

(Eingegangen: 27. Juni 1959.)

The Plastic Indentation of a Semi-Infinite Solid by a Perfectly Rough Circular Punch

By GEORGE EASON¹⁾ and RICHARD T. SHIELD²⁾, Newcastle upon Tyne and
Providence, R. I.

1. Introduction

Although many problems of plastic flow under conditions of plane strain have been solved, there are, as yet, few solutions to axially symmetric problems. Previous work includes solutions to the problems of the partially plastic thick-walled tube (see for example [6-3]), and the problem of converging plastic flow in a conical channel [9,7]. These problems have been solved for both the Tresca and the von Mises yield conditions.

SHIELD [8] has considered the general problem of the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry for the Tresca yield criterion and associated plastic stress-strain relations. The following work is essentially a continuation of that paper. In [8], as here, the material was assumed to be isotropic, non-hardening, rigid-plastic and a discussion was given of the types of plastic flow which could occur. The discussion and the applications in [8] showed that the plastic regimes which satisfy the hypothesis proposed by HAAR and VON KÁRMÁN [4] are of importance in the solution of axially symmetric problems. This hypothesis states that the circumferential stress is equal to one of the principal stresses in the meridional planes during plastic deformation. The problems considered under this hypothesis were the incipient necking of a circular cylinder stressed to yielding in tension, and the indentation of a semi-infinite solid by a smooth, circular flat-ended rigid punch.

In this paper, section 2 contains a résumé of the equations of [8], relevant to the present work. In section 3 a possible velocity field is obtained for the compression of a circular cylinder. In sections 4 and 5 the indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough, circular flat-ended rigid punch is considered. A complete solution to this problem is obtained by numerical methods, the numerical work being performed on the high speed digital computers AMOS and FERDINAND. The value of the average pressure over the surface of the punch is found to be $6.05 k$, where k is the maximum shearing stress permissible in the body, in contrast to the value of $5.69 k$ obtained in [8].

¹⁾ King's College, Newcastle upon Tyne.

²⁾ Brown University, Providence, R. I., USA.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 42.

for the smooth punch. The maximum numerical value of the ratio between the shearing stress τ_{rz} on the surface of the punch to the normal stress σ_z is found to be 0.139. It follows that the condition of perfect roughness between the punch and the material can be replaced by the condition that the coefficient of friction between the punch and the material must exceed 0.139 for the solution to apply.

2. The Basic Equations

The basic equations of axially symmetric plastic flow were discussed in detail in [8] for a rigid-plastic nonhardening material obeying TRESCA's maximum shear stress yield criterion. As in the application of the theory in [8], the hypothesis of HAAR and VON KÁRMÁN [4] is assumed for plastic states, i. e. the circumferential stress is taken to be equal to one of the other two principal stresses in the meridional planes. More specifically, the circumferential stress is taken equal to the algebraically greater of the other two principal stresses, as in the regions of deformation to be considered the radial velocity is positive and produces a tensile circumferential strain rate (plastic regime *F* of [8]). The Tresca yield criterion then requires the principal stresses in the meridional planes to differ by $2k$, where k is the maximum shearing stress permissible in the material. A short summary is now given of the relevant equations.

In a cylindrical polar co-ordinate system (r, θ, z) , the only non-vanishing stress components in a stress distribution which is axially symmetric about the z -axis are $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$. The circumferential stress, σ_θ , is a principal stress, the other principal stresses σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) in the meridional planes being given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) + \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) - \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

For the plastic regime under discussion we have

$$\sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_2 + 2k. \quad (2)$$

The equations of equilibrium take the forms

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (3)$$

in the absence of body forces.

Equations (2), (3) provide four equations for the determination of the four stress components so that in a sense the problem is 'statically determinate'. The system of equations is hyperbolic with orthogonal characteristics in the

(r, z) -plane which coincide with the slip-lines, the lines of maximum shearing stress. The slip-lines will subsequently be referred to as α - and β -lines.

Surface elements perpendicular to the α - and β -lines are acted upon by a shearing stress k and a normal stress which will be denoted by $-\phi$. The stress components are given by

$$\sigma_r = -\phi - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = -\phi + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{rz} = k \cos 2\varphi, \quad \sigma_\theta = -\phi + k, \quad (4)$$

where φ is the inclination of the α -line to the r -axis. The equilibrium equations (3) determine ϕ and φ , and referred to the slip-lines the equations take the forms

$$\left. \begin{aligned} d\phi + 2k d\varphi + k (\sin\varphi + \cos\varphi) \frac{ds_\alpha}{\gamma} &= 0 \text{ on an } \alpha\text{-line}, \\ d\phi - 2k d\varphi - k (\sin\varphi + \cos\varphi) \frac{ds_\beta}{\gamma} &= 0 \text{ on a } \beta\text{-line}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

where ds_α, ds_β are elements of length along the α - and β -lines.

On the axis of symmetry the shearing stress is zero and the radial and circumferential stresses are of equal magnitude, so that on the axis

$$\varphi = \frac{3}{4} \pi. \quad (6)$$

Using this result, an expansion of ϕ and φ for small r shows that in the neighbourhood of the axis of symmetry

$$\phi + 4k\varphi = \text{const on an } \alpha\text{-line}, \quad \phi - 4k\varphi = \text{const on a } \beta\text{-line}, \quad (7)$$

to first order.

The velocity field is assumed to have radial symmetry, although this does not necessarily follow from the symmetry of the stress field. If u, w are the velocities in the r, z directions respectively, the non-zero strain rates are given by

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (8)$$

with ϵ_θ a principal strain rate. The other principal strain rates ϵ_1, ϵ_2 associated with the σ_1, σ_2 directions are

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{2} (\epsilon_r + \epsilon_z) + \frac{1}{2} \{ (\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + \gamma_{rz}^2 \}^{1/2}, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{2} (\epsilon_r + \epsilon_z) - \frac{1}{2} \{ (\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + \gamma_{rz}^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

The incompressibility of the material requires, with (8) for the strain rates,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

This equation and the isotropy condition, which can be written

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}}{\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}} = -\cot 2\varphi, \quad (11)$$

serve to determine the velocity components u, w when the slip-line field is known. For numerical work it is convenient to introduce the components of velocity U, W along the α - and β -lines respectively, given by

$$U = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad W = -u \sin \varphi + w \cos \varphi. \quad (12)$$

Equations (10) and (11) on u, w require U, W to satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} dU - W d\varphi + \frac{u ds_\alpha}{2r} &= 0 \text{ on an } \alpha\text{-line}, \\ dW + U d\varphi + \frac{u ds_\beta}{2r} &= 0 \text{ on a } \beta\text{-line}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

For the velocity field to be associated with the stress field the velocities must be such that

$$\Gamma \geq \frac{u}{r} \geq 0, \quad (14)$$

where

$$\Gamma = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} + \frac{\partial W}{\partial s_\alpha} + U \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} - W \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}. \quad (15)$$

The theory outlined in this section will now be applied to obtain a deformation mode for the compression of a circular cylinder and to obtain the solution to the problem of indentation by a rough circular punch.

3. Compression of a Circular Cylinder

In section 3 of [8] several examples were given of possible incipient deformation modes for a circular cylinder of rigid-plastic material stressed to yielding in uniaxial compression. The stress component σ_z then has the value $-2k$, all other stress components being zero. In this case the characteristics are straight lines inclined at an angle of $\pi/4$ to the co-ordinate axes. The cylinder occupies the region $r \leq 1, z \geq 0$, and velocity solutions were obtained which are such that the normal velocity over the end of the cylinder, $z = 0$, is constant. Here we obtain a velocity field which satisfies the further restriction that the radial velocity u be zero over the end $z = 0$ of the cylinder.

For simplicity the normal velocity is taken to be unity over the end OA of the cylinder (Figure 1). The velocity field involves a rigid body motion of region OAC in the axial direction and flow in the region ABC . As in [8] it can be shown

testing the hardness of metals (see, for example [10]). The body is assumed to occupy the region $z \geq 0$, with the origin of co-ordinates at the centre O of the punch (Figure 2). The punch indents the portion $O.A$ of the surface of the solid, $z = 0$. The plastic stress field near the punch is assumed to satisfy (2). This assumption is shown to be correct by the fact that the solution to the problem is obtained.

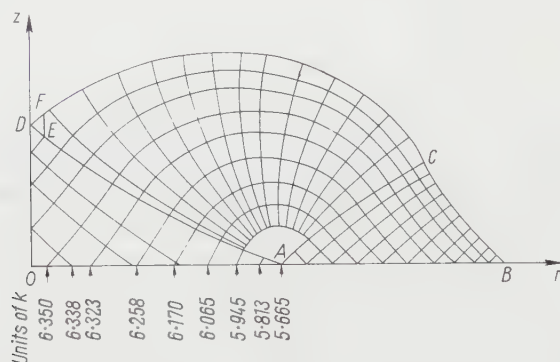


Figure 2

Slip-line field due to indentation by a rough circular punch.

Referring to Figure 2, the stress field in region ABC is determined by the stress-free surface AB . The solution for this type of region has been tabulated in [8], and the results of Table I of that paper may be applied. The line AC is an α -line and BC is a β -line. The field in region ACD is determined by the α -line AC and the singular point A , the fan being terminated by the α -line AD which meets the axis of symmetry at an angle of $\pi/4$, at D . The field in region ADO is determined by the α -line AD and the condition that the β -lines of the region meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$. The slip lines must meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$ in order that the shearing stress be zero on the axis.

The stress field in region $ACDO$ was obtained by numerical integration of (5). These differential equations were replaced by finite difference equations and the same numerical procedure used as in [8]. Equations (7) were used to determine the position of the point D . Figure 2 shows the main details of the characteristic network obtained as a result of the numerical integration. The calculated pressure distribution over the punch is shown graphically in Figure 3. The average pressure over the punch is found to be $6.05 k$. For comparison, the pressure distribution found in [8] for a smooth punch is also shown in Figure 3, the average pressure over the punch in this case is found to be $5.69 k$. With the distance OA as the unit of length, the distance OB , in Figure 2, was found to

be 1.88, and the distance OD was found to be 0.57. The angle of the fan was found to be 116° . A coefficient of friction may be defined along OA by writing

$$\mu = -\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z}. \quad (17)$$

The maximum value of μ along OA was found to occur at A and to have the value 0.139. Thus, the solution obtained here holds for a rough punch provided that the coefficient of friction between the material and the punch exceeds 0.139.

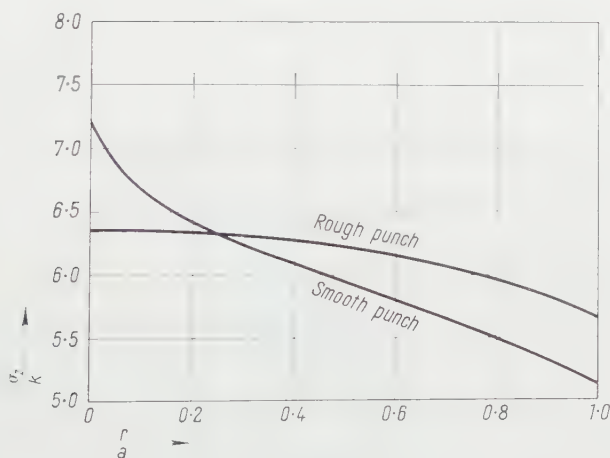


Figure 3
Pressure distribution over punch.

As in the case of the smooth punch the stress field has been extended into the rest of the body. The method of extension closely follows that used in [8] in which theorems developed by BISHOP [1] for the case of plane strain were applied.

The extension of the stress field is indicated in Figure 4, and was obtained by assuming the material to be fully plastic and satisfying (2). The β -line BCD , together with the condition that slip-lines meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$, determines the field to the left of the α -line through B . The field to the right of the α -line through B is determined by the α -line through B and terminating the field by a stress-free surface, BJK . The α -lines begin to intersect one another at G , a point on the α -line through B , and a shock is introduced, shown by the heavy line in Figure 4. Another shock is introduced at point M , where the α -lines intersect on the α -line through C . The two shocks intersect at point H , and the stress field was continued by the introduction of a shock HL , and a fan HJ of small angle (shown by the broken line in Figure 4). The stress-free

rigid body in the axial direction with the velocity of the punch. The velocity field in region $ABCD$ must satisfy the conditions that the normal velocity across AD is continuous and that the normal velocity across BCD is zero, as the region above this line is assumed to be rigid. As AD is an α -line, the first of these conditions implies W continuous across AD , so that

$$W = \cos \varphi \text{ on } AD. \quad (18)$$

Along AD the first of equations (13) holds, and with (18) this takes the form

$$dU - \cos \varphi d\varphi + (U - \sin \varphi) \frac{dr}{r} = 0. \quad (19)$$

The general solution of this equation is

$$U - \sin \varphi = \frac{A}{r^{1/2}}, \quad (20)$$

where A is a constant. To avoid an infinity in the value of U at the point D , A must be taken to be zero, so that

$$U = \sin \varphi \text{ on } AD. \quad (21)$$

Thus the velocity field is seen to be continuous across AD . A similar argument to the above shows that

$$U = W = 0 \text{ along } BCD, \quad (22)$$

so that the velocity is also continuous across BCD .

The point D is a singular point of the velocity field. Near this point the slip-lines are inclined at angles of $\pi/4$ to the co-ordinate axes, and the velocity field given by (16) may be taken to hold. This velocity field was assumed to apply in the region DEF of Figure 2. Since the velocity is now known along the lines $AFECB$, the velocities within this region may be determined by integration of (13). The point A is also a singular point of the velocity field.

The velocity field in region $AFECB$ was obtained by numerical integration of (13). The same numerical procedure was adopted as in §8, the differential equations being replaced by finite difference equations. The incompressibility of the material provides a check on the accuracy of the calculation. It was found that the flow across AB was within 1% of the flow across OA . The deformation of an initially square grid which would result if this incipient velocity field were maintained for a short interval of time is shown in Figure 5.

The velocity field must also satisfy the inequalities (14) if it is to be associated with the plastic stress field. The inequalities were checked numerically at various points of the field, a sufficient number of points being taken to ensure that the inequalities held everywhere.

The velocity field is a kinematically admissible deformation mode and application of the limit analysis theorems shows that the value $6.05 k$ is an upper bound for the indentation pressure. The value $6.05 k$ is thus the actual indentation pressure, as it is also a lower bound. A theorem due to HILL [5] states that where deformation is actually occurring the stress field is unique. Also a theorem to BISHOP, GREEN and HILL [2] states that if any region of a complete solution is necessarily rigid, then it must be rigid in all complete solutions. Application of these theorems shows that the stress field of Figure 2 in region $ABCD$ is the actual plastic stress field, and plastic deformation can only occur in region $ABCD$ of Figure 5.

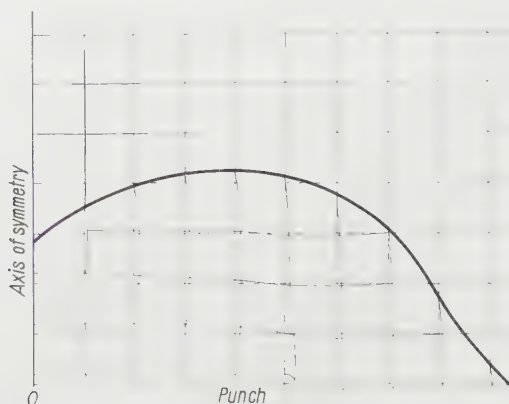


Figure 5

Resulting deformation of a square grid if the incipient velocity field were maintained for a short period of time.

REFERENCES

- [1] BISHOP, J. F. W., *J. Mech. Phys. Solids* 2, 43 (1953).
- [2] BISHOP, J. F. W., GREEN, A. P., and HILL, R., *J. Mech. Phys. Solids* 4, 256 (1956).
- [3] DRUCKER, D. C., GREENBERG, H. J., and PRAGER, W., *Quart. appl. Math.* 9, 381 (1952).
- [4] HAAR, A., and VON KÁRMÁN, TH., *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.* 1909, 204.
- [5] HILL, R., *Phil. Mag.* 42, 868 (1951).
- [6] KOITER, W. T., *Anniversary Volume in Applied Mechanics Dedicated to C. B. Biezeno* (H. Stam, Haarlem, Holland 1953), p. 233.
- [7] SHIELD, R. T., *J. Mech. Phys. Solids* 3, 246 (1955).
- [8] SHIELD, R. T., *Proc. Roy. Soc. [A]* 233, 267 (1955).
- [9] SOKOLOVSKY, V. V., *Theory of Plasticity*, 2nd ed. (Moscow State Printing House of Technical and Theoretical Literature 1950), p. 302.
- [10] TABOR, D., *The Hardness of Metals* (Clarendon Press, Oxford 1951).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden das plastische Spannungsfeld und ein zulässiges Geschwindigkeitsfeld für den eben begrenzten Halbraum gegeben, der unter dem Einfluss eines ideal rauhen, starren Stempels mit kreisförmigem Querschnitt steht. Das Material ist als starr-plastisch vorausgesetzt, ohne Verfestigung, und der Fließbedingung von TRESCA genügend. Es wird gezeigt, dass die Hypothese von HAAR und von KÁRMÁN auf dieses Problem anwendbar ist, wonach zwei von den drei Hauptspannungen gleich sind. Es wird auch eine gültige Fortsetzung des plastischen Spannungsfeldes ins starre Gebiet in der Nähe des Stempels erhalten.

(Received: May 11, 1959.)

Flow of an Electrically Conducting Fluid Past a Porous Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field

By ANADI SHANKAR GUPTA, Kharagpur, India¹)

1. Introduction

In recent years, the subject of hydromagnetics has attracted the attention of many authors in view not only of its own interest but also of its enormous applications to problems of geophysical and astrophysical significance.

The general equations of unified velocity and magnetic fields for the flow of an incompressible, viscous and electrically conducting fluid subject to a magnetic field have been derived by BATCHELOR [1]²).

In this paper, we have discussed the effect of a transverse magnetic field on the steady flow of an incompressible electrically conducting fluid past an infinite porous flat plate when the plate is subjected to either suction or injection. Exact solution has been obtained for the modified Navier-Stokes and Maxwell equations under the usual assumptions of magneto-hydrodynamics. The equation of heat transfer including viscous and Joule dissipation has also been integrated and the rate of heat transfer calculated. The corresponding problem in the absence of magnetic field has been solved by GRIFFITH and MEREDITH [2].

2. Basic Equations

The fundamental equations of hydromagnetics are:

(a) MAXWELL'S equations:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4 \pi c^2 Q}{\epsilon}, \quad (1)$$

¹) Indian Institute of Technology.

²) Numbers in brackets refer to References, page 50.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4 \pi \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu_c \mathbf{H}. \quad (5)$$

(b) OHM's law:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{B}) + Q \mathbf{q}. \quad (6)$$

(c) The equation of continuity for an incompressible fluid:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (7)$$

(d) The modified Navier-Stokes equation:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{q} = - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{1}{\varrho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{Q}{\varrho} \mathbf{E}. \quad (8)$$

Here, \mathbf{E} is the electric field, \mathbf{B} the electromagnetic induction, \mathbf{H} the magnetic field, \mathbf{j} the current density, Q the excess charge density, ε the dielectric constant, μ_c the magnetic permeability, σ the electrical conductivity and c the velocity of light. All electromagnetic quantities are measured in electromagnetic units. The quantities ε and μ_c are assumed to be uniform throughout the field.

ELSASSER [3] has pointed out that the ratio of the displacement current to the conduction current in a large class of phenomena is so small that displacement currents can be neglected entirely. In our case it is zero simply by virtue of the fact that the motion is steady. Consistent with the above assumption, the convection current $Q \mathbf{q}$ in (6) and the electric force $Q \mathbf{E}/\varrho$ due to excess charge in (8) are also ignored. In the following analysis the equations (4), (5) and (8) should be understood to have been simplified by the above assumptions.

Eliminating \mathbf{E} between (3) and (6) with the help of (2), (4) and (5), we have

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{q} \times \mathbf{H}) + \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (9)$$

where

$$\eta = \frac{1}{4 \pi \mu_c \sigma}, \quad (10)$$

which is interpreted as a magnetic diffusivity. Again elimination of \mathbf{j} between (4) and (8) gives

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{q} = - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{\mu_c}{4 \pi \varrho} (\operatorname{curl} \mathbf{H} \times \mathbf{H}). \quad (11)$$

Equations (9) and (11) together with (2) (i. e. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$) and (7) constitute the basic equations of hydromagnetics.

In the present problem, we take the coordinate origin O at any point on the infinite plate, which is assumed to be nonmagnetic and electrically non-conducting and use Cartesian co-ordinates x and y with the axis OX along the plate OY and perpendicular to it. The liquid flows past the porous plate along OX and a transverse magnetic field H_0 is applied to it.

For steady flow past an infinite plate, we can assume that all physical quantities are functions of y only. Let u and v denote the components of the vector \mathbf{q} in the directions of the co-ordinates X and Y .

The equation of continuity then becomes

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad (12)$$

which gives

$$v = v_0 = \text{const.} \quad (13)$$

The modified Navier-Stokes equation (11) then gives

$$\varrho v_0 \frac{du}{dy} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\mu_e}{4\pi} H_y \frac{dH_x}{dy}, \quad (14)$$

$$0 = -\frac{dp}{dy} - \frac{\mu_e}{4\pi} H_x \frac{dH_x}{dy}. \quad (15)$$

Again the magnetic equation (9) gives

$$\frac{d}{dy} (u H_x - v_0 H_z) + \eta \frac{d^2 H_x}{dy^2} = 0, \quad (16)$$

$$\eta \frac{d^2 H_y}{dy^2} = 0. \quad (17)$$

The boundary conditions for the velocity field are

$$y = 0: u = 0, v = v_0; \quad y \rightarrow \infty: u = U, \quad (18)$$

where U is the velocity at far distance from the plate.

The boundary conditions for the magnetic field are that both the tangential component of the magnetic field and the normal component of the magnetic induction are continuous at the plate. Since, however, both the fluid and the plate are assumed to be nonmagnetic in the present problem, the continuity condition for the magnetic induction may be replaced by that for the magnetic field itself. The total magnetic field at the plate is the vector sum of the imposed and induced fields, the latter resulting from the induced current distribution in the fluid. This distribution is obtained from the solution and is therefore unknown. On the other hand, since the velocity tends to the constant

value U asymptotically at far distance from the plate, no interactions exist there. Hence the magnetic field tends to the imposed field H_0 as $y \rightarrow \infty$. The boundary conditions for the magnetic field may therefore be taken as

$$y = 0: H_y = H_0; \quad y \rightarrow \infty: H_y \rightarrow H_0, \quad H_x \rightarrow 0. \quad (19)$$

These imply that the total flux of current in the direction OY is zero since

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \mathbf{H}.$$

3. Integration of the Equations

The solution of (17) subject to (19) is

$$H_y = \text{const} = H_0, \quad (20)$$

while (16) with $H_y = H_0$ yields on integration

$$u H_0 - v_0 H_x + \eta \frac{dH_x}{dy} = \text{const} = U H_0, \quad (21)$$

where the constant is determined from the fact that $H_x \rightarrow 0$, $dH_x/dy \rightarrow 0$ and $u \rightarrow U$ as $y \rightarrow \infty$.

Again (14) with (20) gives on integration

$$\varrho v_0 u - \mu \frac{du}{dy} + \frac{\mu_e}{4\pi} H_0 H_x + \varrho v_0 U,$$

where the constant of integration is evaluated from the fact that $u \rightarrow U$, $du/dy \rightarrow 0$ and $H_x \rightarrow 0$ as $y \rightarrow \infty$. The above equation gives

$$H_x = \frac{4\pi}{\mu_e H_0} \left[\varrho v_0 (u - U) - \mu \frac{du}{dy} \right], \quad (22)$$

which gives the induced field when the velocity field is known. Substitution of H_x from (22) in (21) gives

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{v_0}{\eta \mu} (\eta \varrho + \mu) \frac{du}{dy} - u \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4\pi \eta \mu} - \frac{\varrho v_0^2}{\eta \mu} \right) = \frac{\mu_e H_0 U}{4\pi \eta \mu} \left(\frac{4\pi \varrho v_0^2}{\mu_e H_0} - H_0 \right). \quad (23)$$

If the pressure at infinity is p_∞ , it follows from (15) that

$$p + \frac{\mu_e}{8\pi} H_x^2 = p_\infty,$$

which shows the balance between the fluid and 'magnetic pressure' because H_y has been shown to be uniform throughout the whole field.

We shall now consider two cases.

Case I: $v_0 < 0$

This case corresponds to suction at the plate. Putting $v_0 = -v$ ($v > 0$), the solution of (23) is given by

$$u = U + A \exp \left\{ \frac{\gamma}{2 \eta \mu} \left[-v (\eta \varrho + \mu) - \sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu} \right] \right\} \\ + B \exp \left\{ \frac{\gamma}{2 \eta \mu} \left[-v (\eta \varrho + \mu) + \sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu} \right] \right\}. \quad (24)$$

Clearly the expression in (24) is real for

$$v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu$$

can be written as $v^2 (\eta \varrho - \mu)^2 + \mu_e H_0^2 / \pi$, which is positive. Again when $\mu_e H_0^2 / 4 \pi > \varrho v^2$ the expression

$$\sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu}$$

becomes greater than $v (\eta \varrho + \mu)$. Hence in this case the solution (24) subject to (18) gives

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ -\frac{v \gamma}{2 v} \left[1 + \frac{v}{\eta} + \sqrt{\left(1 - \frac{v}{\eta} \right)^2 + \frac{\mu_e H_0^2 v^2}{\pi v^2 \eta \mu}} \right] \right\}. \quad (25)$$

It is convenient to define some non-dimensional parameters such as

$$\text{local Reynolds number: } Re = \frac{v \gamma}{\nu},$$

$$\text{Magnetic pressure number: } S = \frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi \varrho v^2}, \quad (26)$$

together with the non-dimensional number $R_0 = \nu / \eta$.

Hence (25) can be written as

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ -\frac{v \gamma}{2 v} \left[1 + R_0 + \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} \right] \right\}, \quad (27)$$

which reduces to the ordinary asymptotic suction profile $u/U = 1 - e^{-v y / \nu}$ of GRIFFITH and MEREDITH when $S = 0$, i. e. $H_0 = 0$. The velocity distribution given by (27) is plotted for different values of S when $R_0 = 0.5$. It is seen from the graph that the effect of increase of S , i. e. the magnetic field is to increase the velocity. The point which seems to be of some physical interest is that the magnetic field should be strong enough to satisfy $\mu_e H_0^2 / 4 \pi > \varrho v^2$ (i. e. the magnetic pressure number S based on suction velocity should be > 1) in order that an asymptotic solution of the type (26) is possible.

If, however, $\mu_e H_0^2/4\pi < \varrho v^2$, i. e. $S < 1$, then both the powers of e in (24) become negative so that the constants A and B can not be determined from the boundary conditions (18). Thus in this case the problem becomes indeterminate. The problem, however, can be made determinate by suitably changing the boundary conditions viz., by considering two parallel plates.

The skinfriction τ_w at the plate is given by

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\mu U}{2\nu} \left[1 + R_0 + \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} \right], \quad (28)$$

which increases as S increases.

Case II: $v_0 > 0$

This case corresponds to injection at the plate. Here again for $\mu_e H_0^2/4\pi > \varrho v_0^2$ the solution of (23) subject to (18) is

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ - \frac{\gamma}{2 \eta \mu} \left[v_0 (\eta \varrho + \mu) - \sqrt{v_0^2 (\eta \varrho - \mu)^2 + \frac{\mu_e H_0^2}{\pi} \eta \mu} \right] \right\}.$$

Introducing S and R_0 this can be written as

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ - \frac{v_0 \gamma}{2 \nu} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right\} \quad (29)$$

for $S > 1$. This shows that u increases with S .

The solution, however, remains indeterminate for $S < 1$ as in the previous case.

Using (29), the induced field component H_x can now be calculated from (22) as

$$H_x = \frac{-4\pi\varrho v_0 U}{\mu_e H_0} \exp \left\{ - \frac{v_0 \gamma}{2 \nu} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right\} \times \left[1 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right]. \quad (30)$$

The value at the plate is given by

$$(H_x)_0 = \frac{-4\pi\varrho v_0 U}{\mu_e H_0} (1 + \beta); \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right].$$

Using the definition of S the above equation can be written as

$$\frac{(H_x)_0}{U} \sqrt{\frac{\mu_e}{4\pi\varrho}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right]}{\sqrt{S}} = f(R_0, S), \quad (31)$$

say. Since

$$\frac{\partial}{\partial S} f(R_0, S) = - \frac{(1 - R_0) [\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} + (1 - R_0)]}{2 S^{3/2} \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0}} < 0$$

for $R_0 < 1$, it follows that the induced field decreases with increase in the magnetic pressure number. Since $S = \mu_e H_0^2 / 4 \pi \varrho v_0^2$, decrease in v_0 for a given H_0 will result in increase of S_0 . Hence it follows that the induced field at the plate decreases with decrease of the injection velocity v_0 .

4. Integration of the Equation of Heat Transfer

The equation of heat transfer including viscous and Joule dissipation (for finite electrical conductivity σ) is

$$\varrho v_0 c_v \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{j^2}{\sigma} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

where c_v is the specific heat at constant volume and λ the thermal conductivity. Since

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \mathbf{H}$$

the above equation can be written as

$$\varrho v_0 c_v \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{1}{16\pi^2 \sigma} \left(\frac{dH_x}{dy} \right)^2 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (32)$$

Substituting the values of u and H_x from (29) and (30) in (32) we get

$$\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{\varrho c_v v_0}{\lambda} \cdot \frac{dT}{dy} = - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\gamma^2}{16\pi^2 \sigma} + \frac{\mu U^2 v_0^2}{v^2} \beta^2 \right) e^{-(2v_0 \beta / v) y}, \quad (33)$$

where

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right], \quad \gamma = \frac{4\pi \varrho v_0^2 u \beta (1 + \beta)}{\mu_e H_0 v}. \quad (34)$$

The solution of (33) subject to $T = T_0$ at $y = 0$ and T finite at $y = \infty$ is given by

$$T - T_0 = \frac{\gamma^2 v^2 + 16\pi^2 \mu U^2 v_0^2 \beta^2 \sigma}{32\pi^2 \sigma v_0^2 (2\beta^2 \lambda + c_v \mu \beta)} (1 - e^{-(2v_0 \beta / v) y}). \quad (35)$$

For $\sigma = \infty$, the rate of heat transfer at the plate is given by

$$q_w = \lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \varrho U^2 v_0 \frac{\beta^2}{2\beta + \mu c_v / \lambda}.$$

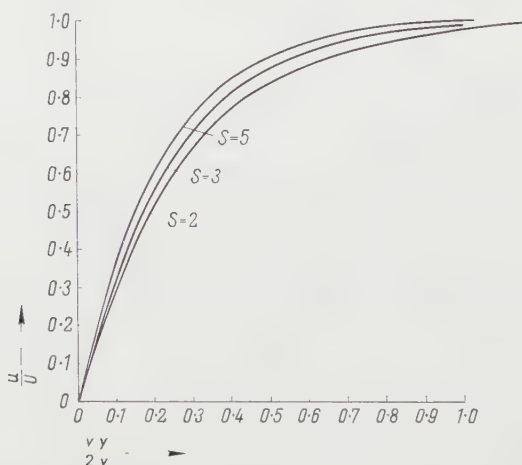
Since for an incompressible fluid, $c_p = c_v$, it follows from the above equation

that

$$\frac{q_w}{\rho U^2 v_0} = \frac{\beta^2}{2\beta + Pr} \quad (36)$$

(where Pr is the Prandtl number $\mu c_p/\lambda$), which increases as β increases.

I should like to thank Prof. B. R. SETH and Dr. G. BANDYOPADHYAY for their valuable comments.



Velocity distribution over the plate for different values of S when $R_0 = 0.5$.

REFERENCES

- [1] G. K. BATCHELOR, Proc. Roy. Soc. [A] 201, 405 (1950).
- [2] F. W. MEREDITH and A. A. GRIFFITH, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 2 (Oxford University Press), pp. 534.
- [3] W. M. ELSASSER, Rev. Mod. Phys. 28, 135 (1956).

Zusammenfassung

Für die Strömung einer inkompressiblen, zähen, elektrisch leitenden Flüssigkeit über eine poröse Platte werden die Gleichungen von NAVIER und STOKES, von MAXWELL und die Wärmeübertragungsgleichung integriert. Dabei wird vorausgesetzt, dass Flüssigkeit aus der porösen Platte austritt oder durch sie abgesogen wird. Man findet, dass sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Schubspannungen mit steigender magnetischer Druckzahl für Absaugen und Ausblasen anwachsen. Das induzierte Feld an der Plattenoberfläche wird kleiner, wenn die Ausblasegeschwindigkeit abnimmt. Für den Grenzfall unendlicher elektrischer Leitfähigkeit wächst der Wärmeübergang mit der magnetischen Druckzahl im Falle des Ausblasens.

(Received: May 20, 1959).

The Possibility of Normal Shock Waves on a Body with Convex Surfaces in Inviscid Transonic Flow

By GEORGE E. GADD, Teddington, Mddx, Great Britain¹⁾

Introduction

In inviscid transonic flow past a body with a convex surface, it can be shown by an argument essentially the same as that of ZIEREP [1]²⁾, that shock waves normal to the surface cannot occur if the Mach number upstream of the shock is close to 1, and the flow is free from singularities. It would, however, be surprising if such shocks could not, in fact, exist in inviscid flow, in view of EMMONS' relaxation solutions [2, 3] which require them. EMMONS suggested that the flow at the surface immediately downstream of the shock must have a singularity of the same kind as occurs for low-speed flow over a surface with a discontinuity in curvature. Such a flow has been considered by KOPPENFELS [4]. The present note shows, in confirmation of EMMONS' suggestion, that a simple modification of KOPPENFELS' solution appears to be applicable immediately downstream of a normal shock on a convex surface, making the occurrence of such shocks possible.

Analysis

It can be shown (see for example [5]) that the deflection angle ε of the flow passing through a shock which is inclined at an angle θ to the normal to the upstream flow, as in Figure 1, is given by

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\gamma \rho_1 \rho_1 q_1^2 M_1^2} \left[M_1^2 - 1 - \frac{(\gamma + 1)(\rho_2 - \rho_1)}{2 \gamma \rho_1} \right]}{1 + \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} - \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_1 \rho_1 q_1^2} - \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 q_1^2}}, \quad (1)$$

where suffices 1 and 2 denote conditions upstream and downstream of the shock, respectively, ρ is pressure, ρ is density, γ is the ratio of the specific heat at constant pressure to that at constant volume, M is Mach number, and q is speed. Also

$$\tan \theta = \frac{\rho_1 q_1 q_2 \sin \varepsilon}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (2)$$

The denominator of the right hand side of (1) is approximately equal to 1 if the

¹⁾ National Physical Laboratory, Department of Scientific and Industrial Research, Aerodynamics Division.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 58.

upstream Mach number is not much above 1. Hence the expression

$$S = M_1^2 - 1 - \frac{(\gamma + 1)(p_2 - p_1)}{2\gamma p_1} \quad (3)$$

cannot become negative if $\sin \epsilon$ is to be real.

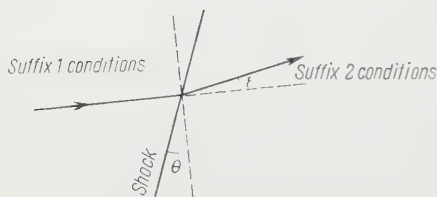


Figure 1

Flow through an oblique shock wave.

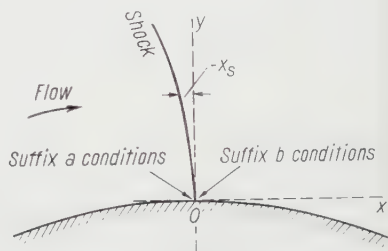


Figure 2

Shock on a curved surface.

Suppose the flow takes place over a curved boundary, and that the shock intersects the surface at a point O as in Figure 2. Let O be the origin of co-ordinates x, y parallel and perpendicular respectively to the surface at O . Denote by suffixes a and b respectively conditions at the surface immediately upstream and downstream of the shock. Then

$$I_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = I_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right),$$

where I is enthalpy. Hence since the upstream flow is isentropic, so that

$$\left(\frac{I_a}{I_1} \right) = \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma},$$

equation (3) may be written

$$S = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] + \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma} (M_a^2 - 1) - \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{p_1}. \quad (4)$$

At O , S must be zero since the flow at the surface cannot abruptly change direction and hence $\sin \epsilon$ must be 0. Since $p_1 = p_a$, $p_2 = p_b$ at the point O , the condition $S = 0$ requires

$$\frac{p_b - p_a}{p_a} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} (M_a^2 - 1). \quad (5)$$

This, of course, is the well-known relation for the pressure rise through a normal shock. From (4) it follows that at O

$$\frac{dS}{dy} = -\frac{(\gamma + 1)}{2\gamma p_a} \left(\frac{dp_1}{dy} + \frac{dp_2}{dy} \right) + \frac{(M_a^2 - 1)}{\gamma p_a} \cdot \frac{dp_1}{dy}$$

or approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma+1)}{2\gamma p_a} \left\{ \left(\frac{dp_1}{dy}\right)_0 + \left(\frac{dp_2}{dy}\right)_0 \right\} \quad (6)$$

if M_a is close to 1. This expression must not be negative if S is not to become negative for small values of y .

Let $x_s(y)$ denote the x -coordinate of the shock wave. Thus if the shock is concave to the oncoming stream, as shown in Figure 2, x_s is negative. Then

$$\frac{dp_1}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 \frac{dx_s}{dy} \quad (7)$$

and

$$\frac{dp_2}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 \frac{dx_s}{dy} \quad (8)$$

From (7)

$$\left(\frac{dp_1}{dy}\right)_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a \quad (9)$$

because at 0, $dx_s/dy = 0$, the shock being perpendicular to the boundary. However $(dp_2/dy)_0$ may not be equal to $(\partial p/\partial y)_b$, since $(\partial p/\partial x)_b$ may be infinite and the product $(\partial p/\partial x)_b (dx_s/dy)_0$ may accordingly be non-zero. It is possible to relate $(\partial p/\partial x)_b$ to the shape of the shock near 0, as follows.

The equations of momentum and continuity are

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (11)$$

and

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

where u and v are the velocity components in the x and y -directions. Since the Mach numbers upstream of the shock are not much above 1, p/ρ^γ is virtually constant downstream of the shock, as well as being exactly constant upstream of it. Hence the flow is approximately isentropic and irrotational everywhere, and for the downstream flow the continuity equation becomes at 0

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b + \frac{u_b}{\gamma p_b} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b + \frac{v_b}{\gamma p_b} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b = 0.$$

Since $v_b = 0$ it follows from the momentum equations that $(\partial p/\partial x)_b = -\rho_b u_b (\partial u/\partial x)_b$ and $v_b (\partial p/\partial y)_b = 0^3$, so that

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b = -\frac{1}{(1-M_b^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b \quad (13)$$

³ It can be verified that these relations are true both when $x_s \propto y^{3/2}$ for small values of y , as ZIEREP assumed would be the case for flow over a concave surface, and also when the downstream flow has a singularity of the type investigated by KOPPELFELS and considered below.

and

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_b = \frac{q_b u_b}{(1 - M_b^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b. \quad (14)$$

Now

$$\frac{dv_2}{dy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2 \frac{dx_s}{dy}$$

so that at O where $dx_s/dy = 0$,

$$\left(\frac{dv_2}{dy}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b. \quad (15)$$

Also, from Figures 1 and 2 it can be seen that $v_2 = u_2 (\varepsilon + \theta - dx_s/dy)$ and $v_1 = u_1 (\theta - dx_s/dy)$, so that $v_2 = u_2 v_1/u_1 + u_2 \varepsilon$, and

$$\left(\frac{dv_2}{dy}\right)_0 \simeq \frac{u_b}{u_a} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_a \pm u_b \frac{2(M_a^2 - 1)}{(\gamma + 1) M_a^2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy}\right)_0 \quad (16)$$

by equations (1), (3), and (5). Also since $dx_s/dy = \theta - v_1/u_1$, it follows from equations (1) to (3) that

$$\frac{dx_s}{dy} \simeq \pm \frac{q_2}{q_1} S^{1/2} - \frac{v_1}{u_1}. \quad (17)$$

Hence from equations (6), (8), (9), (14), (15) and (16) it follows that approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma + 1)}{2\gamma p_a} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b\right] - \left(S^{1/2} \frac{dS^{1/2}}{dy}\right)_0$$

since $M_a^2 - 1 \simeq 1 - M_b^2$ and $M_b^2 p_b u_b \simeq M_a^2 p_a u_a$ if M_a is not much above 1. Hence

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma + 1)}{3\gamma p_a} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b\right]. \quad (18)$$

If the boundary past which the flow takes place is denoted by $y = h(x)$, then $h(0) = h'(0) = 0$ and in the vicinity of O , $h(x) = h''(0) x^2/2$. Hence on the boundary close to O , $v \simeq h''(0) x u_a \simeq h''(0) x u_b$, and from equation (11),

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq -q_a u_a^2 h''(0) \simeq -q_b u_b^2 h''(0).$$

It seems, therefore, at first sight that both $(\partial p/\partial y)_a$ and $(\partial p/\partial y)_b$ must be approximately equal to $-q_a u_a^2 h''(0)$. Equation (18) thus gives approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = \frac{2(\gamma + 1) h''(0)}{3}.$$

If the surface is convex to the stream, $h''(0)$ is negative, so that $(dS/dy)_0$ is negative, and this, as pointed out above, is incompatible with the shock relations. Thus it follows from (17) that for small values of y

$$\frac{dx_s}{dy} = \pm \left(\frac{2(\gamma + 1)}{3} h''(0) y\right)^{1/2}, \quad (19)$$

which is imaginary when the surface is convex. It might seem, therefore, that normal shocks cannot occur on convex curved surfaces.

However it is possible to envisage a singularity in the downstream flow of such a kind that $(\partial p / \partial y)_b$ is not equal to $-\varrho_a u_a^2 h''(0)$ even though $\partial p / \partial y \simeq -\varrho_a u_a^2 h''(0)$ when $y = 0$ and x is very small but non-zero. Such a flow would be similar to the low-speed flow considered by KOPPENFELS [4], past a wall with a discontinuity in curvature, as in Figure 3. The velocity components close to the discontinuity

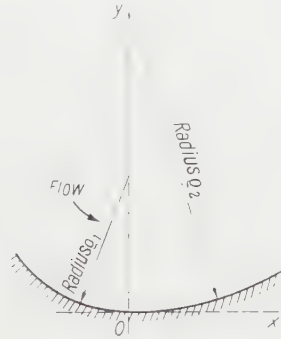


Figure 3
Boundary with a discontinuity in curvature.

approximate, according to KOPPENFELS' solution, to the form

$$\frac{u}{u_b} = 1 - 2(c_1 + c_2)x \log_e c_3 (x^2 + y^2)^{1/2} + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{y}{x} \right] y \quad (20)$$

and

$$\frac{v}{u_b} = 2(c_1 + c_2)y \log_e c_3 (x^2 + y^2)^{1/2} + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{y}{x} \right] x, \quad (21)$$

where c_1 , c_2 , and c_3 are constants with the dimension $(\text{length})^{-1}$. It may easily be verified that these relations satisfy the condition for irrotational flow, $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$, as well as the continuity condition $du / \partial x = -\partial v / \partial y$. For $y = 0$, $v / u_b = 2\pi c_2 x$, when x is positive, and $v / u_b = 2\pi(c_1 + 2c_2)x$ when x is negative, whilst $u \simeq u_b$ for small positive or negative values of x . Hence (20) and (21) represent a flow past a wall with a radius of curvature equal to $\varrho_1 = 1/2\pi(c_1 + 2c_2)$ for small negative values of x , and a radius $\varrho_2 = 1/2\pi c_2$ for small positive x , as shown in Figure 3.

This solution may readily be extended to a case where compressibility is important. Consider the relations

$$\frac{u}{u_b} = 1 - \frac{2(c_1 + c_2)x}{(1 - M_b^2)^{1/2}} \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2)y^2]^{1/2} + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right] y \quad (22)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \frac{v'}{u_b} &= 2 (c_1 + c_2) (1 - M_b^2)^{1/2} y \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2) y^2]^{1/2} \\ &2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right] x. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

These are of course related to the incompressible forms (20) and (21) by the ordinary Prandtl-Glauert rule; this would not normally be valid for transonic flow with M_b close to 1, but it is so sufficiently close to the origin in the present case because of the boundary conditions on v and because of the logarithmic terms. The irrotational condition $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$ is still satisfied, whilst $\partial u/\partial x = -(\partial v/\partial y)/(1 - M_b^2)$. Thus condition (13) is satisfied, and it is therefore possible that relations (22) and (23) may represent conditions downstream of the shock. For $y = 0$, $v/u_b = 2\pi c_2 x$ when x is positive, as for the low-speed solution. Thus the radius of curvature of the surface downstream is equal to $\varrho_2 = 1/2\pi c_2$, where a positive value of ϱ_2 means that the surface is concave to the stream as in Figure 3. If, then, the equation to the boundary is $y = h(x)$, as before, $\varrho_2 = 1/h''(0)$ and

$$c_2 = \frac{h''(0)}{2\pi}. \quad (24)$$

There are two other disposable constants, c_1 and c_3 , and of these c_1 may be found as follows.

Conditions denoted by suffix b in the earlier analysis can now be considered to be the limiting values obtained by setting $x = 0$ in the appropriate quantities derived from equations (22) and (23), and then making y very small. Hence, since from equations (15) and (16),

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b \simeq \pm u_b \frac{2(M_a^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_a^2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy} \right)_0,$$

it follows that

$$\frac{dS^{1/2}}{dy} = \pm \frac{(\gamma + 1)M_a^2}{(M_a^2 - 1)} (c_1 + c_2) (1 - M_b^2)^{1/2} \log_e c_3 (1 - M_b^2)^{1/2} y,$$

for vanishingly small y . Thus $S^{1/2} \propto y \log_e c_3 (1 - M_b^2)^{1/2} y$, and

$$\frac{dS}{dy} = 2S^{1/2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy} \right) \rightarrow 0$$

as $y \rightarrow 0$. Hence from equation (18),

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_b = 0.$$

But from equation (11)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_a = -\varrho_a u_a^2 h''(0)$$

whilst

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_b = -\varrho_b u_b^2 (3\pi c_2 + \pi c_1),$$

since downstream of the shock close to O

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq -2 \varrho_b u_b^2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right]$$

by (11), (22), and (23). Hence, since $\varrho_b u_b^2 \simeq \varrho_a u_a^2$,

$$3 \pi c_2 + \pi c_1 = -h''(0)$$

and from (24),

$$c_1 = \frac{5}{2 \pi} h''(0). \quad (25)$$

Thus, if $h''(0)$ is negative, as it is for a convex surface, the downstream flow is effectively the same as flow past a boundary of the shape shown in Figure 4, with

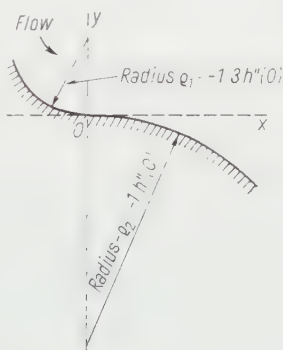


Figure 4

Equivalent boundary for the downstream flow.

$\varrho_1 = 1/2 \pi (c_1 + 2 c_2) = -1/3 h''(0)$, and $-\varrho_2 = -1/h''(0)$. However the solution only applies, of course, to the shock-wave case for positive values of x .

The x -component pressure gradient downstream of O can easily be shown from (10), (22) and (23) to be

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2 \varrho_b u_b^2}{(1 - M_b^2)^{1/2}} (c_1 + c_2) \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2) y^2]^{1/2}.$$

Hence along the surface

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4 \varrho_b u_b^2}{\pi (1 - M_b^2)^{1/2}} h''(0) \log_e c_3 x \quad (26)$$

by (24) and (25). If the surface is convex (26) shows that the pressure diminishes very rapidly along the surface downstream of the shock, although at the shock the full normal-shock pressure rise is attained. This is in line with EMMONS' relaxation solutions.

Thus the argument that normal shocks cannot occur on a convex surface is shown to be inconclusive. It has still not been established of course that they *can* exist, though EMMONS' work would suggest this. If they can exist, it seems quite

likely that relations (22) to (26) would be valid not only for convex surfaces, where $h''(0) < 0$, but also for concave surfaces. In other words equation (19) may be invalid even for concave surfaces. A more elaborate investigation, considering the second derivatives of quantities along the shock wave, would be necessary to settle this point.

Acknowledgment

The work described above was carried out in the Aerodynamics Division of the National Physical Laboratory, and is published by permission of the director of the laboratory.

REFERENCES

- [1] J. ZIEREP, *Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 764 (1958). See also supplement to the above, Z. angew. Math. Phys. 10, 429 (1959).
- [2] H. W. EMMONS, *The Theoretical Flow of a Frictionless, Adiabatic, Perfect Gas Inside of a Two-Dimensional Hyperbolic Nozzle*, N.A.C.A. Tech. Note 1003 (1946).
- [3] H. W. EMMONS, *Flow of a Compressible Fluid Past a Symmetrical Airfoil in a Wind Tunnel and in Free Air*, N.A.C.A. Tech. Note 1746 (1948).
- [4] W. V. KOPPENFELS, *Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung*, Luftfahrtforschung 17 (7), 189–195 (1940). Translated as: *Two-Dimensional Potential Flow Past a Smooth Wall with Partly Constant Curvature*, N.A.C.A. Tech. Memo. 996 (1941).
- [5] G. E. GADD, *The Interaction Between a Weak Normal Shock Wave and a Turbulent Boundary Layer*, A.R.C. C.P. 424 (June 1957).

Zusammenfassung

Es zeigt sich, dass in der Tat senkrechte Stosswellen an einem Körper mit konvexen Oberflächen bei reibungsfreier transsonischer Strömung auftreten können, wenn diese Strömung unmittelbar stromabwärts des Stosses eine Singularität besitzt und diese zur Singularität in der Strömung über eine Grenzfläche mit Krümmungsdiskontinuität ähnlich ist.

(Received: July 2, 1959.)

Numerical Solutions of the Van der Pol Equation

By WASLEY S. KROGDAHL, Lexington, Kentucky, USA¹⁾

It is well known that the Van der Pol equation

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} (1 - x^2)$$

has limit cycle solutions for all $\mu \geq 0$ [3, 4]²⁾. The period, amplitude, and certain other parameters of the limit cycle solutions are known in asymptotic form in the limit of very small or very large μ [5, 6]. However, the characteristics of the solutions for intermediate values of μ are to be had only by obtaining the limit cycle solutions numerically. The desirability of obtaining them has been pointed out by LEFSCHETZ [2].

The solutions for integral μ from 1 to 10 inclusive have been obtained by numerical integration using GILL's modification [1] of the Runge-Kutta method. The computations were carried out on the IBM 650 calculator of the Northwestern University Computing Center. Subsequent independently programmed check calculations were made on the 650 calculator of the University of Kentucky Computing Center.

The limit cycle in each case was identified as that solution whose half-period amplitude was equal to the initial amplitude. The half-period was determined as the value of the independent variable t at the first zero of $\dot{x} = dx/dt$, the integration having been started in each instance at a trial amplitude $x(0) = a_0$, where $\dot{x}(0) = 0$.

The results are contained in the three graphs and Table 1. The first graph is a plot of x as a function of t , the different curves corresponding to the indicated values of μ . Similarly, the second graph shows \dot{x} against t , the 'velocity' as a function of 'time'. The third graph is the phase plane diagram of each solution over a half cycle.

Table 1 compares the computed amplitudes a_0 and semi-periods $P_0/2$ with the same quantities calculated from the asymptotic formulae for large μ . To obtain some notion of the accuracy of the computed values, certain additional calculations were made. Thus, sample calculations were re-run using a double integration interval. Negligible differences in the two solutions indicate that the original interval was sufficiently small that truncation errors are of no consequence. On the other hand, by transforming the independent variable to $\tau = \mu t$, we are assured of negligible truncation errors but, because of the μ -fold increase in number of steps, an estimate of the round-off error becomes possible. Only a coincidental compensation of the two sources of error could lead to the same solutions, and that for probably no more than one value of μ . Such considerations offer reason to think the computed values correct to as many figures as given.

The formulae used for the asymptotic values are

$$a^* = 2.0 + 0.779369 \mu^{-4/3} - \frac{16}{27} \cdot \frac{\log \mu}{\mu^2} - 0.8762 \mu^{-2} + O(\mu^{-8/3}) \quad (2)$$

and

$$\frac{P^*}{2} = 0.806853 \mu + 3.50716 \mu^{-1/3} - \frac{11}{9} \cdot \frac{\log \mu}{\mu} + 0.00435 \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}) \quad (3)$$

¹⁾ University of Kentucky.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 63.

Table 1

μ	a_0	a^*	$a_0 - a^*$	$\frac{P_0}{2}$	$\frac{P^*}{2}$	$\frac{1}{2} (P_0 - P^*)$
0	2.0			3.14159		
1	2.00862	1.90317	0.10545	3.33164	4.31836	-0.98672
2	2.01989	1.98755	0.03234	3.81493	3.97593	-0.16100
3	2.02330	2.01044	0.01286	4.42973	4.40616	+0.02357
4	2.02296	2.01664	0.00632	5.10184	5.01428	0.08756
5	2.02150	2.01796	0.00354	5.80621	5.69272	0.11349
6	2.01983	2.01765	0.00218	6.53061	6.40692	0.12369
7	2.01813	2.01678	0.00135	7.26901	7.14223	0.12678
8	2.01667	2.01577	0.00090	8.01814	7.89125	0.12689
9	2.01536	2.01474	0.00062	8.77507	8.64984	0.12523
10	2.01428	2.01377	0.00051	9.53817	9.41542	0.12275

It can be seen that in view of the relatively low order of approximation of the asymptotic formulae, for μ as small as 10 the agreement between asymptotic and computed values is surprisingly good.

Supplementary computations of solutions in the neighborhood of the limit cycle solutions were also carried out to investigate numerically the behavior of the 'period' as a function of 'amplitude'. When the true amplitude a_0 had been determined, additional solutions were obtained for the initial conditions $\dot{x} = 0$ and $x_0 = a = 0.9 a_0, 0.95 a_0, 1.05 a_0$, and $1.1 a_0$. The first subsequent zero of \dot{x} was taken to define the 'semi-period' to be associated with the 'amplitude' a just as the true semi-period $P_0/2$ is associated with the true amplitude a_0 . Table 2 summarizes these results.

The content of Table 2 may be brought out more clearly by using it to construct the quantity $y = P/P_0 - 1$ as a function of $z = 20(a/a_0 - 1)$. The data are sufficient that one may fit to them a quartic in z . Thus, let

$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4,$$

y being zero at $z = 0$. The coefficients α, β, γ , and δ computed from Table 2 are given in Table 3 as a function of μ . Because α is positive (and in all cases larger than β), it is evident that larger initial amplitudes than the limit cycle amplitude give longer periods. Moreover, because α increases with μ , a given increase of initial amplitude produces a greater increase in period for large μ than for small.

This result implies consequences of interest for mechanical systems whose motion is described by the van der Pol equation. Thus, suppose that such a system is subject to occasional impulsive perturbations. The effect of such perturbations is to cause the system to describe a solution associated with some new initial amplitude; the system moves abruptly from one solution of the family of solutions whose parameter is a_0 to some other solution whose parameter is $a_0 + \Delta a$. The first point to be noted is that even if the frequency distribution in Δa is symmetric, because $\beta > 0$ there is in the long run a greater lengthening of the period than shortening. The mean period of the perturbed system is therefore greater than the 'true' period as given by the appropriate value of μ .

Table 2
 P/P_0

a/a_0 μ	0.90	0.95	1.05	1.10
1	0.928842	0.962222	1.042216	1.088842
2	0.857791	0.925179	1.081959	1.170813
3	0.811063	0.900063	1.107907	1.224469
4	0.779769	0.884685	1.125451	1.260820
5	0.757797	0.873236	1.137823	1.286481
6	0.741754	0.864865	1.146879	1.305274
7	0.729642	0.858546	1.153727	1.319491
8	0.720264	0.853645	1.159044	1.330534
9	0.712819	0.849755	1.163264	1.339299
10	0.706802	0.846609	1.166678	1.346393

Table 3

μ	$10^6 \alpha$	$10^6 \beta$	$10^6 \gamma$	$10^6 \delta$
1	+ 39996	+ 2222	+ 1	− 3
2	78435	3567	− 45	+ 2
3	103513	4432	− 40	2
4	120423	5066	− 40	2
5	132334	5528	− 41	2
6	141049	5870	− 42	2
7	147633	6135	− 43	2
8	152743	6343	− 44	2
9	156799	6508	− 45	2
10	+ 159989	+ 6641	− 46	+ 2

Secondly, the increase of β with μ implies that this effect is exaggerated with increasing μ . This has bearing, for example, upon systems such as the sequence of unstable stars, ranging from the very regular short-period cepheids at one extreme to the very irregular and extremely long-period novae at the other. If we assume that their radial oscillations are described to a first approximation by the van der Pol equation we may conclude that though small μ corresponds to the short-period cepheids and large μ to the novae, the parameter value associated with the latter may be considerably less than is required by the value of the observed mean period alone.

Thirdly, the 'regularity' of any such mechanical systems must be greater when μ is small than when μ is large since a given Δa has less effect on account of the smaller α . This is reflected in nearly perfectly cyclical behavior of cepheids, the approach to the irregularity of relaxation oscillations by the U Geminorum stars and repeating novae.

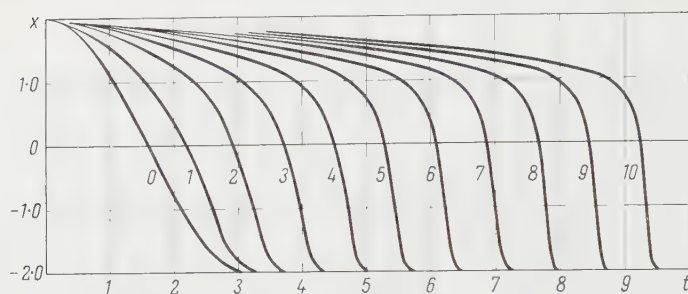


Figure 1

Periodic solutions of the Van der Pol equation over half periods. Each curve is identified by the respective parameter value.

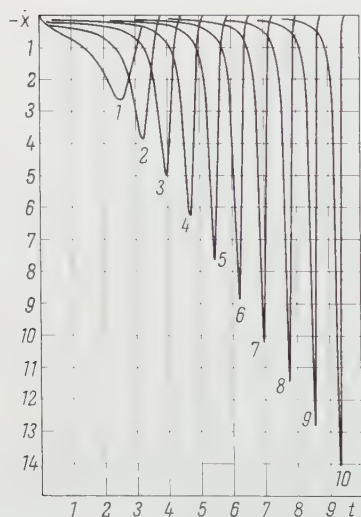


Figure 2

Derivative of the periodic solutions of the Van der Pol equation over half periods. Curves are identified by their respective Van der Pol parameters.

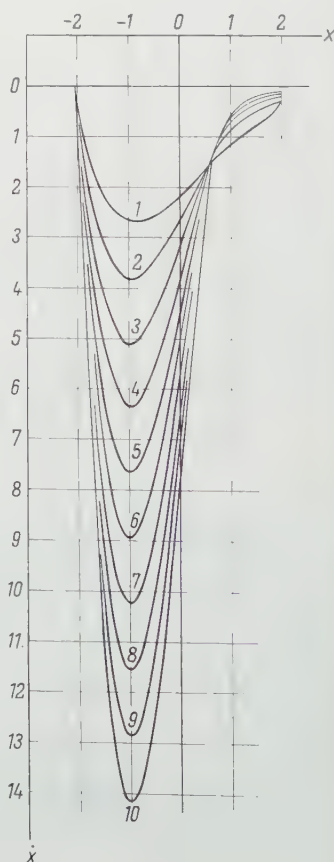


Figure 3

Lower half of the phase plane diagrams of the limit cycle solutions of the Van der Pol equation for parameter values $\mu = 1, 2, \dots, 10$.

It is a pleasure to acknowledge the generous and invaluable assistance of Dr. D. L. HARRIS III of the Northwestern University Computing Center and of Mr. RONALD GORDON of the University of Kentucky. I wish also to make grateful acknowledgment of funds from the National Science Foundation under grant NSF-G-5008 for that portion of the work done at Northwestern University.

REFERENCES

- [1] S. GILL, *A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine*, Proc. Camb. phil. Soc. 47, 96 (1951).
- [2] S. LEFSCHETZ, *Numerical Calculations in Nonlinear Mechanics*, in *Problems for the Numerical Analysis of the Future*, Nr. 15 (1951), Applied Mathematics Series (National Bureau of Standards), p. 10.
- [3] N. MINORSKY, *Introduction to Non-Linear Mechanics* (Edwards, 1947), pp. 113–115.
- [4] A. ANDRONOW and C. CHAIKIN, *Theory of Oscillations* (S. Lefschetz, ed., Princeton, 1949), p. 343.
- [5] J. STOKER, *Nonlinear Vibrations* (Interscience, 1950), p. 134.
- [6] A. DORODNITSYN, *Asymptotic Solution of the Van der Pol Equation*, Prikl. Mat. Mekh., Inst. Mech. Acad. Sci. USSR. 11, 313 (1947).

Zusammenfassung

Die Amplitude und Periode der periodischen Lösungen der van der Polschen Gleichung sind für sehr kleine und für sehr grosse Werte des Parameters μ durch asymptotische Entwicklungen annähernd bekannt. Für endliche Werte von μ werden die Resultate von numerischen Integrationsmethoden mitgeteilt, und der Anschluss an die asymptotischen Werte wird diskutiert. Ausserdem werden Störungen der Differentialgleichung betrachtet.

(Received: July 2, 1959.)

Plate Thermometer

By DAVID MEKSYN, London, Great Britain¹⁾

1. Introduction

The problem of a plate thermometer was first considered by POHLHAUSEN [1,²). The equation of energy is reduced to an ordinary linear differential equation with known coefficients, and the temperature function is expressed as a double integral. This integral was first evaluated numerically by POHLHAUSEN for several moderate values of Prandtl number σ , and later by ECKERT and DREWITZ [2] for many values of σ , up to $\sigma = 1000$.

For moderate values of σ (< 100) the numerical evaluations lead to satisfactory results, but for larger σ the errors begin to increase, and for $\sigma = 1000$ the result is grossly in error (up to 20%). The double integral becomes very slowly

¹⁾ Mathematics Department, Royal College of Science.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 68.

convergent, as σ increases, and it would require several hundred terms to give a moderately satisfactory result for $\sigma = 1000$.

The aim of the present paper is to indicate a simple method of evaluation of this integral, which leads to satisfactory results, as follows.

The independent variable is changed, and the integral is expressed as a power series, depending on σ ; the first few terms (~ 10) are evaluated in the usual way; the remaining terms are transformed by making use of STIRLING'S formula, and the sum is then transformed into an integral by making use of EULER-MACLAUREN'S equation. The final result, which consists of few terms, is expressed in gamma functions.

2. The Equation of Energy

Fluid flows past a semi-infinite plate, placed in the direction of the main flow; the velocity and the temperature of the main flow are U_0 and T_0 respectively; there is no heat transfer between the plate and the fluid.

The problem consists in finding the temperature of the plate, in this case we have to take into account the heat generated by friction.

The equation of energy is [3]

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \sigma f \frac{d\theta}{d\eta} + 2\sigma \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 = 0, \quad (2.1)$$

where

$$T = T_0 + \frac{U_0^2}{2c_p} \theta, \quad \eta = \left(\frac{U_0}{2\nu x} \right)^{1/2} y;$$

the boundary conditions are

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \infty. \quad (2.2)$$

$f(\eta)$ is a solution of BLASIUS' equation

$$f''' + f f'' = 0, \quad (2.3)$$

and it satisfies the boundary conditions

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (2.4)$$

The solution of (2.1), which satisfies the boundary conditions, is

$$\theta(\eta) = 2\sigma \int_{\eta}^{\infty} (f'')^{\sigma} d\eta \int_0^{\eta} (f'')^{2-\sigma} d\eta. \quad (2.5)$$

Now [4]

$$f'' = a e^{-F(\eta)}, \quad (2.6)$$

where

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta;$$

whence

$$\theta(\eta) = 2\sigma a^2 \int_{\eta}^{\infty} e^{-\sigma F} d\eta \int_0^{\eta} e^{(\sigma-2)F} d\eta, \quad (2.7)$$

where

$$F(\eta) = \frac{a \eta^3}{3!} - \frac{a^2 \eta^6}{6!} + \frac{11 a^3 \eta^9}{9!} - \frac{375 a^4 \eta^{12}}{12!} + \dots,$$

$$a = 0.4696.$$

3. Transformation of the Integral

We have to find $\theta(0)$, where

$$\theta(0) = 2 \sigma a^2 \int_0^\infty e^{-\sigma F} d\eta \int_0^\tau e^{(\sigma-2)F} d\eta. \quad (3.1)$$

A glance at (3.1) shows that the integral becomes very slowly convergent for large σ .

To evaluate (3.1), it is transformed by putting

$$F(\eta) = \tau; \quad (3.2)$$

inverting (3.2) and transforming $\theta(0)$ to the τ variable, we find

$$\theta(0) = 2 \sigma a^2 \int_0^\infty e^{-\sigma \tau} \frac{d\eta}{d\tau} d\tau \int_0^\tau e^{(\sigma-2)\tau} \frac{d\eta}{d\tau} d\tau; \quad (3.3)$$

from (2.7), (3.2) follows [4] that

$$\eta = \left(\frac{6}{a}\right)^{1/3} \left\{ \tau^{1/3} + \frac{\tau^{4/3}}{60} - \frac{\tau^{7/3}}{1260} + \frac{23 \tau^{10/3}}{891000} - \dots \right\}. \quad (3.4)$$

Making use of (3.4), where only the first two terms are retained, expanding the inner integral in powers of τ and integrating in gamma functions, we find

$$\theta(0) = C \sigma^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right) (3n+1)} \left[\left(\frac{\sigma+2}{\sigma}\right)^n + \frac{\binom{2n}{3} n}{15 \binom{2n}{3}} \cdot (\sigma+2)^{n-1} \right], \quad (3.5)$$

where

$$C = \frac{2}{3} a^2 \left(\frac{6}{a}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.088.$$

The first ten terms can be easily evaluated; to find the sum of the remaining terms we transform the coefficients by making use of the asymptotic expansion of the gamma function, and then transform the sum into an integral by making use of EULER-MACLAUREN'S formula.

Consider the coefficient

$$a_n = \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n+1) (3n+1)}; \quad (3.6)$$

by making use of the asymptotic expansion [5]

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-1/2} \left\{1 + \frac{1}{12x} + \dots\right\}, \quad (3.7)$$

where only the dominant term is retained, we obtain

$$a_n = \frac{e^{1/3} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n+1/6}}{n^{4/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}. \quad (3.8)$$

Now,

$$\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = \exp\left\{n \log\left(1 + \frac{2}{3n}\right)\right\} \approx e^{2/3} \left(1 - \frac{2}{9n}\right). \quad (3.9)$$

Transforming similarly the remaining factors we find

$$a_n = \frac{1 - \frac{4}{9n}}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{4/3}}; \quad (3.10)$$

the expression in (3.5) depending on σ becomes

$$\left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n \left[1 + \frac{n(2n-1/3)}{15\left(n-\frac{2}{3}\right)(\sigma-2)}\right] \approx \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)}\right]. \quad (3.11)$$

Combining (3.10), (3.11) we obtain for the sum (3.5)

$$\frac{1}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sum_{n=n_1}^{\infty} \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n}\right] \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n n^{-4/3}. \quad (3.12)$$

For large σ we can put

$$\left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)\right] \approx e^{-n\varepsilon}, \quad (3.13)$$

where

$$\varepsilon = \frac{2}{\sigma}.$$

We transform now the sum (3.12) into an integral by making use of EULER-MACLAUREN's formula [5].

$$\int_a^{a+\tau\omega} F(x) dx \approx \omega \left[\frac{1}{2} F(a) + F(a+\omega) + F(a+2\omega) + \dots + \frac{1}{2} F(a+\tau\omega) \right]; \quad (3.14)$$

in our case $\omega = 1$; whence

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n} \right] \left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^n &= \frac{1}{2n_1^{4/3}} \left[1 + \frac{2n_1}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n_1} \right] \\ &\left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^{n_1} + \int_{n_1}^{\infty} \left(n^{-4/3} - \frac{4}{9} n^{-7/3} - \frac{2}{15(\sigma-2)} n^{-1/3} \right) e^{-\varepsilon n} dn. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Integrating by parts, we find

$$\left. \begin{aligned} \int_{n_1}^{\infty} \dots &= \frac{3}{n_1^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{9n_1} + \frac{\varepsilon}{3} \right) e^{-\varepsilon n_1} \\ &- 3\varepsilon^{1/3} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\sigma}{45(\sigma-2)} \right] \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \gamma\left(\frac{2}{3}, \varepsilon n_1\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

where γ is the incomplete gamma function

$$\left[\gamma\left(\frac{2}{3}, \sim\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right];$$

finally

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= 1.088 \sigma^{1/3} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n_1-1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{(3n+1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n+1)} \right. \\ &\cdot \left[\left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^n - \frac{\left(2n - \frac{1}{3}\right)n}{15\left(n - \frac{2}{3}\right)} + \frac{(\sigma-2)^{n-1}}{\sigma^n} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(n_1 - \frac{2}{3}\right)}{(3n_1-1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n_1-1)} \\ &\cdot \left[\left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^{n_1} + \frac{\left(2n_1 - \frac{1}{3}\right)n_1}{15\left(n_1 - \frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{(\sigma-2)^{n_1-1}}{\sigma^{n_1}} \right] \\ &\left. + 0.2462 \int_{n_1}^{\infty} \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

where (3.12)

$$0.2462 = \frac{1}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

In the table are given a few of the results obtained (the current values are indicated in parentheses):

σ	15	100	300	1000	∞
$\theta(0)$	3.6	7.8 (7)	11.6 (10)	17.9 (14)	$1.9 \sigma^{1/3}$

REFERENCES

- [1] E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.* 1, 115 (1921).
- [2] E. ECKERT and O. DREWITZ, *Luftfahrtforschung* 19, 187 (1942).
- [3] H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, 3rd ed. (Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958).
- [4] D. MEKSYN, *Proc. Roy. Soc. [A]* 237, 543 (1956).
- [5] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. (Cambridge University Press, 1949).

Zusammenfassung

Das Doppelintegral, das mit der Temperatur eines Plattenthermometers zusammenhängt, konvergiert langsam bei grossen Werten der Prandtl-Zahl σ . Es wird eine Methode angedeutet, um dieses Integral für alle nicht zu kleinen Werte von σ auszurechnen. Bei $\sigma = 1000$ ist der ausgerechnete Wert ungefähr 20% grösser, als gewöhnlich angenommen wird.

(Received: July 20, 1959.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Réunion d'automne de la Société Suisse de Physique dans le cadre de la 139^e assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles, à Lausanne le 12 septembre 1959

Compte rendu des communications de physique et de mathématiques appliquées

Ein stabiler Thermostat zur Messung des Rauschens und des Drifts von Halbleiter-Schaltelementen. Von E. BALDINGER und A. MAIER, Basel¹⁾.

Messungen des Rauschens und des Drifts von Halbleiter-Schaltelementen sind sowohl von praktischem als auch von theoretischem Interesse. Praktisch geben sie Aufschluss über die in Schaltungen erreichbare Genauigkeit, theoretisch liefern sie Aussagen über die Halbleiter selbst. Speziell mit den Vorgängen an deren Ober-

¹⁾ Institut für angewandte Physik, Universität Basel.

fläche ist der «excess noise» verknüpft, dessen Spektrum im bisher untersuchten Frequenzgebiet (oberhalb etwa 10^{-4} Hz) mit $(1/f)^n$ verläuft, wobei n , je nach dem Objekt, in der Regel zwischen 1 und 1,5 liegt²⁾. Bei genügend tiefen Frequenzen kann man eine Abweichung von diesem Verlauf erwarten³⁾, deren Lage und Art weiteren Aufschluss über das Oberflächenrauschen liefern würde.

Entsprechende Messungen von Rauschspannungen erfordern, unter Berücksichtigung des Temperaturkoeffizienten, dass die Temperatur der Objekte über mehrere Tage auf etwa 1 mGrad konstant gehalten wird. Im folgenden soll ein Thermostat beschrieben werden, der diesen Anforderungen genügt und der auch ganz allgemein als Präzisionsthermostat verwendbar ist.

Aufbau

Der thermostierte Raum besteht aus einem gerührten 20-Liter-Ölbad, dem innern Thermostaten, der wärmeisoliert (0,5 W/Grad) in einem zweiten, dem äussern Thermostaten, eingeschlossen ist. Letzterer reduziert die Schwankungen der Raumtemperatur um den Faktor 400, wird aber durch elektrische Zuleitungen und die mechanische Antriebswelle (Plexiglas) zwischen Aussenraum und innerem Thermostaten zu einem geringen Teil überbrückt.

Die Festlegung der Temperatur des inneren Thermostaten erfordert die Mittel der Präzisionsthermometrie. Abgesehen von den Temperaturfixpunkten, die sich für Thermostatregelung nicht unmittelbar eignen, gelten als genaueste Instrumente im fraglichen Temperaturgebiet um 30 °C die Platin-Widerstandsthermometer.

Im vorliegenden Thermostaten wird ein 100- Ω -Pt-Thermometer verwendet, das in einer Brückenschaltung mit 0,1 V Wechselspannung von 1000 Hz gespiesen wird. Die Ausgangsspannung der Brücke wird verstärkt, in einer dem Ringmodulator ähnlichen Schaltung gleichgerichtet und zur Steuerung der Heizung benützt. Die gesamte Schaltung hat eine Bandbreite von etwa 0,5 Hz. Sie ist voll transistorsiert.

Temperaturkonstanz

Die verstärkte und gleichgerichtete Ausgangsspannung der Brücke ist ein Mass für die Temperatur des Thermostaten. Aus ihrer Registrierung lässt sich dessen *zeitliche Konstanz* ermitteln (Tabelle 1). Allerdings bleiben auf diese Art gewisse Effekte, wie etwa eine Veränderung des Pt-Thermometers selbst, unbemerkt. Solche Erscheinungen können nur durch Verwendung mehrerer voneinander unabhängiger Temperaturregistrierungen aufgedeckt werden.

Tabelle 1
Temperaturschwankungen im Thermostaten

Beobachtungsdauer	Quadratischer Mittelwert der Temperaturschwankung	Maximale Abweichung von der mittleren Temperatur
10 min	0,02 mGrad	$\pm 0,06$ mGrad
100 h Dauerbetrieb	0,06 mGrad	$\pm 0,15$ mGrad

²⁾ R. H. KINGSTON, J. appl. Phys. 27, 114 (1956).

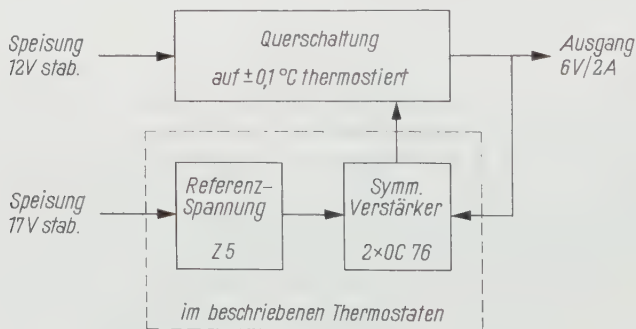
³⁾ A. L. MCWHORTER, *Semiconductor Surface Physics*, edited by R. H. KINGSTON (Philadelphia 1957), S. 209.

Das Temperaturfeld im innern Thermostaten ist notwendig inhomogen, sobald in dessen Innenraum Wärme zugeführt wird. Bei einer Wärmezufuhr von 1,8 W und einer Rührgeschwindigkeit von 130 U./min ergab sich in einer provisorischen Messung eine Temperaturdifferenz von 3 mGrad zwischen Zentrum und Rand. Bei der Untersuchung von Objekten kleiner Leistung wird man normalerweise mit etwa einem Zehntel dieser Heizleistung auskommen und infolgedessen nur mit 0,3 mGrad Temperaturdifferenz rechnen müssen.

Ein störender Nebeneffekt des Rührens ist zu beachten. Der Wärmeübergang von den geheizten Elementen an das Ölbad hängt von der Grösse der Oberfläche und der Strömungsgeschwindigkeit des Öls ab. Letztere ist durch das Rühren Schwankungen unterworfen, welche sich, besonders stark bei kleiner Oberfläche, in Schwankungen des Wärmeübergangs und damit der Temperatur der geheizten Elemente auswirken. So resultiert zum Beispiel in einer Intermetall-Zener-Diode Z 6 bei 60 mW Leistung eine mittlere Temperaturschwankung von 5 mGrad. Dieser Effekt lässt sich dadurch stark reduzieren, dass die Zener-Diode mit Woodschem Metall in einen 20-cm³-Messingzylinder eingegossen wird. Man profitiert dabei sowohl von der grossen Oberfläche als auch von der örtlichen und zeitlichen Mittelung.

Experimente

Im Rahmen unserer Untersuchung über stabilisierte Transistornetzgeräte wurden die temperaturempfindlichen Teile einer Querschaltung in den beschriebenen Thermostaten gebracht. Die Schaltung ist eine für diesen Versuch leicht modifizierte Ausführung (Figur 1) eines bereits beschriebenen⁴⁾ Gerätes. Die Abänderung besteht



Figur 1

Blockschema des untersuchten Netzgerätes.

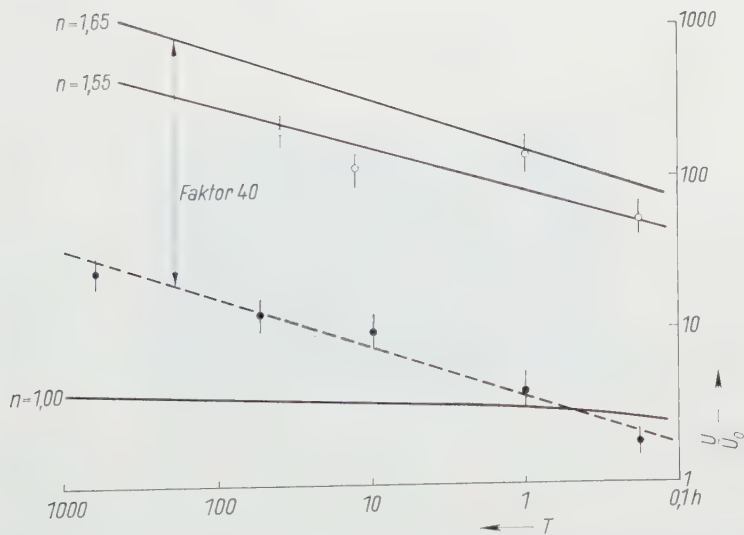
in der Hauptsache darin, dass die Referenzspannung direkt von einer Zener-Diode Z 5 abgenommen wird, die ihrerseits über eine Zener-Dioden-Vorstabilisierung aus einer hinreichend stabilisierten Spannungsquelle gespeist wird. – Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

⁴⁾ E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9a, 291 (1958).

Tabelle 2

Rauschen und Drift des stabilisierten Transistornetzgerätes nach Figur 1, sowie des eingebauten symmetrischen Gleichstromverstärkers. Zum Vergleich sind entsprechende Werte für einen Autoakkumulator angegeben

	Netzgerätausgang brutto	Gleichstromverstärker allein, auf dessen Eingang bezogen	Akkumulator 6 V / 80 Ah, unbelastet
Rauschspannung quadratischer Mittelwert über 650 s mit 1 Hz oberer Bandgrenze . . .	5 μ V	1,2 μ V	<0,3 μ V
Drift über 1 Monat	1,6 μ V/h	0,6 μ V/h	150 μ V/h

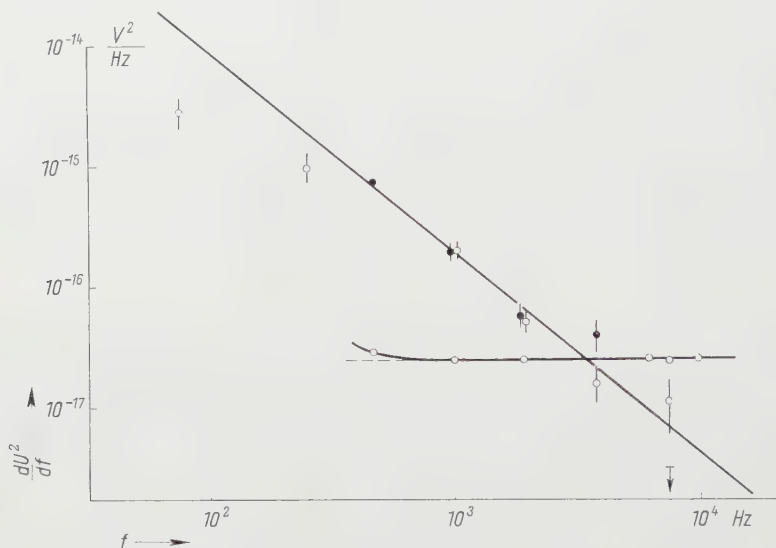


Figur 2

Rauschmessungen bei extrem tiefen Frequenzen: \circ Zener-Diode Z 5 der Referenzspannung; \bullet Transistorpaar OC 76 aus dem symmetrischen Verstärker (Messungen auf dessen Eingang bezogen). U ist die quadratisch gemittelte Rauschspannung, gemessen während der Zeit T mit einer oberen Bandgrenze von 1 Hz. Die Bezugsspannung U_0 berechnet sich aus dem «excess noise» bei 470 Hz (vgl. Figur 3). Die ausgezogenen Linien geben, mit verschiedenem n , den Verlauf von $(U/U_0)^2$ für ein $(1/f)^n$ -Spektrum, das bei 470 Hz an die Tonfrequenzmessungen anschliesst. Die angegebenen Fehlergrenzen sind mittlere Fehler.

Das Rausch-Spektrum von Halbleiter-Schaltelementen

Die erwähnten Experimente waren so angelegt, dass sie direkt Aussagen über das Rauschen der Zener-Diode Z 5 (Referenzspannung) und der beiden Transistoren OC 76 (Eingangsstufe symmetrischer Verstärker) bei tiefen Frequenzen zulassen (Zener-Strom 5 mA; Emitterströme je 0,6 mA). Diese Aussagen wurden mit Rauschmessungen im Tonfrequenzgebiet verglichen (Figuren 2 und 3).



Figur 3

Rauschspektren im Tonfrequenzgebiet: ○ Zener-Diode Z 5 der Referenzspannung (einschliesslich weisses Rauschen), $U_0 = 0,04 \mu\text{V}$; ● Transistorpaar OC 76 aus dem symmetrischen Verstärker (Messungen auf dessen Eingang bezogen, weisses Rauschen subtrahiert), $U_0 = 0,59 \mu\text{V}$, $n = 1,65$; ○ weiterer Transistor OC 76 (weisses Rauschen subtrahiert), bei 470 Hz auf gleiche Rauschspannung normiert wie ●.

Die Ordinate dU^2/df ist die spektrale Dichte des Quadrates der Rausch-Spannung.

$$U_0 = \left(\sqrt{\frac{dU^2}{df}} \right)_{f=470 \text{ Hz}}$$

charakterisiert die Grösse des «excess noise» bei 470 Hz. Die angegebenen Fehlergrenzen sind mittlere Fehler.

Zur Auswertung der Messungen bei tiefen Frequenzen ist folgendes zu bemerken. Es wurde jeweils während eines Zeitraumes T die entsprechende Spannung wiederholt in etwa gleichen Zeitabständen gemessen und durch einen geeigneten linearen Gang approximiert. Die Abweichung der Messpunkte von der resultierenden Geraden wurde daraufhin quadratisch gemittelt. Die Wahl dieser Auswertart geschah in der Meinung, dass dabei sowohl ein Drift als auch die im Intervall T vorwiegend linearen Beiträge von Frequenzen $< 1/2 T$ weitgehend verschwinden, so dass man das so ermittelte Rauschen mit einer für vorliegende Zwecke hinreichenden Ge-

nauigkeit dem Integral über das Rauschspektrum von $f_u = 1/2 T$ bis $f_0 = 1$ Hz gleichsetzen darf.

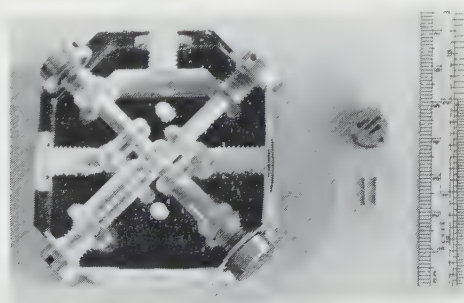
Die Messungen an der Zener-Diode deuten auf die Existenz eines einheitlichen $(1/f)^n$ -Spektrums mit $n = 1,55$. Die Messungen an den Transistoren zeigen nicht dasselbe einheitliche Bild. Sowohl im Tonfrequenzgebiet als auch bei extrem tiefen Frequenzen verläuft das Spektrum wie $(1/f)^n$ mit $n = 1,65$, doch differieren die absoluten Beträge der entsprechenden Rauschquadrate um den Faktor $(40)^2 = 1600$. Der Übergang, der nach diesen Messungen zwischen 0,5 kHz und etwa 1 mHz stattfinden muss, ist in der Messung eines in der Schaltung nicht verwendeten OC 76 bei 250 Hz und 75 Hz angedeutet.

Für die Rauschmessungen im Tonfrequenzgebiet sei Herrn BILGER unser herzlicher Dank ausgesprochen. Der «Kommission zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung» des Bundes danken wir für die Finanzierung der Untersuchungen.

Über die Möglichkeit digitaler hydraulischer Elemente. Von H. GLÄTTLI und H. R. MÜLLER, Zürich⁵⁾.

Elementare Überlegungen zeigen, dass hydraulische Schaltelemente Ansprechzeiten der Grössenordnung Millisekunden gestatten. Hierbei sind ein Druck von etwa 5 atü, ein Hub von 2 mm und eine Länge der beschleunigten Säule von 20 cm angenommen.

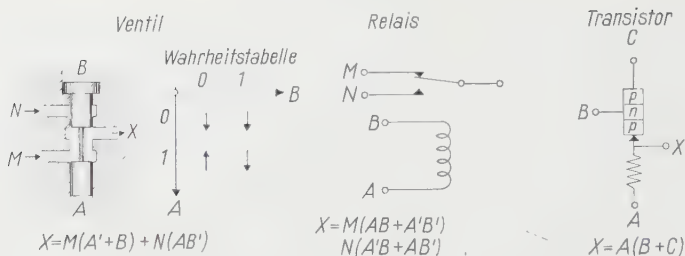
Figur 1 zeigt 2 hydraulische Multivibratoren, die sich nur bezüglich Grösse, nicht aber durch ihr Arbeitsprinzip unterscheiden. Die Frequenz des kleinen Multivibrators liegt etwa 4mal höher als die des grösseren.



Figur 1
Geometrisch ähnliche hydraulische Multivibratoren.

Die Frequenz eines Multivibrators stellt sich so ein, dass die Verstärkung 1 beträgt. Als Verstärkung bezeichnen wir das Verhältnis zwischen aufzuwendender und steuerbarer Energie in einem bestimmten Zeitintervall. In einem Fall betrachten wir die Energie, die notwendig ist, um ein Ventil innerhalb einer vorgegebenen Zeit (Ansprechzeit) auszusteuern. Im zweiten Fall betrachten wir die Energie, die von einem angesteuerten Ventil in derselben Zeit kontrolliert werden kann.

⁵⁾ IBM-Forschungslaboratorium.



Figur 2

Hydraulisches logisches Element und entsprechende elektrische logische Elemente.

Figur 2 zeigt ein hydraulisches logisches Grundelement und die entsprechenden elektrischen logischen Grundelemente Transistor und Relais. Die Wahrheitstabelle definiert die Stellung des Ventils als Funktion der Drucke A und B .

Durch Fixieren oder Parallelschalten von einzelnen Eingängen können Unterfunktionen mit $(n - 1)$, $(n - 2)$, ... usw. Variablen erzeugt werden. Diese Methode gestattet mit ein und demselben Element mehrere logische Funktionen zu erzeugen.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl Unterfunktionen verschiedener Elementarschaltungen.

	Transistor	Ventil	Relais
Funktionen mit 4 Variablen	—	1	1
Funktionen mit 3 Variablen	1 (4)	7	7
Funktionen mit 2 Variablen	3 (4)	4	6

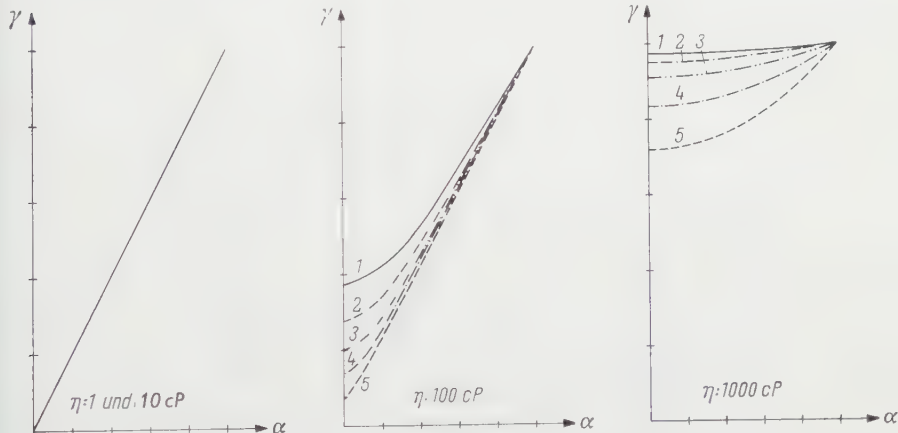
Die eingeklammerten Grössen in der Transistorkolonne haben nur Bedeutung, wenn wir wahlweise das eine oder andere Grundelement zulassen (pnp - oder nnp -Transistor, Kollektor- oder Emitterbasisschaltung). Hingegen kommt ihnen nur wenig Bedeutung zu, wenn wir Mikroprogrammierung vorsehen. Der Transistor ist dem hydraulischen logischen Element und dem Relais bezüglich Schaltzeit einige Grössenordnungen überlegen. Der Anwendungsbereich hydraulischer logischer Elemente dürfte sich deshalb auf Anwendungen mit relativ geringer Steuergeschwindigkeit beschränken.

Die Frage der Miniaturisation betrifft vor allem die Schaltzeit, das Volumen und die Antriebsenergie. Die Reduktion des Volumens ist offensichtlich, während Antriebsenergie und Schaltzeit wesentlich von den Voraussetzungen, wie Viskosität und Toleranzen, abhängen. Die Untersuchungen beschränken sich auf die Schaltzeit. Den Berechnungen wurde die Annahme zugrunde gelegt, dass alle 3 Dimensionen um den gleichen Faktor α reduziert werden. Vernachlässigen wir die Reibung, so ist die Zeitreduktion proportional α , wie eine einfache Rechnung zeigt. Führen wir die Reibungen ein, so ist das Problem nur noch numerisch lösbar. Die numerischen Rechnungen wurden auf einer IBM 650 durchgeführt.

Figur 3 zeigt den Zeitreduktionsfaktor γ (Verhältnis zwischen neuer Schaltzeit t und ursprünglicher Schaltzeit t_0) in Abhängigkeit von α .

Der Einfluss der Reibung macht sich erst bei der für Hydraulikanwendung ungewöhnlich hohen Zähigkeit von 100 cP bemerkbar. Bemerkenswert ist dabei noch die Tatsache, dass die Reibungsverluste in der Scherströmung zwischen Kolben und Bohrung die viskosen Verluste der Laminarströmung um mindestens eine Grössenordnung übertreffen.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden:
Hydraulische logische Elemente gestatten Schaltzeiten der Grössenordnung Millisekunden. Sowohl logisch wie auch bezüglich der Betätigungsenergie besteht grosse Ähnlichkeit mit Relais. Miniaturation erhöht die Schaltgeschwindigkeit. Die Verwendbarkeit hoch viskoser Flüssigkeiten verringert weitgehend die auftretenden Toleranzprobleme.



Figur 3
Zeitreduktionsfaktor γ als Funktion von α . Druck 1 atü, Parameter: Hub. 1 6,4 mm; 2 3,2 mm; 3 1,6 mm; 4 0,8 mm; 5 0,4 mm.

Détermination des paramètres \bar{h}_{12} et \bar{h}_{22} de transistors. Par R. DESSOU-LAVY et B. SECRÉTAN, Lausanne⁶⁾.

I. Introduction

- 1. Symboles et schéma équivalent du transistor à jonction dans le montage émetteur commun (figure 1):
- 2. Définitions:

$$h_{12} = \frac{I_1}{I_2 I_1 0}, \quad h_{22} = \frac{I_2}{I_2 I_1 0}.$$

En très basse fréquence (~ 100 Hz) ces 2 grandeurs sont réelles et valent approximativement:

$$h_{12} = \frac{R_2}{R_3}, \quad h_{22} = \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3}.$$

⁶⁾ Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne. Laboratoire d'Electronique.

Nous montrons dans ce qui suit la possibilité de déterminer ces valeurs par des mesures à une fréquence supérieure (~ 1 kHz) grâce à une méthode de neutralisation.

3. Méthodes de mesure. Nous ne donnerons sur les figures 2, 3 et 4 que le circuit équivalent pour l'alternatif. Il va de soi que pour les mesures, des sources de polarisation adéquates doivent être prévues.

a) Mesure directe des courants et tensions alternatives \bar{I}_2 , \bar{U}_1 et \bar{U}_2 selon la figure 2 (pour la mesure $I_2 R_V = \infty$, pour celle de $U_1 R_A = 0$).

Les courbes *a* des figures 5 resp. 6 montrent la dépendance de h_{12} resp. h_{22} en fonction de la fréquence. On constate qu'à 1 kHz, même déjà à 300 Hz, on mesure des valeurs nettement différentes de celles obtenues en très basse fréquence (~ 100 Hz). Ceci s'explique par le couplage capacitif entre B' et C (cf. figure 1) dû à C_3 .

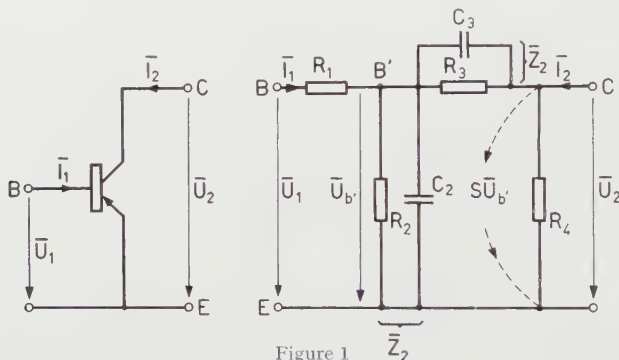


Figure 1

Transistor à jonction: définition des courants et tensions et schéma équivalent pour de faibles signaux.

b) Mesure en pont à 1 kHz selon les figures 3 et 4.

Les courbes *a* des figures 7 resp. 8 représentent la tension de déséquilibre U_D du pont en fonction des résistances d'équilibrage R_b resp. R_c . On constate qu'à la fréquence utilisée de 1 kHz la tension U_D ne s'annule pas mais passe par un minimum d'ailleurs très peu marqué. Ceci provient du fait que \bar{U}_1 et \bar{U}_2 ne sont pas en phase dans la mesure de \bar{h}_{12} et que l'admittance inconnue \bar{h}_{22} est complexe.

II. Neutralisation

1. Principe: La neutralisation consiste à faire circuler dans R_1 et \bar{Z}_2 un courant de phase opposée à celle du courant dû à C_3 . La méthode classique utilisée ici est de connecter une capacité de neutralisation C_n (C'_n) entre la base et une source de tension $-\bar{U}_2$ (en pointillé sur les figures 2, 3 et 4).

2. Détermination de \bar{h}_{12} . Hypothèses:

$$a) Z_2 \ll Z_3, \quad b) |R_1 + \bar{Z}_2| \ll \frac{1}{\omega C_n}, \quad c) \omega C_2 R_2 \ll 1.$$

On trouve pour h_{12} :

$$\bar{h}_{12} \cong \frac{R_2}{R_3} [1 + \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n)] + j \omega \left[R_2 C_3 - C_n (R_1 + R_2) - \frac{C_2 R_2^2}{R_3} \right].$$

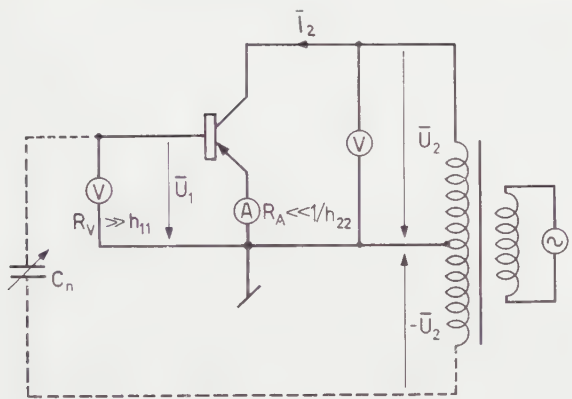


Figure 2
Mesure directe des paramètres h_{12} et h_{22} . En pointillé: neutralisation.

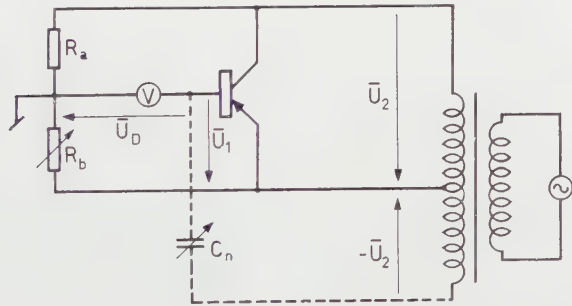


Figure 3
Détermination de h_{12} par une mesure en pont. En pointillé: neutralisation.

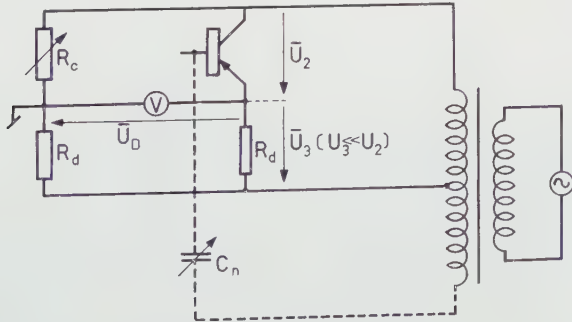


Figure 4
Détermination de h_{22} par une mesure en pont. En pointillé: neutralisation.

La neutralisation aura lieu lorsque

$$\operatorname{Im} \{\bar{h}_{12}\} = 0, \quad C_n = \frac{R_2}{R_1 + R_2} C_3 \left(1 - \frac{C_2 R_2}{C_3 R_3}\right).$$

Pour cette valeur de C_n

$$h_{12} \cong \frac{R_2}{R_3}$$

à condition que

$$\varepsilon = \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n) \ll 1.$$

3. Détermination de \bar{h}_{22} . On a facilement

$$\bar{h}_{22} = \frac{1}{R_4} + S \frac{\bar{U}_b'}{\bar{I}_2'}.$$

En admettant les mêmes hypothèses que pour h_{12} on trouve:

$$h_{22} \sim \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3} [1 + \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n')] + j \omega S [(C_3 - C_n') R_2 - C_2 \frac{R_2^2}{R_3}].$$

La neutralisation aura lieu lorsque

$$\operatorname{Im} \{\bar{h}_{22}\} = 0,$$

d'où

$$C_n' = C_3 \left(1 - \frac{C_2 R_2}{C_3 R_3}\right),$$

a leur pour laquelle h_{22} vaudra

$$h_{22} \cong \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3}$$

à condition que

$$\varepsilon' = \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n') \ll 1.$$

III. Résultats expérimentaux

Les mesures ont été effectuées sur des transistors OC 71 au germanium du type courant. Pour $i_c = 1$ mA et $u_{ce} = -5$ V on a obtenu avec un exemplaire plutôt défavorable les résultats suivants:

Sur la base de mesures complémentaires nous avons déterminé pour ce transistor les éléments de la figure 1:

$$\begin{array}{llll} R_1 = 260 \, \Omega, & R_2 = 1,5 \, \text{k}\Omega, & R_3 = 5,8 \, \text{M}\Omega, & R_4 = 200 \, \text{k}\Omega, \\ C_2 = 14 \, \text{nF}, & C_3 = 69 \, \text{pF}, & C_n \cong 56 \, \text{pF}, & C_n \cong 59 \, \text{pF}, \\ S = 40 \, \text{mA/V}, & & & \end{array}$$

Figure 5

Variation de h_{12} en fonction de la fréquence. Mesure selon schéma de la figure 2. *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

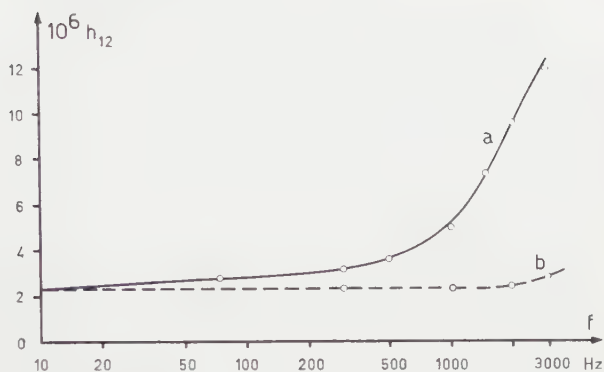


Figure 6

Variation de h_{22} en fonction de la fréquence. Mesure selon schéma de la figure 2. *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

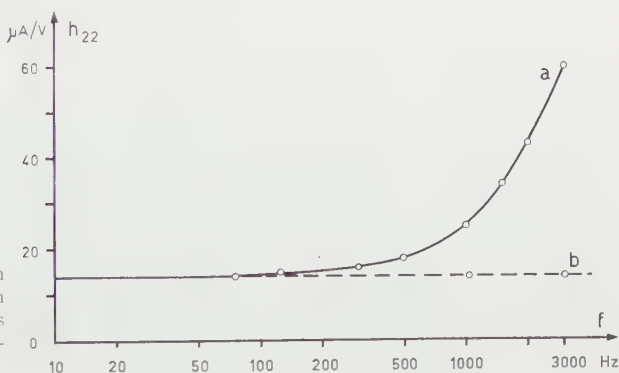
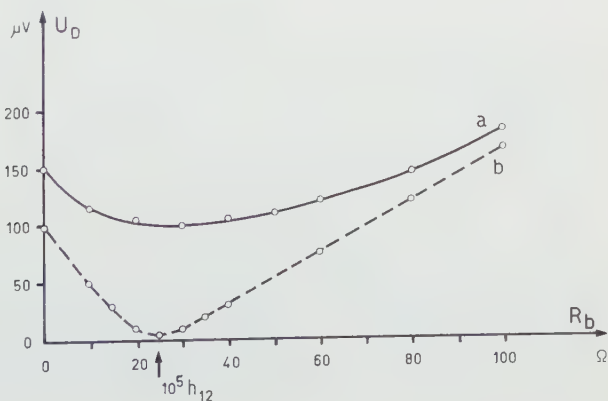


Figure 7

Mesure de h_{12} au pont selon le schéma de la figure 3. Tension U_D en fonction de la résistance d'équilibrage R_b ($R_a = 100\text{ k}\Omega$; $U_2 = 0,5\text{ V}$). *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.



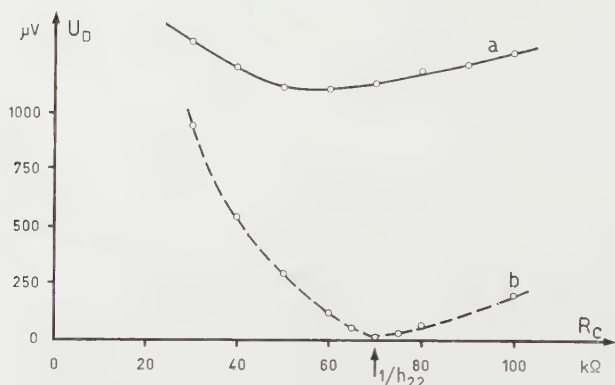


Figure 8

Mesure de h_{22} au pont selon le schéma de la figure 4. Tension U_D en fonction de la résistance d'équilibrage R_C ($R_d = 100 \Omega$; $U_2 = 0,5 \text{ V}$). a sans neutralisation; b avec neutralisation.

IV. Conclusion

Les mesures confirment le fait que l'on peut mesurer à 1 kHz grâce à la neutralisation les valeurs recherchées de h_{12} et h_{22} pour les très basses fréquences. Les erreurs systématiques ε et ε' restent dans des limites encore acceptables ($\varepsilon = 6\%$ et $\varepsilon' = 5\%$). Enfin cette méthode de neutralisation permet de calculer C_3 à partir de C_n si l'on connaît R_1 , R_2 , R_3 et C_2 .

International Symposium on Active Networks and Feedback Systems

New York, April 19-21, 1960

The Microwave Research Institute of the Polytechnic Institute of Brooklyn announces that the tenth of its annual International Symposia will be held at the Engineering Societies Building, 33 West 39 Street, New York, New York, Tuesday through Thursday, April 19-21, 1960. The papers given will include the following topics:

Physical Realizability of Active Networks,
Representation and Synthesis of Active Networks,
Synthesis of Feedback Networks,
Time Varying Systems,
Applications of Active Network Theory to Electron Devices,
Applications of Active Network Theory to Feedback Systems.

Correspondence should be addressed to: Professor HERBERT J. CARLIN, Microwave Research Institute, 55 Johnson Street, Brooklyn 1, New York.

JEROME FOX

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Festschrift für Alexander M. Ostrowski. 1. und 2. Teil. Archiv der Mathematik 5, Fasc. 1–3 und 4–6 (Verlag Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1954). 521 S., 40 Abb.; Fr. 60.–.

Der fünfte Band des Archives der Mathematik erschien – einem schönen Brauch folgend – als Festschrift zu Ehren von Prof. ALEXANDER M. OSTROWSKI, der am 25. September 1953 seinen 60. Geburtstag beging. Eine grosse Zahl von Freunden, Kollegen und Schülern aus der ganzen Welt widmeten dem verdienten Mathematiker und geschätzten Lehrer kleinere oder grössere Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und demonstrierten damit auch das umfassende Wirken des Jubilars. Die Arbeiten entstammen vorwiegend der reinen Mathematik; doch finden sich darunter auch eine Reihe von Untersuchungen aus der angewandten Mathematik oder solche, die direkt oder indirekt zu ihr Bezug haben und damit speziell auch den Leser der ZAMP interessieren werden. Die beiden Teile dieser ausgezeichneten Festschrift umfassen 70 Arbeiten, so dass es unmöglich ist, hier auf sie einzeln einzugehen.

E. ROTH-DESMEULES

Applied Mathematics and Mechanics (Prikladnaia matematika i mekhanika). Translation Editor: GEORGE HERRMANN (Pergamon Press Inc., New York und London). Erscheint zweimonatlich, jährlich etwa 1200 Seiten. Jahresabonnement \$ 35.

Es ist bekannt, dass die russische wissenschaftliche Literatur – abgesehen von den Referaten – in der westlichen Welt vielfach wenig oder verspätet beachtet wird. Der Grund für diesen Zustand ist wohl in erster Linie in den sprachlichen Schwierigkeiten («language barrier») zu suchen; ausserdem sind manche Zeitschriften nur schwer zugänglich. Dabei ist die Zahl der hier interessierenden russischen Zeitschriften, Nachrichtenblätter und Berichte beachtlich: ein halbes Dutzend für Mathematik, ein Dutzend für Physik, etwa drei Dutzend für Technik (zum Teil sehr stark spezialisiert), wozu noch eine Anzahl von Zeitschriften in einer der Sprachen der Unionsrepubliken kommen. Für den Forscher und Wissenschaftler im Westen stellt es jedenfalls eine erhebliche Erleichterung dar, wenn ihm wenigstens die wichtigsten Zeitschriften in einer Übersetzung zugänglich sind.

Zu den bedeutenden russischen Zeitschriften gehört die «Prikladnaia matematika i mekhanika», die nun seit 1958 vom Pergamon Institute (New York) im Auftrage der American Society of Mechanical Engineers und mit Unterstützung der National Science Foundation übersetzt und herausgegeben wird. Diese Zeitschrift, von der gegenwärtig (1959) der 23. Band erscheint, umfasst das Gebiet der angewandten Mathematik und der Mechanik (fester, flüssiger und gasförmiger Körper), entspricht also etwa der ZAMP. Um einen Einblick in das Arbeitsgebiet und die behandelten Probleme zu geben, seien hier wenigstens die Titel der zum Teil recht bemerkenswerten Arbeiten der vorliegenden ersten Nummer der Übersetzung (Band 22, Nr. 1) vermerkt:

N. N. KOCHINA and N. S. MEL'NIKOVA, *Strong Point-Blasts in a Compressible Medium*. V. A. EGOROV, *On the Solution of a Degenerate Variational Problem and the Optimum Climb of a Cosmic (Space) Rocket*. I. A. KURTSVEIL', *On Generalized Ordinary Differential Equations Possessing Discontinuous Solutions*. V. I. ZUBOV, *On a Method of Investigating the Stability of a Null-Solution in Doubtful Cases*. I. B. CHELPANOV, *Oscillations of a System with a Relay of Advancing Characteristics*. B. A. BERG,

Deformational Anisotropy. I. I. KADASHEVICH and V. V. NOVOZHILOV, *The Theory of Plasticity Which Takes into Account Residual Microstresses.* D. D. IVLEV, *On the General Equations of the Theory of Ideal Plasticity and of Statics of Granular (Pulverulent) Media.* V. D. KLIUSHNIKOV, *On Plasticity Laws for Work-Hardening Materials.* L. A. SHAPOVALOV, *The Influence of Non-Uniform Heating on the Stability of a Compressed Bar.* V. I. MOSSAKOVSKII, *Pressure of a Circular Die (Punch) on an Elastic Half-Space, Whose Modulus of Elasticity Is an Exponential Function of Depth.* V. V. KELDYSH, *Application of Slender Body Theory to the Calculation of Aerodynamic Properties of Low Aspect Ratio Wings with Nacelles at Their Tips.* G. N. KOPYLOV, *Aerodynamic Characteristics of Thin Wedge-Shaped Profiles in Transonic Flows.* S. MANOLOV, *A Special Case of the Existence of Small Periodic Motions of two Penduli, Subjected to Uniform Rotation.* G. K. POZHARITSKII, *On a Property of the First Approximation System.*

Die Durchsicht der Arbeiten der vorliegenden Nummer bestätigt, dass im allgemeinen der russische Wissenschaftler über die westlichen Arbeiten eingehend informiert ist (eine Beziehung, die nicht ohne weiteres umkehrbar ist, aber auch verschiedene Interpretationen zulässt). Das Verhältnis der zitierten russischen und fremdsprachigen Arbeiten ist etwa 9:8. Die englische Übersetzung der PMM wird jährlich ungefähr 1200 Seiten umfassen, was den etwas mehr als 850 Seiten des russischen Originals entspricht. Ohne Zweifel wird diese Publikation auf ein erhebliches Interesse stossen. Erwähnt sei noch, dass von jeder Arbeit auch Sonderdrucke zum einheitlichen Preis von 2.00 \$ (10 s) erhältlich sind, was sicher sehr zu begrüßen ist in Anbetracht des doch recht hohen Preises eines ganzen Jahrganges.

E. ROTH-DESMEULES

Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelungsvorgängen (Vorträge gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der GAMM in Düsseldorf, 8. November 1957). Herausgeber: W. OPPELT (Oldenbourg, München 1958). 128 S., 121 Abb.; DM 16.80.

Nachdem sich in den letzten Jahrzehnten die Regeltechnik immer stärker zur Lösung mathematischer Probleme der programmgesteuerten Digitalrechengерäte und auch der Analogrechner bediente, widmete die GAMM eine Tagung der Behandlung von Fragen, die sich bei der Anwendung moderner Rechenmaschinen in der Regelungsmathematik ergeben. In sieben ausgezeichneten Vorträgen kamen dabei sowohl Probleme aus der digitalen wie auch aus der analogen Technik zur Sprache, welche dann in der Reihe «Beihefte zur Regelungstechnik» des Oldenbourg-Verlages veröffentlicht wurden.

E. BUKOVICS (Wien) gibt einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten digitaler Rechengерäte zum Lösen von Grundaufgaben der Regelungstechnik. Er zeigt, wie mit relativ kleinen digitalen Maschinen Stabilitäts- und Optimierungsberechnungen von Regelkreisen durchgeführt werden können.

J. B. RESWICK (Cambridge, Mass., USA) erläutert eine einfache graphische Methode, um aus einer gegebenen Autokorrelationsfunktion der Eingangsgrösse eines Regelkreises und der Crosskorrelationsfunktion zwischen Eingang und Ausgang die Übertragungsfunktion des Regelkreises zu finden.

A. LEONHARD (Stuttgart) gibt einige Anwendungen eines elektronischen Gerätes an, welches gestattet, den komplexen Wert von Polynomen zu berechnen. Besonders bei der analytischen Behandlung von Regelaufgaben erweist sich dieses Gerät als gutes Mittel zur Zeitersparnis.

Bis heute sind schon einige Verfahren bekannt, Analogierechenschaltungen optimal zu programmieren. R. HERSCHEL (Ulm) zeigt eine weitere Programmie-

rungsart, die sich insbesondere bei der Behandlung nichtlinearer Probleme sehr gut bewähren soll.

Ein wertvoller Vergleich der Berechnung eines Regelvorganges mit Rechenanlagen verschiedener Typen (Digitalrechner IBM 650, elektronischer Analogierechner, mechanische Integrieranlage) stammt von den Herren O. FÖLLINGER und G. SCHNEIDER (Frankfurt).

E. BÜHLER (Mannheim) verfasste einen Beitrag über die elektronische Nachbildung eines mechanischen Systems mit Reibung. Sorgfältig werden besonders die Reibungsverhältnisse beim Übergang von Haftreibung zu Gleitreibung nachgebildet, wobei allerdings der für diese Nachbildung betriebene elektronische Aufwand fragwürdig gross ist.

Ein letzter Vortrag von H. WITSENHAUSEN (Brüssel) über die Anwendung von Analogierechenmaschinen auf die Optimierung von un stetigen Regelkreisen mit statistisch schwankenden Eingangsgrössen behandelt ein heute sehr aktuelles Thema, da man in jüngster Zeit immer mehr danach trachtet, Regelkreise nicht für Eingangsgrössen, die als Sprungfunktion auftreten, zu optimieren, sondern für statistisch schwankende Eingangsgrössen, da die wirklich vorkommenden Störfunktionen meist auch nur statistisch erfasst werden können.

Einige interessante Diskussionsbeiträge bilden den Abschluss dieses kleinen Werkes, das jedem, der sich mit Regeltechnik und Analogierechentechnik befasst, eine Fülle wertvollster Anregungen bietet.

H. J. BÜRGIN

Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology. Von S. G. MIKHLIN. Übersetzt aus dem Russischen von A. H. ARMSTRONG (Pergamon Press, London, New York und Paris 1957). 338 S., 24 Fig.; 80 s.

Diese Übersetzung zeigt erneut das hohe Niveau der russischen Lehrbücher, wo vor allem dem methodischen Aufbau der grösste Wert beigemessen wird. Es geht dem Verfasser darum, das enorme Material, das sich im Verlaufe der vergangenen dreissig Jahre in Fachzeitschriften angehäuft hat und welches sich mit den Anwendungen von Integralgleichungen in Physik und Technik befasst, zu sammeln und in einer derartigen Form zusammenzufassen, dass es getrost als ein Standardwerk auf diesem Gebiet angesehen werden kann.

Der erste Teil des Buches befasst sich mit den fundamentalen Theorien über Integralgleichungen und mit den Methoden der approximativen Lösungsverfahren. Spezielle Beachtung wird den singulären Integralgleichungen gewährt, welche wohl schon gründlich erforscht und bei vielfachen Anwendungen ausgeprüft sind, jedoch noch kaum in einem systematischen Aufbau dargestellt wurden. Wenn immer möglich werden die theoretischen Resultate durch numerische Beispiele erläutert.

Der zweite, grössere Teil ist den Anwendungen der Integralgleichungen gewidmet, wobei hauptsächlich ein- und zweidimensionale Probleme aus den Gebieten der Elastizitätslehre (biharmonische Probleme) und der Hydrodynamik behandelt werden. Ein spezielles Kapitel befasst sich mit den Anwendungen der Theorie der singulären Integralgleichungen.

TH. GINSBURG

Ballistik. Von HERMANN ATHEN, 2. Aufl. (Quelle & Meyer, Heidelberg 1958). 258 S., 59 Fig., 4 Zahlentafeln; DM 29.-.

Das den Ballistikern wohlbekannte Lehrbuch von H. ATHEN erscheint nun in einer zweiten Auflage, die den bedeutenden Entwicklungen während und seit dem Kriege weitgehend Rechnung trägt. Die Hauptteile des Buches sind: Äussere Ballistik, Treffwahrscheinlichkeit, innere Ballistik, Bomben- und Raketenballistik.

Bei der Aussenballistik werden beim Problem des Luftwiderstandes die Grundlagen der Strömungslehre und der Gasdynamik gegenüber der ersten Auflage bedeutend ausführlicher behandelt, während die analytischen Lösungsmethoden der (genähten) ballistischen Hauptgleichungen etwas in den Hintergrund getreten sind, obwohl auch jetzt noch Näherungsmethoden und Näherungsansätze bei verschiedenen Fragestellungen einen ziemlich breiten Raum einnehmen.

Das Kapitel über die Störungstheorie würde man vielleicht gerne noch etwas erweitert sehen durch eine ausführlichere Behandlung der praktisch wichtigen höhenveränderlichen Störungen, insbesondere auch im Falle der Flak-Bahnen, da hier die Verhältnisse häufig wesentlich anders liegen als bei den im Mündungshorizont endenden Flugbahnen. Die Bomben- und Raketenballistik werden dem einführenden Charakter des Buches gemäss nur kurz gestreift. Das Buch bietet eine recht brauchbare Einführung in die Fragestellungen der Ballistik, wobei die theoretischen Entwicklungen im Vordergrund stehen, während die experimentellen und messtechnischen Probleme meist nur knapp angedeutet werden. Über 250 Literaturangaben ermöglichen es aber dem Interessierten, auf ausführlichere Spezialuntersuchungen zurückzugreifen. Das Buch ist ohne Zweifel – wie schon die erste Auflage – gut geeignet, manchem die ersten Grundlagen der theoretischen Ballistik zu vermitteln.

E. ROTH-DESMEULES

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von R. SAUER (Springer-Verlag, Berlin 1958). 284 S., 68 Abb.; DM 38.-.

Dieses in der «gelben Reihe» des Springer-Verlags (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften) herausgekommene Standardwerk erscheint in der zweiten Auflage mit einer Reihe von Ergänzungen, welche zum Teil auf den neuesten Entwicklungen in der Mathematik beruhen. Dies gilt vor allem von dem neu aufgenommenen Kapitel über die Behandlung von Anfangswertproblemen mit Hilfe des *Distributionskalküls* von LAURENT SCHWARTZ, welcher erst in den vergangenen zehn Jahren entwickelt wurde.

Nach einer kurzen Darlegung der Grundbegriffe der Distributionstheorie, wobei unter anderem auch die Pseudofunktionen von H. RIESZ eingeführt werden, wird der Kalkül auf Faltungsgleichungen, und zwar besonders auf Anfangswertprobleme der Wellengleichung angewandt. In einem weiteren Abschnitt wird die Brauchbarkeit des Kalküls an praktischen Beispielen aus der Theorie der dreidimensionalen linearisierten Überschallströmung um flache und schlanke Flugkörper erläutert. Hierbei erscheint die Hadamardsche Theorie der *endlichen Bestandteile von Integralen* als blosser Spezialfall der Distributionstheorie.

Bei der Erweiterung der Laplace-Transformation auf Distributionen bleiben die Rechenregeln der Laplace-Transformation im wesentlichen gültig, jedoch treten gewisse Vereinfachungen ein, und verschiedene einschränkende Voraussetzungen fallen weg. So ist es nach der Erweiterung des Oberraumes durch Distributionen nun durchaus möglich, die Laplace-Transformation auch auf Dirac-Distributionen (Sprungfunktionen) anzuwenden.

Das bereits in erster Auflage bewährte Buch hat durch diese Ergänzungen eine wesentliche Bereicherung erfahren.

TH. GINSBURG

Einführung in die Physik. Band II: *Elektrizitätslehre, Wellenlehre, Akustik und Optik*. Von P. FRAUENFELDER und P. HUBER (Ernst Reinhardt Verlag, München und Basel 1958). 504 S., 697 Fig.; Fr. 29.50.

Der mit Spannung erwartete zweite Band der *Einführung in die Physik* von FRAUENFELDER und HUBER umfasst die Elektrizitätslehre und die Wellenlehre mit

Akustik und Optik. Wiederum überrascht die reiche Fülle des Stoffes und die wohl-dokumentierte und verständliche Darstellung mit den vielen, die Anschaulichkeit und das Verständnis fördernden Beispielen. Der Fachmann wird die Möglichkeit begrüßen, Altbekanntem in neuen Formen zu begegnen, der Lernende aber, für den das Buch in erster Linie gedacht ist, wird die klare, ausführliche und sich doch immer auf das Notwendige beschränkende Darstellung zu schätzen wissen.

Über Einzelheiten der Darbietung des Stoffes mag man in guten Treuen anderer Auffassung sein, in manchen Abschnitten hätte eine sorgfältige Ausfeilung vielleicht noch zu einer besseren Konzentration des Stoffes führen können, und unbefriedigend geblieben ist wie im ersten Band die typographische Gestaltung der Formeln. Man wird es ferner bedauern, dass in einem 1958 erschienenen Buche, in welchem dem Mechanismus der elektrischen Leitung 70 Seiten reserviert sind, die Halbleitereigenschaften überhaupt nicht erwähnt werden, bedauern wird man auch, dass neben dem abstrakten Begriff der Ladungsquelle Angaben über Einzelheiten der Stromerzeugung völlig fehlen und damit auch der immer noch wertvolle Akkumulator nirgends Erwähnung findet.

Durch diese kleinen Einwände soll aber der ausgezeichnete Gesamteindruck des ganzen Buches in keiner Weise eine Einschränkung erfahren. Jeder Abschnitt eröffnet bei eingehendem Studium neue, interessante Gesichtspunkte und zeugt für die manchmal vielleicht etwas eigenwillige, aber immer originelle Darstellungsart der beiden Verfasser. Auf besondere Liebe zur Sache und besondere Sachkenntnis weisen vor allem manche in den letzten Einzelheiten sehr sorgfältig redigierte Kapitel der Optik hin.

Die grosse und überaus verdankenswerte Leistung, die in der Umarbeitung der umfangreichen Stoffgebiete der heutigen Physik in eine für Studierende didaktisch brauchbare Form liegt, kann der Aussenstehende wohl kaum voll ermessen – ein nur äusserliches Zeichen dieser Leistung ist schon die Zahl von beinahe 700 Abbildungen des vorliegenden Bandes. Man wird daher Verständnis dafür aufbringen müssen, wenn der mit grossem Interesse erwartete 3. Band, der die *Atomphysik* enthalten wird, nicht schon im laufenden Jahr herausgegeben werden kann.

W. HARDMEIER

Ordinary Difference-Differential Equations. Von EDMUND PINNEY (University of California Press, Berkeley 1958). 262 S., 45 Fig.; \$ 5.00.

Eine Differenzen-Differentialgleichung besteht aus einem Ausdruck, welcher sowohl eine Funktion $y_{h_1, h_2, \dots, h_k}(t)$ und einige ihrer Ableitungen bezüglich t als auch Differenzen bezüglich den h 's enthält. Ein Beispiel einer solchen Gleichung ist

$$y_h'(t) = y_{h-1}(t).$$

Das vorliegende Buch befasst sich mit gewöhnlichen (im Gegensatz zu partiellen) Differenzen-Differentialgleichungen. Nach einem einführenden und den Problemkreis beschreibenden Kapitel entwickelt der Verfasser die zugehörige Theorie, welche anhand von numerischen Beispielen erläutert wird.

TH. GINSBURG

Max-Planck-Festschrift 1958. Herausgegeben von B. KÖCKEL, W. MACKE und A. PAPAPETROU. (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959). 412 S., 28 Abb.; DM 54.–.

Die vorliegende Festschrift ehrt MAX PLANCK zu Anlass seines hundertsten Geburtstags. Sie enthält 31 Beiträge von 33 Autoren. Natürlicherweise überwiegen die Beiträge aus Europa (25) an Zahl die aussereuropäischen.

Die Arbeiten sind nach Inhalt geordnet, wobei neben den Abschnitten über klassische Physik und Relativitätstheorie vor allem die Quantentheorie mit ihren erkenntnis-theoretisch-philosophischen Ausstrahlungen vertreten ist. Die letzteren nehmen einen überraschend breiten Raum ein (etwa 70 Seiten) und machen auf den Rezensenten den ungewohntesten Eindruck. Es ist viel die Rede von der «orthodoxen Schule der Quantenmechanik», und gegen den Positivismus und den grossen ERNST MACH (dessen klassische *Mechanik in ihrer Entwicklung* hoffentlich immer besinnliche Leser finden wird) wird polemisiert. Man kann sich auch des Eindruckes kaum erwehren, dass der Jubilar selbst in einen bekannten weltanschaulichen Karren eingespannt werden soll.

Sehr beachtenswert ist in diesem Zusammenhang der Artikel von V. FOCK (Leningrad) *Über die Deutung der Quantenmechanik*. In ihm werden mit grosser Klarheit von einem wohldefinierten philosophischen Standpunkt aus die grundsätzlichen Fragen der Quantentheorie durchleuchtet. Das führt zu einer wesentlichen Erweiterung des ursprünglichen Ideenkreises, allerdings immer innerhalb des zugrunde gelegten philosophischen Rahmens. Dass nicht jeder diesen Rahmen anerkennen kann, fällt in Anbetracht der Offenheit der Auseinandersetzung weniger ins Gewicht.

Natürlich enthält die Festschrift eine grosse Reihe rein wissenschaftlicher Beiträge von zum Teil hoher, zum Teil unterschiedlicher Qualität, auf die der Rezensent nicht weiter eingehen kann.

RES JOST

Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung. Von A. I. LURJE. Übersetzt aus dem Russischen von H. KINDLER und R. REISSIG (Akademie-Verlag, Berlin 1957). 167 S., 24 Abb.; DM 15.—.

In diesem Buche sind einige der Arbeiten des Verfassers zusammengefasst, die in den Jahren 1945–1950 in russischen Zeitschriften erschienen sind.

Im ersten Kapitel wird die Problemstellung gegeben und eine Methode entwickelt zur Reduktion der Bewegungsgleichungen eines selbsttätig geregelten Systems auf eine Form, die der Verfasser als *kanonisch* bezeichnet. Im zweiten Kapitel werden die Kriterien für die Stabilität «im Grossen» von nichtlinearen Regelungssystemen des betrachteten Typs aufgestellt; das dritte Kapitel enthält eine Untersuchung der Eigenschwingungen in diesem System, während sich das vierte Kapitel mit dem Verhalten eines Systems an der Grenze seiner linearen Stabilität beschäftigt.

Das Buch wendet sich in erster Linie an den mathematisch gebildeten Ingenieur, der sich mit Berechnung und Bau von selbsttätigen Regelungssystemen befasst, aber auch an Physiker und Mathematiker.

TH. GINSBURG

Theoretical Elasticity. Von CARL E. PEARSON (Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1959). 218 S., 19 Fig.; \$6.—.

In der Reihe «Harvard Monographs in Applied Science» ist als dritter Band bereits die ausgezeichnete, wenn auch leider Fragment gebliebene Elastizitäts- und Plastizitätstheorie von H. M. WESTERGAARD erschienen. Die Herausgabe des vorliegenden Buches als sechster Band der gleichen Reihe stellte daher ein gewisses Wagnis dar, das aber in jeder Beziehung geglückt ist.

Annähernd die Hälfte des Werkes befasst sich mit der Entwicklung der Tensorrechnung unter Beschränkung auf kartesische Koordinatensysteme sowie mit der entsprechenden Darstellung der Grundlagen der Kontinuumsmechanik, nämlich des Spannungs- und des Verzerrungszustandes. Dabei beginnt die Entwicklung, wie alle amerikanischen Bücher, mit den Regeln der Vektoralgebra; sie umfasst, zum

Beispiel in den Abschnitten über Differentialgeometrie oder Kreiselung, einiges, was über das unmittelbare Ziel des Buches hinausgeht. In der zweiten Hälfte werden die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie formuliert und alle grundsätzlich wichtigen Verfahren zur Gewinnung von Lösungen besprochen, wobei ein besonderes Kapitel den Variationsprinzipien gewidmet ist. Die drei letzten Kapitel behandeln Thermoelastizität, elastische Wellen und nichtlineare Elastizität.

Die zweite Hälfte dieses Buches demonstriert eindrucklich die Ökonomie der modernen Tensorschreibweise. Es ist hier auf 136 Seiten eine erstaunliche Fülle von Stoff vereinigt. Zwar werden die bei ebenen Problemen heute im Vordergrund stehenden funktionentheoretischen Verfahren nicht dargestellt, und zudem fehlen in diesem zweiten Teil (im Gegensatz zum ersten) alle Anwendungen sowie Übungsaufgaben. Gerade dadurch ist aber auf wenig mehr als 100 Seiten ein äusserst nützliches und übersichtliches Kompendium der räumlichen Elastizitätstheorie entstanden.

H. ZIEGLER

Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. VON FRITZ VILBIG, 5. Aufl., Band II (Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Frankfurt am Main 1959). 735 S., 950 Abb.; DM 48.-.

Das *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik* von VILBIG, das 1937 seine erste Auflage erlebte, kommt nun in fünfter, neubearbeiteter Auflage heraus; diese umfasst drei Bände, von denen der mittlere 1958 erschienen ist. Das Lehrbuch hat sich zu einem eigentlichen Standardwerk entwickelt, das dank seiner Vollständigkeit und Übersichtlichkeit den Dienst eines Handbuches versieht und der Fachwelt unentbehrlich ist. Von der vorbildlichen Qualität zeugt der hier zu besprechende zweite Band der neuesten Auflage. Er umfasst in reicher Fülle: Verstärker (inkl. röhrenlose Verstärker und Laufzeitverstärker), Schwingungserzeugung, Rückkopplung (inkl. Gegenkopplung und Neutralisation), Abschirmung, Gleichrichtung, Modulation und Demodulation, Tastung und Impulsmodulationsverfahren, Frequenzwandlung, Schwundregelung, Dynamikänderung sowie einen Nachtrag (molekulare Mikrowellenverstärker und Oszillatoren). Die Ausstattung ist, wie bei den früheren Auflagen, sehr gut; ausserordentlich zu schätzen sind die zahlreichen Abbildungen.

F. TANK

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band 12: *Thermodynamik der Gase* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 686 S., 253 Fig.; DM 154.-.

Im Rahmen des durch S. FLÜGGE neu herausgegebenen *Handbuches der Physik* ist der Thermodynamik der Gase ein besonderer Band gewidmet. Darin werden die verschiedenen Aspekte dieses Wissensgebietes in umfassender Weise behandelt. Die verschiedenen Hauptkapitel und ihre Verfasser sind die folgenden (die Beiträge sind teils in deutscher, teils in englischer Sprache abgefasst):

The Properties of Real Gases (J. S. ROWLINSON);

Theory of Real Gases (J. E. MAYER);

Principles of the Kinetic Theory of Gases (H. GRAD);

Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck (L. WALDMANN);

Allgemeine Vakuumphysik (R. JAECKEL);

Production and Measurement of Ultrahigh Vacuum (D. ALPERT).

Vorweg sei bemerkt, dass es wohl kaum möglich sein wird, einen Referenten zu finden, der zur Beurteilung aller Teile dieses Buches in gleicher Weise zuständig wäre. Hingegen zeigt schon jede Stichprobe, dass dieses Nachschlagewerk ein ausserordentlich hohes wissenschaftliches Niveau hält.

Der Beitrag von ROWLINSON über die Eigenschaften der realen Gase hält sich im Rahmen der klassischen phänomenologischen Thermodynamik und beleuchtet sowohl die theoretischen Formulierungen (Zustandsgleichungen usw.) als auch die experimentellen Methoden und empirischen Ergebnisse. Eine besonders sorgfältige Behandlung erfährt das Gebiet des kritischen Punktes, auch für den Fall der Gas-mischungen.

Der von MAYER verfasste Teil bringt die theoretischen Grundlagen von hoher wissenschaftlicher Warte aus zur Darstellung, wobei selbstredend vom statistischen (auch quantenstatistischen) Standpunkt ausgegangen wird. Im vierten Hauptabschnitt dieses Teiles wird auf das Quantengas eingegangen.

Die kinetische Theorie selbst, die bekanntlich vor allem mit dem Namen BOLTZ-MANNS verknüpft ist, erfährt eine ausführliche und tief in die begrifflichen Grundlagen eindringende Behandlung durch GRAD.

Der Artikel von WALDMANN über die Transporterscheinungen in Gasen (Zähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, Diffusion, Thermodiffusion) nimmt entsprechend der hohen praktischen Bedeutung dieses Gebietes etwa einen Drittel des ganzen Buches ein. Die phänomenologische Betrachtungsweise wird zum Ausgangspunkt genommen, doch wird später die tiefere Begründung aus der kinetischen Theorie gewonnen. Experimentelle Methoden und Ergebnisse erfahren eine ausführliche Würdigung.

Die letzten zwei Hauptteile des Buches schliesslich befassen sich mit der Vakuumphysik. Sie unterscheiden sich von den vorhergehenden namentlich dadurch sehr deutlich, dass hier der Schwerpunkt auf der Behandlung der technischen Vorrichtungen (Pumpen, Messgeräte) liegt.

Jeder der Verfasser hat das von ihm bearbeitete Gebiet als ein geschlossenes Ganzes behandelt. Dabei werden natürlich gewisse Überschneidungen unvermeidbar, was aber nicht als ein Nachteil des Buches gewertet werden darf. Auch der durchaus individuelle Charakter der einzelnen Beiträge ist als Positivum zu betrachten. Alles in allem entspricht das Buch den hohen Erwartungen, mit denen man es von vornherein zur Hand nimmt. Es wird ein hervorragendes Nachschlagewerk sein für einen weiten Kreis von Forschern. Zu diesen gehören vor allem Physiker und Physikochemiker, im Zuge der heutigen Entwicklung aber bereits auch Ingenieure, was in Zukunft noch in höherem Masse der Fall sein wird. W. TRAUPEL

Modern Computing Methods. Notes on Applied Science No.16. Herausgegeben vom National Physical Laboratory (Her Majesty's Stationery Office, London 1957). 129 S., 18 Fig.; 10 s. 6 d.

Die unbekannten Verfasser beschreiben in konzentrierter Form numerische Methoden für Probleme aus verschiedenen Gebieten der angewandten Mathematik. Beispielsweise wird für lineare Gleichungssysteme der Gaußsche Algorithmus vorgeschlagen, und es wird (in Kapitel 2) auch gezeigt, wie man die Elimination mit einem Rechenautomaten zweckmässig durchführt. Entsprechend werden Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen und Eigenwertprobleme angegeben (Kapitel 3 und 4). Weitere Abschnitte sind der Differenzenrechnung und der numerischen Integration von gewöhnlichen sowie partiellen Differentialgleichungen gewidmet. Am Schluss findet der Leser noch interessante Ausführungen über die Berechnung und Tabellierung von Funktionen mit Rechenautomaten. Wenn auch neuere Methoden wie konjugierte Gradienten, Bi-Iteration usw. fehlen, gibt das kleine Werk doch wertvolle Hinweise für den Mathematiker, der mit Rechenautomaten zu tun hat.

H. RUTISHAUSER

Redresseurs synchrones thermiques

Par JEAN-PIERRE BOREL et PIET CORNAZ, Lausanne¹⁾

1. Introduction

Dans beaucoup de domaines de la physique et de l'électrométrie, l'augmentation de la sensibilité des appareils de mesure est limitée par le phénomène de bruit de fond. Celui-ci est généralement dû au caractère discontinu de l'électricité (tubes, photocellules, semiconducteurs etc.) et à l'agitation thermique des électrons des conducteurs. Ces perturbations sont inévitables et il s'agit de limiter par des appareils appropriés leur influence sur le résultat de mesure, c.-à-d. d'augmenter le rapport signal sur bruit.

Dans tous les cas où la tension à mesurer est sinusoïdale pure ou s'il suffit de mesurer une composante déterminée de son spectre de Fourier, la détection synchrone, appelée aussi détection de phase ou détection lock-in est un moyen simple et efficace d'augmenter le rapport signal sur bruit [1]²⁾. C'est un des meilleurs systèmes, en particulier si ce rapport est inférieur à 1 à l'entrée [2]. On utilise le fait que le signal est périodique de période connue, qu'il a donc un signe déterminé pendant des demipériodes connues à l'avance, tandis que le bruit, représenté par une fonction aléatoire est tantôt positif, tantôt négatif pendant ces mêmes intervalles de temps. Pour tirer parti de cette différence fondamentale, on module la tension d'entrée (signal + bruit) par une tension de référence périodique d'amplitude constante de même fréquence que le signal et de phase fixe. Comme nous le verrons plus loin (§ 2) le produit contient alors une composante continue proportionnelle au signal et des composantes alternatives dues au bruit. Un filtre intégrateur permet alors d'éliminer très efficacement ces termes alternatifs et de ne garder que le terme constant contenant l'information du signal.

La multiplication peut se faire en principe par tout élément non linéaire; on utilise couramment des tubes pentodes, triodes, diodes ou des diodes à cristal [3]. Le but de ce travail est d'étudier quelques types peu connus et particulièrement simples de redresseurs synchrones utilisant l'effet quadratique d'échauffement dû au courant. Ce principe a été proposé et utilisé par l'un de nous (J. P. BOREL, en collaboration avec CL. MANUS) sous la forme présentée au § 3 dans un

¹⁾ Dans le cadre du Subside du Fonds National N° 1447. Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, Laboratoire de Physique Technique, directeur: Prof. R. MERCIER.

²⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 101.

spectrographe de résonance électronique [4]. La variante du § 4 en est une amélioration mise au point dans ce laboratoire au cours de nos travaux en résonance nucléaire. Elle a une sensibilité meilleure, tout en étant plus robuste et plus économique.

Remarquons qu'un principe un peu semblable est connu dans le domaine de l'électrotechnique pour réaliser des Wattmètres [5]. Effectivement, tous les schémas de lock-in qui vont suivre peuvent être facilement adaptés au problème de la mesure d'une puissance ou d'un $\cos \varphi$.

2. Principe général

Le principe des redresseurs synchrones thermiques est le suivant : 2 éléments dont une caractéristique électrique est fonction de la température (thermocouples, résistances métalliques, thermistances) et deux résistances sont montés en pont (figure 1, cas de thermocouples). Celui-ci est alimenté sur deux points

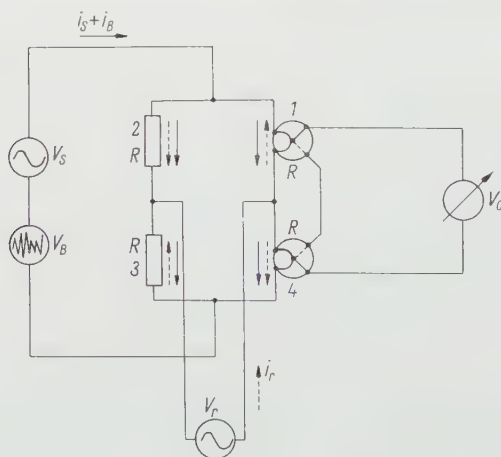


Figure 1
Principe du redresseur synchrone thermique avec thermocouples.

opposés par le courant d'entrée, mélange d'un courant «signal» à mesurer $i_s = I_s \sin \omega t$, et d'un courant *perturbateur*, par exemple un courant de bruit que nous représentons par $i_B = \sum I_{B_i} \sin \omega_i t$. Aux deux points opposés on applique un courant de *référence* $i_r = I_r \sin(\omega t + \varphi)$ beaucoup plus grand que la valeur efficace des deux autres.

A cause de la cohérence de phase entre le courant signal et le courant de référence la puissance instantanée P_+ dissipée dans la résistance 4 sera diffé-

rente de celle P_- dissipée dans 1 :

$$\left. \begin{aligned} P_{\pm} &= R i^2 = R \left[\frac{I_s}{2} \sin \omega t + \sum_i \frac{I_{Bi}}{2} \sin \omega_i t \pm \frac{I_r}{2} \sin (\omega t + \varphi) \right]^2 \\ &= R \left[\frac{I_s^2}{4} \sin^2 \omega t + \sum_i \sum_j \frac{I_{Bi} I_{Bj}}{4} \sin \omega_i t \sin \omega_j t \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_r^2}{4} \sin^2 (\omega t + \varphi) + \sum_i \frac{I_s I_{Bi}}{2} \sin \omega t \sin \omega_i t \right] \\ &\quad \pm R \left[\frac{I_s I_r}{2} \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) + \sum_i \frac{I_r I_{Bi}}{2} \sin (\omega t + \varphi) \sin \omega_i t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Le premier crochet représente une puissance $P_0(t)$ fonction du temps qui est la même pour les 2 résistances 1 et 4. Les thermocouples ne mesurant que les différences de température (montage en opposition) ne réagissent pas à ce terme. Il ne sera déterminant que pour la température moyenne. En général on prend $I_r \gg I_s$ et I_{Bi} ; il suffit alors de garder les termes en I_r^2 soit :

$$P_0 \approx R \frac{I_r^2}{8} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)]; \quad \bar{P}_0 \approx R \frac{I_r^2}{8}, \quad (2)$$

où \bar{P}_0 est la valeur moyenne (au point de repos).

Le deuxième crochet dans l'expression (1) donne l'écart de puissance par rapport à P_0 qui produira une différence de température détectée par les thermocouples. Il peut encore s'écrire en posant $\Delta \omega_i = \omega_i - \omega$:

$$\left. \begin{aligned} P_{d\pm} &= \pm R \left\{ \frac{I_s I_r}{4} [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \frac{I_r I_{Bi}}{4} [\cos (\Delta \omega_i t - \varphi) - \cos ((2\omega + \Delta \omega_i) t + \varphi)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Cet écart de puissance devient maximum pour $\varphi = 0$ ou π (c.-à-d. signal et référence en phase ou contre-phase). Pour $\varphi = 0$ on obtient

$$\left. \begin{aligned} P_{d\pm} &= \pm R \left\{ \frac{I_s I_r}{4} + \sum_i \frac{I_r I_{Bi}}{4} \cos \Delta \omega_i t - \frac{I_s I_r}{4} \cos 2\omega t \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{I_r I_{Bi}}{4} \cos (2\omega + \Delta \omega_i) t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Cette expression contient un terme constant proportionnel au signal, des termes lentement variables proportionnels aux I_{Bi} et des termes de haute fréquence.

L'inertie thermique du filament joue le rôle d'intégrateur. Sa température suit le premier terme qui est proportionnel au signal et avec une certaine atténuation le second terme qui varie lentement; les termes de haute fréquence ne se font pas sentir. Cette atténuation est d'autant plus forte que $\Delta\omega_i$ est plus grand ce qui ne laisse passer que les perturbations de fréquence très voisine de celle du signal.

Pour analyser de plus près cette atténuation on peut faire les remarques suivantes:

Soit c la capacité thermique de l'élément et soit $\Delta P = \alpha \Delta T$ la variation de puissance nécessaire pour provoquer un écart stationnaire de température ΔT par rapport au point de repos. L'équation différentielle pour l'écart ΔT en régime non stationnaire est, en négligeant une résistance thermique éventuelle entre fil chauffant et élément sensible:

$$c \frac{d\Delta T}{dt} + \alpha \Delta T = \Delta P(t). \quad (4)$$

Dans les thermocouples travaillant dans leur région purement quadratique α est une constante indépendante du point de repos. Pour les lampes ou thermistances sous vide la fonction $T = f(P)$ n'est pas linéaire. Conduction et rayonnement y interviennent simultanément et la relation est assez bien approchée par une expression du type

$$P = d(T - T_a) + e(T^4 - T_a^4), \quad (5)$$

où T_a est la température ambiante. Le coefficient α qui mesure la pente de cette courbe au point de repos dépend alors de celui-ci.

Pour $\Delta P(t) = a + \sum b_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ l'équation (4) a la solution permanente:

$$\Delta T = \frac{a}{\alpha} + \sum_i \frac{b_i}{\alpha \sqrt{1 + \omega_i^2 c^2 / \alpha^2}} \cos(\omega_i t + \varphi_i - \delta_i); \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg} \delta_i = \frac{c}{\alpha} \omega_i. \quad (6)$$

On voit que les termes de fréquence ω sont atténués comme par un filtre RC de constante de temps $\tau = c/\alpha$. Cette constante est de l'ordre de 1 s dans les cas usuels. En prenant pour $\Delta P(t)$ l'expression P_d de (3) et en négligeant d'emblée les termes en ω et 2ω on obtient pour l'écart instantané de la température:

$$\Delta T_{\pm} = \pm \frac{1}{\alpha} R \left[\frac{I_r I_s}{4} + \sum_i \frac{I_r I_{Bi}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \Delta\omega_i^2}} \cos(\Delta\omega_i t - \delta_i) \right]. \quad (7)$$

Le premier terme représente l'écart de température constant dû au signal et le deuxième l'écart fluctuant dû au bruit. Le montage approprié (en opposition) des thermocouples donne une tension proportionnelle à ces deux termes. De tout le spectre de bruit que contient le courant d'entrée seule une bande

étroite autour de ω est transmise. Sa largeur équivalente³⁾ est: $\Delta f_{\text{eq}} = 1/2 \tau$, où τ est de l'ordre de 0,5 à 20 s. On réalise ainsi facilement des largeurs de bande de bruit de 1 à 0,025 c/s.

Par la suite nous étudierons de plus près quelques cas pratiques: le montage avec thermocouples (§ 3), celui avec lampes à filament en tungstène (§ 4) et celui avec thermistances (§ 5).

Notons qu'il serait possible de doubler la tension de sortie de ces dispositifs en utilisant 4 éléments sensibles. L'égalisation des 4 caractéristiques devient alors assez compliquée, tandis que pour deux éléments elle est très simple, sinon superflue.

3. Système à thermocouples

Dans les caractéristiques de thermocouples on donne généralement directement la relation entre la tension du couple et le carré du courant: $V_{th} = b I_{\text{eff}}^2$. Pour un pont à 2 thermocouples (figure 2) où les tensions de repos s'annulent mais les 2 écarts dus aux termes P_d s'ajoutent la tension de sortie devient

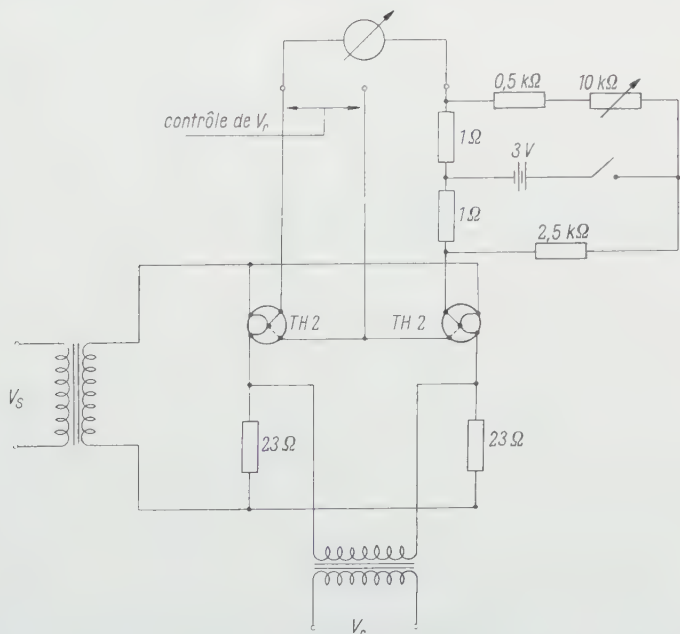


Figure 2

Redresseur synchrone avec thermocouples.

³⁾ Cette notion n'est utile que si le spectre de bruit peut être considéré comme blanc à l'intérieur de cette bande.

(pour $\varphi = 0$)

$$V_c = \frac{1}{2} b I_{s\,eff} I_{r\,eff} + \frac{1}{2} b \sum_i I_{r\,eff} I_{Bi\,eff} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \Delta\omega_i^2}} \cos(\Delta\omega_i t - \delta) . \quad (8)$$

La résistance de sortie est de quelques Ohms et la résistance d'entrée de quelques dizaines d'Ohms. Pour bien utiliser la puissance du signal disponible il faut donc utiliser un transformateur d'entrée pour adapter à l'impédance de cathode ou de plaque d'une lampe.

Le gain de conversion, définie comme le rapport de la tension continue de sortie V_c à la tension signal efficace à l'entrée $V_{s\,eff}$ sera (pour $\varphi = 0$)

$$G_v = \frac{V_c}{V_{s\,eff}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R_f} I_{r\,eff} . \quad (9)$$

R_f résistance du fil chauffant; R_{th} résistance du thermocouple.

On peut définir d'autres grandeurs utiles qui sont: L'impédance de conversion, rapport de la tension de sortie au courant signal ($I_{s\,eff}$) et le gain de puissance, rapport de la puissance utile de sortie (P_c) à la puissance d'entrée (P_s)

$$\left. \begin{aligned} Z_c &= \frac{V_c}{I_{s\,eff}} = \frac{b}{2} I_{r\,eff}; \\ G_p &= \frac{P_c}{P_s} = \frac{V_c^2}{4 \cdot 2 R_{th} I_{s\,eff}^2 R_f} = \frac{b^2}{32 R_{th} R_f} I_{r\,eff}^2 . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Le tableau 1 donne quelques valeurs numériques (pour un système à 4 thermocouples les gains sont à multiplier par 2):

Tableau 1

Type	$R_e = R_f$	$I_f = \frac{1}{2} I_{r\,eff}$	$R_{th} = \frac{1}{2} R_c$	τ	b	G_v	Z_c	G_p
Philips	Ω	mA	Ω	approx. s	V/A ²	—	V/A	—
TH 1 ou TH 91	75	5	5,5	0,5	120	$0,8 \cdot 10^{-2}$	0,6	$1,1 \cdot 10$
TH 2 ou TH 92	23	10	3	0,8	30	$1,3 \cdot 10^{-2}$	0,3	$1,62 \cdot 10$
TH 3 ou TH 93	7,3	20	3	1,5	7,5	$2,05 \cdot 10^{-2}$	0,15	$1,28 \cdot 10$

Les gains sont proportionnels au courant de référence; on choisira celui-ci de façon à rester dans la partie linéaire de la caractéristique $V_c = f(I_{eff}^2)$ (voir tableau 1).

La figure 2 donne un exemple d'un tel redresseur synchrone tel qu'il a été utilisé dans nos recherches en résonance électronique et nucléaire depuis

plusieurs années [4]. Actuellement, l'entrée du signal par transformateur a été remplacée par une attaque en cathodyne pour pouvoir utiliser le dispositif sans rotations de phase dans une gamme de fréquence très étendue (1 c/s à 20 000 c/s). Le courant de repos de la lampe qui passe alors par les thermocouples ne gêne pas; il faut toutefois en tenir compte en déterminant le courant de référence admissible. Nous avons inséré dans le circuit de sortie un réglage de zéro permettant d'ajouter une faible tension dont on peut ajuster la valeur et le signe, afin de compenser une légère dissymétrie des thermocouples. On aurait pu également ajouter à cet effet une résistance en parallèle à l'un des thermocouples.

4. Système à lampe à incandescence

La résistance du filament d'une lampe à incandescence augmente avec la puissance qui y est dissipée. On monte 2 lampes et deux résistances (ou 4 lampes) en pont de WEATHSTONE (figure 3) dans lequel on fait passer, conformément à la figure 3:

1. Un courant de mesure I_m qui peut être continu ou alternatif mais de fréquence nettement différente de la fréquence du signal; par la suite nous le supposons continu,

2. le courant du signal I_s de fréquence ω ,

3. le courant de référence I_r de même fréquence.

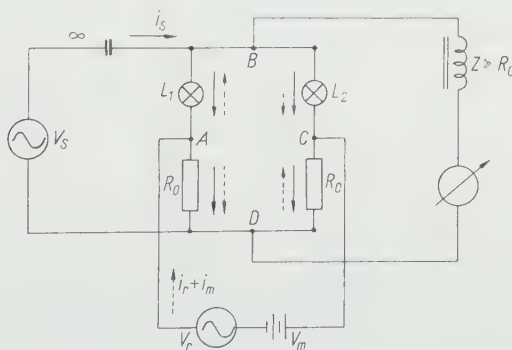


Figure 3

Redresseur synchrone avec lampes à filament en tungstène; principe.

Le pont, en équilibre avec $I_s = 0$ se déséquilibre proportionnellement au courant signal parce que la lampe L_2 dissipe la puissance $P_0 + P_d$ et la lampe L_1 la puissance $P_0 - P_d$. La température des filaments est donnée par la formule (7).

Dans le schéma de la figure 3 on pourrait également incorporer la tension continue V_m dans le circuit du signal à condition de mettre l'instrument de mesure entre A et C .

La figure 4 donne la résistance R en fonction du carré du courant efficace I^2 pour une lampe particulièrement bien adaptée à notre usage: Philips 8099 Z. C'est une lampe 4 V à ampoule vidée spécialement étudiée pour l'application comme stabilisatrice d'oscillateurs. Il suffit d'une puissance de 0,9 mW pour doubler sa résistance.

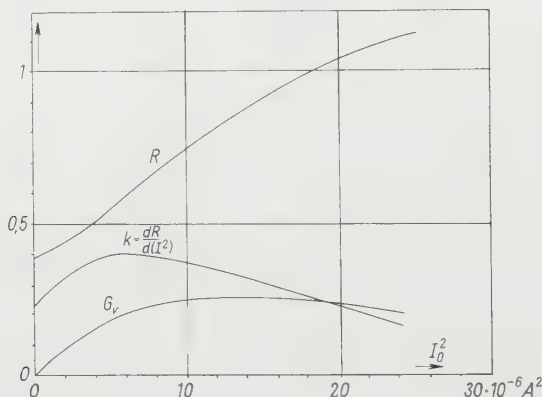


Figure 4

Lampe Philips 8099 Z; la résistance R et sa dérivée k en fonction du carré du courant I_0^2 ; gain en tension G_v d'un redresseur synchrone à deux lampes. R : $\times 10^3 \Omega$; k : $\times 10^7 \Omega/A^2$; G_v : $\times 1$.

Le point de fonctionnement en l'absence de signal sera fixé par les courants de repos: I_m et I_r :

$$I_0^2 = \left(\frac{I_m}{2}\right)^2 + \left(\frac{I_{r\text{ eff}}}{2}\right)^2.$$

Autour de ce point on peut écrire

$$R = R_0(I_0^2) + k \Delta(I^2); \quad \text{où} \quad k = \left. \frac{dR}{dI^2} \right|_{\text{pour } I=I_0}. \quad (11)$$

Pour un courant signal $i_s = I_s \sin \omega t$ nous avons pour la valeur moyenne de $\Delta(I^2)$ avec $\varphi = 0$ [voir (3a)]

$$\Delta(I^2) = \pm \frac{I_s I_r}{4} = \pm \frac{I_{s\text{ eff}} I_{r\text{ eff}}}{2}. \quad (12)$$

La tension de sortie du pont à 2 lampes devient

$$V_c = \frac{I_m}{2} \Delta R = \frac{k}{4} I_m I_{r\text{ eff}} I_{s\text{ eff}}. \quad (13)$$

Elle apparaît avec une résistance interne de sortie $R_c = R_0$. Les gains en tension et en puissance et l'impédance de conversion sont :

$$\left. \begin{aligned} G_v &= \frac{V_c}{V_{s\text{ eff}}} = \frac{k}{4 R_0} I_m I_{r\text{ eff}}, \\ G_p &= \frac{P_{c\text{ utile}}}{P_{s\text{ entrée}}} = \frac{k^2}{64} \left(\frac{I_m I_{r\text{ eff}}}{R_0} \right)^2, \\ Z_c &= \frac{V_c}{I_{s\text{ eff}}} = \frac{k}{4} I_m I_{r\text{ eff}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Pour chaque valeur de I_0 , donc de $k(I_0^2)$, le gain sera maximum pour $I_m = I_{r\text{ eff}}$ et l'expression du gain devient dans ces conditions,

$$G_{v\text{ max}} = \frac{k}{4 R_0} I_m^2 = \frac{k}{2 R_0} I_0^2, \quad Z_{c\text{ max}} = \frac{k}{4} I_m^2 = \frac{k}{2} I_0^2.$$

On voit sur la figure 4 que dans le cas de la lampe 8099 Z ce gain passe par un maximum très plat pour $I_0 = 3,6 \text{ mA}$, d'où $I_m = I_{r\text{ eff}} = 5,1 \text{ mA}$. Le gain maximum est de

$$G_{v\text{ max}} = 0,25, \quad Z_{c\text{ max}} = 21,25 \text{ V/A}, \quad G_{p\text{ max}} = 0,0156.$$

La constante de temps vaut environ 1 s.

Tableau 2

Lampe	R_0 Ω	τ approx. s	k Ω/A^2	$I_m = I_{r\text{ eff}}$ mA	G_v	Z_c V/A	G_p
8099 Z	85	1	$3,3 \cdot 10^6$	5,1	0,25	21,25	$1,56 \cdot 10^{-2}$
222 V 7 W	850	2	$51,5 \cdot 10^6$	3,15	0,15	129	$0,56 \cdot 10^{-2}$

Le maximum du gain est une caractéristique unique et très précieuse de ce type de détecteur: le gain sera en première approximation indépendant de petites variations de I_m ou I_r . (De faibles variations dans I_r peuvent en effet être introduites par le déphaseur fixant la phase de référence.)

La faible impédance de cette lampe (environ 85 Ω) rend souhaitable une adaptation et il serait très avantageux d'utiliser des lampes de résistances plus élevées. Nous avons fait des essais avec des lampes d'éclairage 115 V, 3 W et 220 V, 7 W (résistance environ 1000 Ω au point de repos optimum). La sensibilité en courant du dispositif était accrue d'un facteur de 6 (voir tableau 2), mais ces lampes ont des inconvénients qui rendent leur utilisation illusoire:

1. Les filaments sont supportés d'une façon non rigide en plusieurs points; de faibles vibrations suffisent à les déplacer ce qui modifie leur résistance: Les fluctuations du zéro du pont atteignent plusieurs millivolts.

2. Plusieurs de ces lampes sont à atmosphère gazeuse. Dans ces conditions, le temps nécessaire pour atteindre un équilibre thermique après enclenchement est de près d'une heure et la réponse à un signal d'enveloppe carrée se compose d'une exponentielle rapide ayant une constante de temps de 2 s et d'une exponentielle lente de plusieurs minutes (trainage).

La figure 5 donne un exemple d'un redresseur synchrone avec la lampe Philips 8099 Z pour une gamme de fréquence de 50 à 200 kc/s.

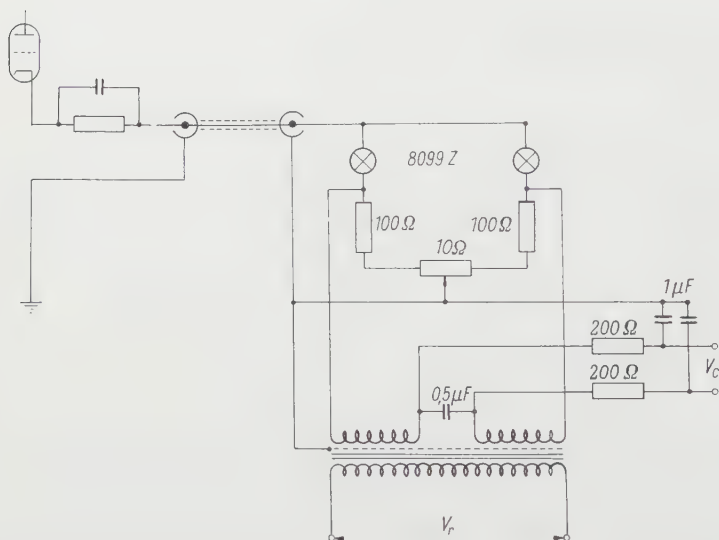


Figure 5

Redresseur synchrone avec lampes 8099 Z.

Le courant continu I_m est le courant de cathode d'une triode. La sortie de la tension continue se trouve au point milieu du transformateur de la référence, ce qui diminue beaucoup la composante alternative. Le reste est filtré par des circuits RC. Ce schéma a été conçu initialement pour des lampes à résistance de 860 Ω (lampes d'éclairage 220 V, 7 W) qui ont dû être rejetées pour les raisons déjà citées. Avec les lampes à 85 Ω (Philips 8099 Z) une attaque par transformateur serait préférable. Néanmoins le schéma de la figure 5 est agréable par sa simplicité. Il est 70 fois plus sensible en courant que le système à thermocouple.

Lorsque le pont est utilisé avec des lampes amplificatrices, il est important de l'isoler thermiquement si l'on veut avoir une très grande stabilité du zéro (dérive de 10 μV/h au maximum).

Remarque. Au lieu de mesurer la température du filament par sa propre résistance, on pourrait utiliser des lampes à 2 éléments, l'un de chauffage, l'autre de mesure. On arrive au même schéma qu'avec les thermistances à chauffage indirect (figure 6 et § 5). Les circuits de mesure et de chauffage sont séparés et on peut choisir leurs résistances judicieusement en fonction du problème à résoudre. Nous croyons que des lampes à deux filaments métalliques seraient préférables aux thermistances à chauffage indirect. A sensibilité comparable ces lampes seraient moins sensibles à des variations de la température ambiante et à des variations de I_r . De telles tubes existent dans le commerce (chronotron Bendix) avec des constantes de temps entre 6 et 120 s.

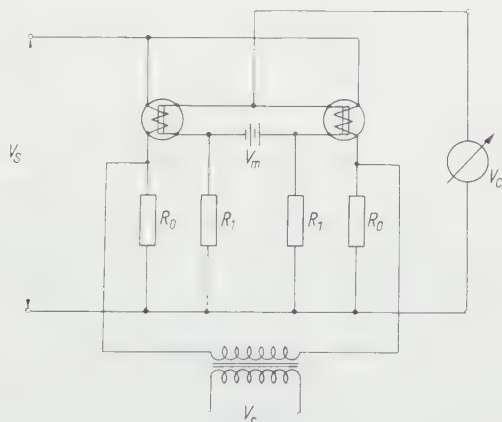


Figure 6

Redresseur synchrone avec thermistances à chauffage indirect ou lampes à deux filaments métalliques.

5. Utilisation des thermistances

Les thermistances (par exemple Philips NTC) ont un coefficient de température négatif de $-4\%/^{\circ}\text{C}$ soit environ 10 fois supérieur en valeur absolue à celui du tungstène. L'élévation de température pour une puissance donnée est pourtant 10 fois plus petite que pour le filament des lampes, de sorte que la sensibilité est du même ordre de grandeur. L'emploi de ces éléments serait très intéressant à cause des valeurs de résistances disponibles et du faible encombrement.

Nous avons fait des essais avec les éléments NTC miniatures B 8320.03 P 2k2 ayant une résistance de $2,2\text{ k}\Omega$ à 25° . Ces essais nous ont conduit à rejeter provisoirement leur emploi pour les raisons suivantes :

1. Le coefficient de température élevé rend le système sensible à de très faibles gradients de température et même à des variations de température

ambiante si les deux caractéristiques des thermistances n'ont pas été égalisées avec beaucoup de soin. Il en résulte une instabilité du zéro de quelques dixièmes de millivolts.

2. Comme pour les lampes à remplissage de gaz, le temps nécessaire pour atteindre un équilibre thermique et avoir un zéro stable, est de l'ordre d'une heure. La réponse comporte également une partie rapide et une partie lente. Un montage approprié sous vide peut certainement améliorer cet état de choses. Le type B 832004 P par exemple doit donner des résultats plus satisfaisants.

Finalement on peut utiliser des résistances NTC à chauffage indirect (figure 6). Ces éléments sont montés sous vide ce qui élimine les difficultés mentionnées. Ce montage a donné entière satisfaction. Avec les valeurs suivantes:

Elément NTC B 8 320 15 P/330 k:

$$R_0 = 100 \, \Omega, \quad R_1 = 1 \, \text{k}\Omega, \quad V_m = 9 \, \text{V}, \quad V_{r \text{ eff}} = 1 \, \text{V},$$

la constante de temps est de 20 s et la sensibilité en courant, Z_c , de 10 V/A avec une instabilité du zéro de $\pm 10 \, \mu\text{V}$.

La sensibilité peut être accrue dans de grandes proportions, au détriment de la stabilité du zéro, en augmentant V_r .

6. Conclusions

Nous avons décrit un dispositif détecteur de phase dont la réponse à un signal sinusoïdal I_s est du type $f(I_r) I_s \cos \varphi$, où I_r est un courant de référence et φ le déphasage entre I_s et I_r . Il est basé sur l'échauffement d'une résistance parcourue par ces deux courants. Selon l'élément sensible utilisé la fonction $f(I_r)$ prend les formes suivantes:

a) Thermocouples: $f(I_r) = c I_r$. Ceci est le cas de redresseurs synchrones classiques avec réponse proportionnelle au produit de deux courants. Ce principe est aussi utilisable comme Wattmètre et $\cos \varphi$ -mètre.

b) Lampes à incandescence: $f(I_r)$ part du zéro à peu près linéairement et passe ensuite par un maximum. Pour de faibles valeurs de I_r on a une réponse $C I_r I_s$, près du maximum de $f(I_r)$ la réponse est du type $C I_s$ (cas idéal pour un lock-in).

c) Thermistances à chauffage direct ou indirect: Ici aussi $f(I_r)$ part du zéro à peu près linéairement mais n'atteint en général pas de maximum.

Tous les systèmes envisagés ont en commun les avantages suivants:
Simplicité et dimensions réduites.

Une grande sécurité de marche même lorsqu'ils sont utilisés dans des appareils électroniques complexes.

Pas de vieillissement.

Constante de temps intrinsèque comprise entre 0,2 s et plusieurs minutes selon l'élément choisi.

Parmi tous les schémas envisagés, il nous semble que celui de la figure 6 réalisé avec deux filaments métalliques est le plus avantageux. Il permet de réaliser l'opération $I_r I_s \cos \varphi$ ou $C I_s \cos \varphi$, selon le point de repos choisi. De plus il a son circuit de mesure séparé du circuit de chauffage, ce qui supprime tout filtre HF.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CL. MANUS et G. BÉNÉ, Arch. Sci. 3, 19 (1950).
- [2] R. A. SMITH, Proc. Instn. electr. Engrs. [IV] 98 (1), 43 (1951).
- [3] N. A. SCHUSTER, Rev. Sci. Instr. 22, 254 (1951).
- [4] J.-P. BOREL et C. MANUS, Helv. phys. Acta 30 (4), 254 (1957).
- [5] J. FISCHER, *Theorie der thermischen Messgeräte* (Stuttgart 1931).

Zusammenfassung

Die vorliegende Notiz beschreibt verschiedene Typen von phasenempfindlichen Gleichrichtern, die alle auf dem Prinzip der Erwärmung von Widerständen beruhen, die gleichzeitig vom Signalstrom I_s und von einem Referenzstrom I_r der Frequenz ω durchflossen werden. Besitzt der Signalstrom die gleiche Frequenz ω wie der Referenzstrom, so ist die mittlere Heizleistung um $I_s I_r \cos \varphi$ höher, als wenn Signal und Referenz verschiedene Frequenz haben. Die Temperaturdifferenz wird in einer Brückenschaltung von Thermoelementen, Metallwiderständen oder Thermistoren gemessen.

Die besonderen Vorzüge dieser Gleichrichter sind: Einfachheit, Robustheit, kleine Dimensionen, Sicherheit der Funktion, keine Alterung, inhärente Zeitkonstante wählbar zwischen etwa 0,2 und 100 s. Bei den Typen mit Metallwiderständen besteht zudem ein Arbeitspunkt, für den die Ausgangsspannung unabhängig von der Referenzintensität I_r wird.

(Reçu: le 18 août 1959.)

Orthogonal Edge Polynomials in the Variational Solution of Some Boundary Layer Problems in Elasticity

By GABRIEL HORVAY, Schenectady, N. Y., U.S.A.¹⁾

1. Introduction

One of the simplest boundary layer problems for harmonic functions is illustrated in Figure 1a²⁾. On edges *II*, *III*, *IV* of the semi-infinite strip homogeneous boundary conditions

$$\Phi_{II} = \Phi_{III} = \Phi_{IV} = 0 \quad (1a)$$

are prescribed, on edge *I* the inhomogeneous condition

$$\Phi(0, y) = f(y) \quad (1b)$$

is given. [We may assume, without loss of generality, that the arbitrary prescribed function $f(y)$ is either even or odd in y .] Assuming, for instance, that f is an even function, and writing Φ as a product function

$$\Phi_n = f_n(y) g_n(x) \quad (2a)$$

$$f_n(y) = \cos \frac{n\pi y}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2b)$$

the equation

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

simplifies to

$$g'' - \frac{\pi^2 n^2}{4} g = 0 \quad (2c)$$

and has the solution

$$g_n(x) = e^{-\pi n x/2}, \quad (2d)$$

which vanishes at infinity and is unity at $x = 0$.

The solution of problem (1), (3) is then obtained by determining the Fourier coefficients A_n in the expansion

$$f(y) = \sum A_n f_n(y) \quad (4a)$$

¹⁾ General Electric Co., Metallurgy and Ceramics Research Department.

²⁾ We refer to the problem as a boundary layer problem, because nonhomogeneous boundary conditions are prescribed only along the short edge $x = 0$, and significant variations in the solution will occur only in the immediate vicinity of this edge.

and writing

$$\Phi(x, y) = \sum A_n \Phi_n = \sum A_n f_n(y) g_n(x). \quad (4b)$$

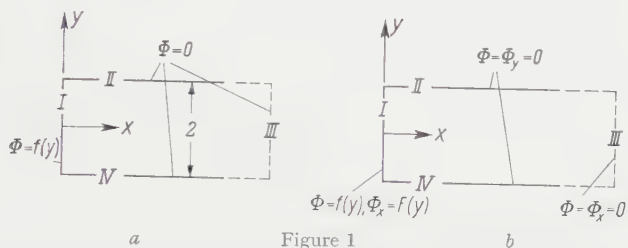


Figure 1

Problem of the semi-infinite strip: *a* for the $\nabla^2 \Phi = 0$ equation; *b* for the $\nabla^4 \Phi = 0$ equation, where nonhomogeneous boundary conditions are prescribed on edge $x = 0$, and homogeneous conditions on the other edges. Edge III is at distance $a \gg 1$ from the origin.

When we wish to treat the biharmonic problem

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (5)$$

in a similar way we run into serious difficulties. There must now be prescribed two conditions on each edge (Figure 1b). Thus we may write, similarly to problem (1), (3),

$$\text{on II and IV:} \quad \Phi = \Phi_y = 0, \quad (6a)$$

$$\text{on III:} \quad \Phi = \Phi_x = 0, \quad (6b)$$

$$\text{on I:} \quad \text{either} \quad \Phi = f(y), \quad \Phi_x = 0; \quad (6c)$$

$$\text{or} \quad \Phi = 0, \quad \Phi_x = F(y). \quad (6d)$$

[The general condition on *I* is a superposition of cases (6c, d). Without loss of generality we may restrict ourselves to case (6c), and assume that $f(y)$ is an even function.] No longer do there exist now product solutions of the problem. One may still write (the even and odd) pseudo-product solutions introduced by FADLE [1] and PAPKOVITCH [2]^{3, 4},

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n &= e^{-\gamma_n x} (\cos \gamma_n y - y \cot \gamma_n \sin \gamma_n y), \quad n = 2, 4, \dots, \\ \Phi_n &= e^{-\gamma_n x} (\sin \gamma_n y - y \tan \gamma_n \cos \gamma_n y), \quad n = 3, 5, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7a, b)$$

where

$$\gamma_n = \alpha_n + i \beta_n \quad (8a)$$

³) Numbers in brackets refer to References, page 114.

⁴) The expressions (7), subject to (8), identically satisfy (5) and (6a, b). The indices $n = 0, 1$ are reserved for the roots $\gamma = 0$ of (8b, c).

are the nonvanishing roots⁵⁾ of

$$\sin 2\gamma_n \pm 2\gamma_n = 0, \quad n = \begin{cases} 2, 4, 6, \dots, & (8b) \\ 3, 5, 7, \dots & (8c) \end{cases}$$

However, on taking the real (Re) and imaginary (Im) parts of the functions Φ_n , the product nature disappears, and therefore the coefficients in the expansions

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= \sum [A_n \operatorname{Re} + B_n \operatorname{Im}] \Phi_n(0, y), \\ F(y) &= \sum [C_n \operatorname{Re} + D_n \operatorname{Im}] \Phi_{n,x}(0, y) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

cannot be determined by the ordinary techniques of Fourier series. Although there are ways of solving the problem (see, e.g., [3-5]) the labor involved is very great.

Because of the important role equation (5) plays in stress analysis (see, e.g., [6]) and because of the need for simple approximate solutions, a variational method was developed in [7] which produces, at a modest sacrifice in accuracy, a bonafide product function behavior

$$\Phi_n = f_n(y) g_n(x) \quad (10)$$

for the biharmonic eigenfunctions, and thereby salvages also the applicability of the Fourier expansion technique. In the present report we shall throw some further light on this method which has proven useful in a great number of stress problems [7-17]. We shall also comment on some axisymmetric stress problems which are similar to but more complicated than (5), (6).

2. Biharmonic Eigenvalue Problem of the Semi-Infinite Strip

As is well known (see, e.g., [6, 7]) solving equation (5) is equivalent to finding the function Φ which extremizes the Dirichlet integral⁶⁾

$$2 E U = \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 [\Phi_{xx}^2 + 2\Phi_{xy}^2 + \Phi_{yy}^2] dy. \quad (11)$$

⁵⁾ In the problem of the very long rectangle ($a \gg 1$) only the roots with positive α_n are used. For the finite rectangle the functions with negative α_n are also needed.

⁶⁾ E is the 'elastic modulus', U the 'strain energy'. A more general expression is

$$2 E U = \iint [(\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1-\nu)(\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2)] dy dx. \quad (11')$$

In a rigorous solution the particular value of ν is immaterial, and so it may be chosen as 0, as it is in (11). An approximate solution will, of course, show dependence on ν .

We write

$$\Phi(x, y) = \sum A_k f_k(y) g_k(x), \quad (12a)$$

$$\langle () \rangle \equiv \int_{-1}^1 () dy. \quad (12b)$$

Then

$$0 = 2 E \delta U = \delta \int_0^{\tilde{}} \left[\sum \sum A_k A_l \langle f_k f_l \rangle g_k'' g_l'' + 2 \sum \sum A_k A_l \langle f_k' f_l' \rangle g_k' g_l' + \sum \sum A_k A_l \langle f_k'' f_l'' \rangle g_k g_l \right] dx. \quad (13a)$$

If we choose $f_k(y)$ orthonormal, i.e.,

$$\langle f_k f_l \rangle = \delta_{kl}, \quad (12c)$$

then (13a) reduces to

$$\delta \int_0^{\tilde{}} [\sum A_k^2 g_k''^2 + 2 \sum \sum + \sum \sum] dx = 0. \quad (13b)$$

If we may assume that the orthogonality of $f_k(y)$ insures near-orthogonality of the functions $f_j'(y)$ and of the functions $f_k''(y)$, then (13b) reduces to the diagonal sum

$$0 = 2 E \delta U \simeq \delta \sum A_k^2 \int_0^{\tilde{}} [g_k''^2 + 2 \langle f_k'^2 \rangle g_k'^2 + \langle f_k''^2 \rangle g_k^2] dx \quad (13c)$$

and the expansion coefficients appear outside of the integral sign. The functions $g_k(x)$ may now be determined, once and for all, from the Euler equation

$$g^{IV} - 2 \langle f_k'^2 \rangle g'' + \langle f_k''^2 \rangle g = 0. \quad (14a)$$

One finds the two fundamental solutions

$$g_k(x) = e^{-\alpha_k x} \left(\cos \beta_k x + \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k x \right), \quad (15a)$$

$$h_k(x) = e^{-\alpha_k x} \frac{\sin \beta_k x}{\beta_k}, \quad (15b)$$

where

$$g_k(0) = 1, \quad g_k'(0) = 0, \quad (15a')$$

$$h_k(0) = 0, \quad h_k'(0) = 1 \quad (15b')$$

and⁵⁾

$$\gamma_k \equiv \alpha_k + i \beta_k = \text{root of } \gamma^4 - 2 \langle f_k'^2 \rangle \gamma^2 + \langle f_k''^2 \rangle = 0. \quad (14b)$$

Problem (6c) is now solved by determining the expansion coefficients

$$A_k = \langle f_k | f \rangle \quad (16a)$$

in

$$f(y) = \sum A_k f_k(y) \quad (16b)$$

and writing (12a). A similar solution holds for problem (6d).

The orthonormal set $f_k(y)$ is, of course, not unique. One may, for instance, choose the polynomials⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= N_2 (1 - y^2)^2, & N_2^2 &= 3^2 \cdot 5 \cdot \frac{7}{2^8}, \\ f_3 &= N_3 (1 - y^2)^2 y, & N_3^2 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{11}{2^8}, \\ f_4 &= N_4 (1 - y^2)^2 (-1 + 11 y^2), & N_4^2 &= 3^2 \cdot 7 \cdot \frac{13}{2^{10}}, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

[they satisfy the boundary conditions (6a)] and find the approximate eigenvalues

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 2.075 + 1.143 i, \\ \gamma_3 &= 3.656 + 1.538 i, \\ \gamma_4 &= 5.259 + 2.062 i, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

as contrasted with the roots

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 2.106 + 1.125 i, \\ \gamma_3 &= 3.749 + 1.384 i, \\ \gamma_4 &= 5.356 + 1.552 i, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

of the rigorous equation (8). One may also choose the trigonometric functions

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= N_2 \cos^2 \frac{\pi}{2} y, & N_2^2 &= \frac{4}{3}, \\ f_3 &= N_3 \cos^2 \frac{\pi}{2} y \sin \frac{\pi}{2} y, & N_3^2 &= 8, \\ f_4 &= N_4 \cos^2 \frac{\pi}{2} y \left(1 - \frac{3}{2} \cos \pi y \right), & N_4^2 &= \frac{64}{15}, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

⁷⁾ For generating function, RODRIGUES' formula, see [17].

and then one finds the approximate eigenvalues

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 2.120 + 1.097 i, \\ \gamma_3 &= 3.751 + 1.316 i, \\ \gamma_4 &= 5.354 + 1.530 i, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

And of course there exist infinitely many further alternatives.

Which of the two sets, (17) or (19), constitutes a better approximation? There are various ways of judging their goodness. On comparing (17b), (19b) with the rigorous eigenvalues, the roots shown in (19b) appear to be better; but if one judges the $f_n(y)$ functions by the nearness to orthogonality of their derivatives, then one finds that, for the polynomial set, the scalar products

$$\frac{\langle f_2' f_4' \rangle}{[f_2'^2 \rangle \langle f_4'^2 \rangle]^{1/2}}, \quad \frac{\langle f_2'' f_4'' \rangle}{[\langle f_2''^2 \rangle \langle f_4''^2 \rangle]^{1/2}} \quad (20)$$

have the values

$$-0.288 = \cos 107^\circ, \quad -0.141 = \cos 82^\circ, \quad (21a)$$

while for the trigonometric set they have the values

$$-0.316 = \cos 108.5^\circ, \quad -0.164 = \cos 99.5^\circ. \quad (21b)$$

So in this respect the polynomial set appears to be better.

In Figure 2a, b we plot the derivatives

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_2'}{4 N_2} &= -y (1 - y^2), & \frac{f_2''}{4 N_2} &= -1 + 3 y^2, \\ \frac{f_4'}{26 N_4} &= y (1 - y^2) \left(1 - 2 \frac{7}{13} y^2\right), & \frac{f_4''}{26 N_4} &= 1 - 10 \frac{8}{13} y^2 + 12 \frac{9}{13} y^4 \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

of the first two even functions of the set (17), normalized, for convenience to

$$\langle f_k'^2 \rangle = 1, \quad \langle f_k''^2 \rangle = 1 \quad (22b)$$

and compare them with the (similarly normalized) rigorously orthogonal

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_2}{m_2} &= -y (1 - y^2), & \frac{P_2}{m_2} &= -1 + 3 y^2, \\ \frac{T_4}{m_4} &= y (1 - y^2) (1 - 3 y^2), & \frac{P_4}{m_4} &= 1 - 10 y^2 + 11 \frac{2}{3} y^4 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

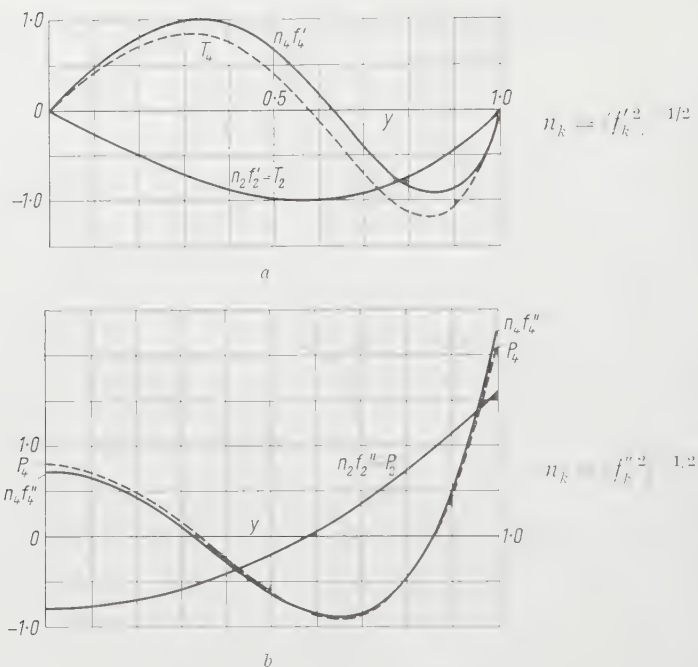


Figure 2

Plots of the first and second derivatives of the orthogonal polynomials f_2, f_4 , as given by (17a). They are compared with the rigorously orthogonal polynomials T_2, T_4 and P_2, P_4 , where T_2 is taken as $n_2 f'_2$, P_2 as $n_2 f''_2$.

functions⁸⁾; in Figures 3a, b we plot the derivatives

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 f'_2}{\pi N_2} &= -\sin \pi y, & \frac{2 f''_2}{\pi^2 N_2} &= -\cos \pi y, \\ \frac{4 f'_4}{\pi N_4} &= \sin \pi y + 3 \sin 2 \pi y, & \frac{4 f''_4}{\pi^2 N_4} &= \cos \pi y + 6 \cos 2 \pi y \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

for the set (19), and compare them with the rigorously orthogonal functions

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= -\sin \pi y, & P_2 &= -\cos \pi y, \\ T_4 &= \sin 2 \pi y, & P_4 &= \cos 2 \pi y. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

These comparisons are not refined enough to distinguish the better of the two sets (17), (19), but they do indicate that even with a 20° departure from orthogonality one obtains functions which have the proper shape.

⁸⁾ P_k are the Legendre polynomials; m_k are normalization factors.

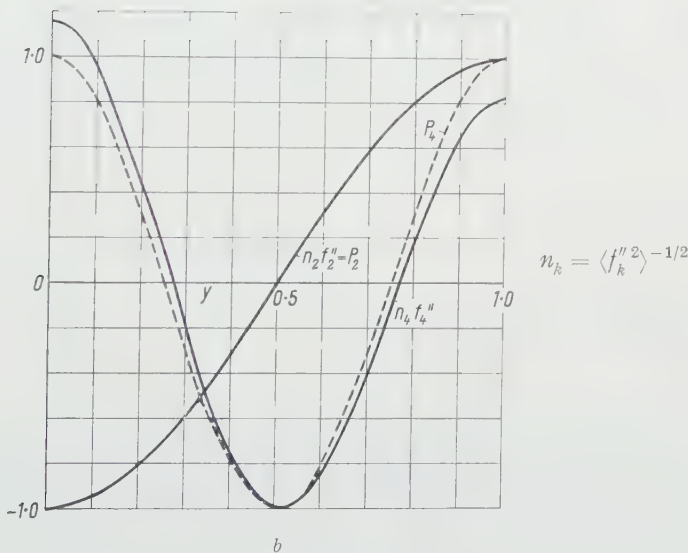
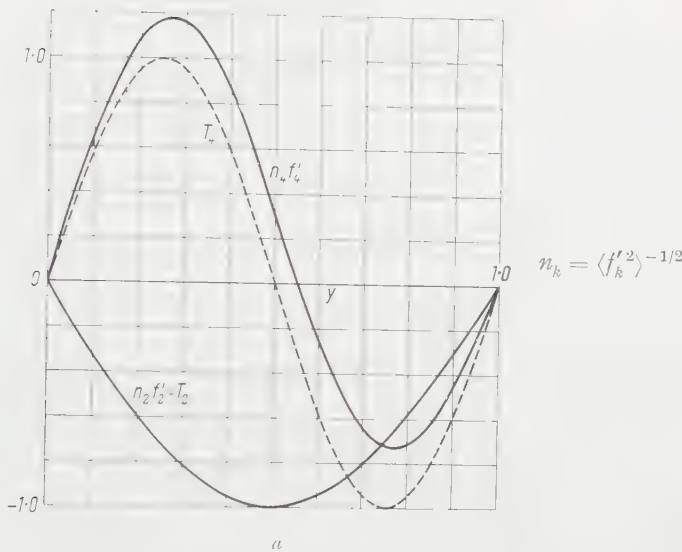


Figure 3

Plots of the first and second derivatives of the orthogonal trigonometric functions f_2, f_4 , as given by (19a). They are compared with the rigorously orthogonal trigonometric functions T_2, T_4 and P_2, P_4 , where T_2 is taken as $n_2 f'_2$, P_2 as $n_2 f''_2$.

One might also use the closeness of the solutions Φ , by (17) or (19), to the rigorous solutions of *given* boundary value problems, as the criterion for goodness. (Such a comparison has been carried out only between the polynomial approximation and the rigorous solution; the agreement obtained in the few instances investigated is very satisfactory; see [8–10, 13].)

Clearly, however, the values of the scalar products (20) constitute the proper criterion for the goodness of an approximation. If in a problem, the type (13a) integral rigorously reduces to the diagonal type (13c), then we have the rigorous solution of the problem on hand. If the deviation from orthogonality of the derivatives is large, then we have a poor approximation on hand. The goodness that may be ultimately achieved by an approximation is determined, of course, by the governing differential equation. For the biharmonic eigenvalue problem the scalar products of the derivatives can never reach zero, no matter what set is used, because the rigorous eigenfunctions (7) are non-factorable. However, the scalar products should, in some sense, tend to a lower bound as one approaches the best product function approximation to (7). It is not clear to the author how to go about finding sequences of ever-better product function approximations⁹⁾.

We again wish to point out that the ease and convenience of the variational method, as presented here and in [7–17], are entirely due to the fact that the Dirichlet integral of the problem may be written, in approximation, as the diagonal sum (13c). In consequence, only one Euler equation has to be considered for the functions $g_n(x)$, rather than an infinity of them. It is also obvious that the method is by no means restricted to the biharmonic eigenvalue problem, but may be used in other mildly skew problems. Indeed, its use has been found useful in numerous other equations; see, e.g., [18].

3. The Cylinder Problem

New features appear in the cylinder end problem. Here one is to find 'stress functions' φ and Φ which obey

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (25a, b)$$

⁹⁾ We may refer to the biharmonic eigenvalue problem as 'mildly skew', because there exist sets f_k for which the functions f'_k and f''_k are only mildly nonorthogonal. If the set $\varphi_n = f_n g_n$ is not deemed accurate enough a first approximation to the true eigenfunctions Φ_n , then one may introduce improved (K^{th}) approximations

$$\varphi_n^{(K)} = \sum_{k=-K}^K a_{n,n+k} f_{n+k} g_{n,n+k}$$

with coefficients $a_{n,n+k}$ and functions $g_{n,n+k}(x)$ determined by the conventional Ritz procedure, see [7]. But the elegance of the method now disappears.

so that the associated stresses

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \nabla^2 \varphi - \varphi_{rr} + (1 - 2\nu) \Phi_{zz} + r \Phi_{zzr}, \\ \sigma_\theta &= \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \varphi_r + (1 - 2\nu) \Phi_{zz}, \\ \sigma_z &= \nabla^2 \varphi - \varphi_{zz} - (4 - 2\nu) \Phi_{zz} - r \Phi_{zzr} + \left(4 - 2\nu + r \frac{\partial}{\partial r}\right) \nabla^2 \Phi, \\ \tau &= -\varphi_{zr} + r \Phi_{zzz} - 2(1 - \nu) \Phi_{zr} - r \nabla^2 \Phi_z \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

satisfy homogeneous boundary conditions on the surface $r = 1$, prescribed conditions on the end $z = 0$ ¹⁰:

$$\sigma_r(z, 1) = \tau_{zr}(z, 1) = 0, \quad (28a, b)$$

$$\sigma_r(\infty, y) = \tau_{zr}(\infty, y) = 0, \quad (28c, d)$$

and either

$$\sigma_z(0, r) = \text{prescribed}, \quad \tau_{zr}(0, r) = 0, \quad (29a, b)$$

or

$$\sigma_z(0, r) = 0, \quad \tau_{zr}(0, r) = \text{prescribed}. \quad (29c, d)$$

In the above, ν , the 'Poisson ratio' is a material constant ($\nu \simeq 0.3$ for most metals¹¹). The expressions (27) identically satisfy the 'equilibrium equations', and (26a, b) constitute the 'compatibility conditions'.

The foregoing problem is equivalent to extremization of the strain energy,

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{4(1 + \nu)\pi}{E} \int_0^1 dz \int_0^1 \\ &\times \left[\frac{1}{2(1 + \nu)} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 - \sigma_r \sigma_\theta + (\sigma_r + \sigma_\theta) \sigma_z + \tau_{zr}^2 \right] r dr \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

and it is shown in [20] and [22] that the method of product function approximation

$$\varphi_n(z, r) = g_n(z) f_n(r), \quad \Phi_n(z, r) = G_n(z) F_n(r), \quad (31)$$

where $f_n(r)$, $F_n(r)$ are polynomials, may still be used. But while the boundary

¹⁰) The expressions (27) without the ∇^2 terms, were first given by SADOWSKY and STERNBERG [19]. With the ∇^2 terms included they were first given by the author and J. A. MIRABAL [20]. For the differential equation approach, the ∇^2 terms may, of course, be omitted from (27) at once. In fact, there exists an alternate formulation of the problem (see, e.g., [21]), whereby equations (26a, b) are replaced by the single biharmonic equation $\nabla^4 L = 0$; and the stresses are expressed as suitable derivatives of the 'Love function' L . For a variational approach, via stress functions, the Love function method cannot be used, and the Sadowsky-Sternberg expressions must first be modified by addition of suitable ∇^2 terms. This is discussed at length in [20] and [22].

¹¹) The numerical results, given further below, are all based on $\nu = 0.3$.

conditions (28a, b) may be satisfied by the functions q_n through incorporation of a factor $(1 - r^2)^2$ in the polynomials $f_n(r)$, they can no longer be satisfied in this fashion by the functions Φ_n . For the polynomials $F_n(r)$ the process of orthogonalization, and satisfaction of (28a, b), must be carried out simultaneously. To this end, the following method was adopted in [20]. For the sake of simplicity, the q_n terms were altogether omitted from (30), and F_n was written as

$$F_n = A_{n0} + A_{n2} r^2 + \dots + A_{n, n+2} r^{n+2}, \quad (32)$$

where the coefficients A_{nk} are as yet undetermined. Then (30) reduces, in the usual way, to EULER's equation

$$\mathcal{A}_n G^{IV} - \mathcal{B}_n G'' + \mathcal{C}_n G = 0, \quad (33)$$

where \mathcal{A}_n , \mathcal{B}_n , \mathcal{C}_n are rather complicated integrals over F_n and its derivatives. The solution of equation (33) again leads to functions of type (15), and the eigenvalue equation again has the form

$$\mathcal{A}_n \gamma^4 - \mathcal{B}_n \gamma^2 + \mathcal{C}_n = 0. \quad (34)$$

The coefficients in $F_n(r)$ are now determined as follows. One coefficient is prescribed (say, it is chosen as 1), the others are fixed by conditions (28a, b) and the requirement that α_n , the real part of the root of equation (34), be an extremum. This may be called a 'generalized method' of orthogonalization. It leads to the eigenvalues

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 2.691 + 1.335 i, \\ \gamma_4 &= 5.589 + 2.464 i, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

as contrasted with the roots

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 2.722 + 1.362 i, \\ \gamma_4 &= 6.060 + 1.638 i, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

of the rigorous eigenvalue equation

$$\frac{J_0^2(\gamma)}{J_1^2(\gamma)} = -1 + \frac{2(1 - \nu)}{\gamma^2}. \quad (36)$$

It is our aim to show in the next section, that the foregoing, somewhat questionable, method of orthogonalization reduces for an eigenvalue problem related to the second-order equation $V^2 \Phi = 0$, such as the Legendre polynomials, to the conventional method. However, for the more complicated cylinder problem the method described is just one of several possibilities.

Indeed, a more suitable method of orthogonalization was discovered subsequent to writing the paper in [20]. It is shown in [22] that $F_n(r)$ may be related by a differential equation to the polynomial $f_n(r)$. Thus, incorporating in $f_n(r)$ a factor $(1-r^2)^2$ which assures satisfaction of boundary conditions (28a, b), and orthogonalizing these functions in the conventional manner one obtains a definition of orthogonalization also for the $F_n(r)$; the polynomials so obtained agree closely, but not exactly with those obtained by extremizing α_n .

4. Orthogonalization of the Legendre Polynomials

The Dirichlet integral for the

$$V^2\Phi = 0 \quad (37)$$

equation in axisymmetric spherical coordinates is

$$\left. \begin{aligned} U &= 2\pi \int_0^K r^2 dr \int_0^\pi \left[\Phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \Phi_\vartheta^2 \right] \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 \left[\Phi_r^2 + \frac{1-r^2}{r^2} \Phi_\zeta^2 \right] d\zeta \quad (\zeta \equiv \cos \vartheta) . \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Writing

$$\Phi = g(r) f(\zeta), \quad \langle () \rangle \equiv \int_{-1}^1 () d\zeta \quad (39)$$

[we know that

$$\Phi_n = \left\{ \begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix} \right\} P_n(\zeta) \quad (40)$$

are the appropriate solutions of (37), but we shall ignore this information] and imposing on $f(\zeta)$ the boundary condition

$$f(1) = 1, \quad (41)$$

(38) reduces to

$$\frac{1}{2\pi} \delta U = \delta \int_0^R [\langle f'^2 \rangle r^2 g'^2 + \langle (1-\zeta^2) f'^2 \rangle g^2] dr = 0 \quad (42)$$

and leads to the Euler equation

$$r^2 g'' + 2r g' - A g = 0 \quad (43a)$$

$$A \equiv \frac{\langle (1-\zeta^2) f'^2 \rangle}{\langle f'^2 \rangle} . \quad (43b)$$

In the spirit of the previous section, the orthogonalization of the polynomials

$$f_n(\zeta) = A_{n0} + A_{n2} \zeta^2 + \dots + A_{nn} \zeta^n \quad (44)$$

requires determination of the coefficients A_{nk} ($A_{nn} \neq 0$), so that $f_n(1)$ be 1, and that A be an extremum. In Figure 4a, b we carry out the graphical determination of A_n for $n = 2, 4$, using the same type of plots that were used in [20] for determining the coefficients of the $F_n(r)$ polynomials and the values of α_n . In the present case the plotting, of course, is superfluous; we recognize that A in (43b) is the Rayleigh quotient¹²⁾ for the Legendre polynomials; its extremization is equivalent to solving the Legendre equation

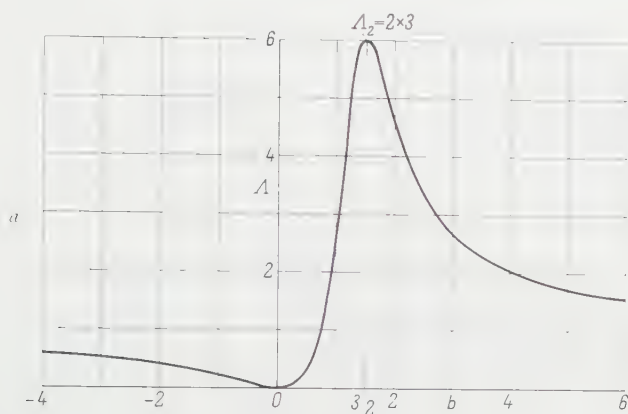
$$[(1 - \zeta^2) f']' - A f = 0. \quad (45)$$

We now recognize that, in the cylinder problem, equation (34) constitutes a generalization of the Rayleigh quotient, γ^2 taking the place of A . But the connection between the polynomials F_n and the extrema of γ_n is no longer a direct one as it is for the Legendre polynomials.

REFERENCES

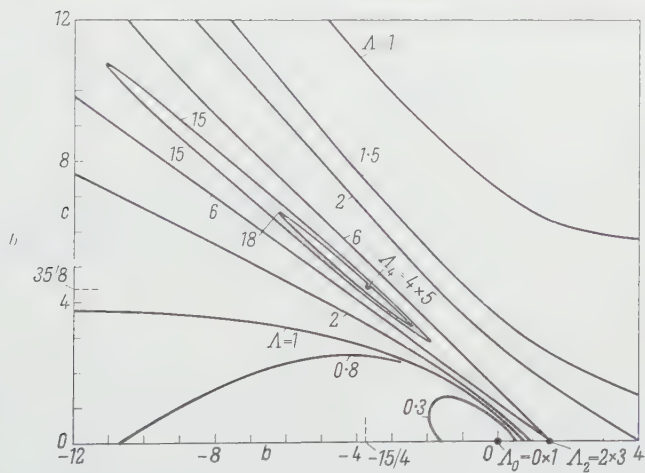
- [1] J. FADLE, *Die Selbstspannungs-Eigenwert-Funktionen der Quadratischen Scheibe*, Ing.-Arch. 2, 125 (1941).
- [2] P. R. PAPKOVITCH, *Über eine Form der Lösung des biharmonischen Problems für das Rechteck*, C. R. (Doklady) Acad. Nauk, USSR 27, 337 (1940).
- [3] R. C. T. SMITH, *The Bending of a Semi-infinite Strip*, Australian J. sci. Res. 5, 227 (1952).
- [4] G. HORVAY, *Bi-harmonic Eigenvalue Problem of the Semi-infinite Strip*, Quart. appl. Math. 15, 65 (1957).
- [5] U. WEGNER, *Berechnung von teilweise eingespannten rechteckigen Platten bei Vorgabe von Randmomenten*, Z. angew. Math. Mech. 36, 340 (1956).
- [6] S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Co., New York 1951).
- [7] G. HORVAY, *The End Problem of Rectangular Strips*, J. appl. Mech. 20, 87, 576 (1953).
- [8] G. HORVAY and J. S. BORN, *The Use of Self-equilibrating Functions in Solution of Beam Problems*, Proc. Second U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, 267 (1954).
- [9] G. HORVAY, *Thermal Stresses in Rectangular Strips*, Proc. Second U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, 313 (1954).
- [10] J. S. BORN and G. HORVAY, *Thermal Stresses in Rectangular Strips II*, J. appl. Mech. 22, 401 (1955).
- [11] G. HORVAY and J. S. BORN, *Tables of Self-equilibrating Functions*, J. Math. Phys. 33, 360 (1955).
- [12] G. HORVAY, *Stress Relief Obtainable in Sectioned Heat Generating Cylinders*, Proc. Second Midwest. Conf. Solid Mech. (Edwards Bros., Ann Arbor, Mich., 1955), p. 45.

¹²⁾ See COLLATZ [23].



$$A = \frac{\int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) (dP/d\zeta)^2 d\zeta}{\int_{-1}^1 P^2 d\zeta}$$

$$P(\zeta) = 1 - b + b\zeta^2$$



$$A = \frac{\int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) (dP/d\zeta)^2 d\zeta}{\int_{-1}^1 P^2 d\zeta}$$

$$P(\zeta) = 1 - b - c + b\zeta^2 + c\zeta^4$$

Figure 4

Determination of the coefficients in the polynomials $P_2 = 1 - b + b\zeta^2$, $P_4 = 1 - b - c + b\zeta^2 + c\zeta^4$ from the requirement that they render the Rayleigh quotient A an extremum.

- [13] G. HORVAY and J. S. BORN, *Some Mixed Boundary Value Problems of the Semi-infinite Strip*, J. appl. Mech. 24, 261 (1957).
- [14] G. HORVAY, *Some Aspects of St. Venant's Principle*, J. Mech. phys. Solids 5, 77 (1957).
- [15] G. HORVAY, *Saint Venant's Principle: A Biharmonic Eigenvalue Problem*, J. appl. Mech. 24, 381 (1957).
- [16] G. HORVAY and K. L. HANSON, *The Sector Problem*, J. appl. Mech. 24, 574 (1957); 25, 316 (1958).
- [17] K. L. HANSON and G. HORVAY, *Thermal Stresses in a Sector Prism*, Proc. Third Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, 347 (1958).
- [18] G. HORVAY and F. N. SPIESS, *Orthogonal Edge Polynomials in the Solution of Boundary Value Problems*, Quart. appl. Math. 12, 57 (1954).
- [19] M. A. SADOWSKY, *Lecture Notes on Three-dimensional Elasticity*, R. P. I., mimeographed notes, unpublished.
- [20] G. HORVAY and J. A. MIRABAL, *The End Problem of Cylinders*, J. appl. Mech. 25, 561 (1958).
- [21] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge Univ. Press 1927).
- [22] G. HORVAY, I. GIAEVER, and J. A. MIRABAL, *Thermal Stresses in a Heat Generating Cylinder*, Ing.-Arch 27, 179 (1959).
- [23] L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben* (Akademie-Verlag, Leipzig 1949).

Zusammenfassung

Homogene Randbedingungen sind längs der Kanten $y = \pm 1$ und $x = a$ ($a \gg 1$) eines Rechtecks vorgeschrieben, inhomogene längs der Kante $x = 0$. Zur Lösung der Gleichung $\nabla^4 \Phi = 0$, und besonders zur Bestimmung ihres Verhaltens in der Nähe von $x = 0$, wird von einer Minimierung des Energieintegrals

$$2 E U = \int \int [\Phi_{xx}^2 + 2 \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yy}^2] dy dx$$

ausgegangen. Wenn $\Phi(x, y)$ durch $\sum A_n \Phi_n = \sum A_n f_n(y) g_n(x)$ approximiert wird, wo die (von vornherein gewählten) $f_n(y)$ orthogonal sind und die Randbedingungen an $y = \pm 1$ erfüllen, so ist die Funktionenschar $f'_n(y)$ und die Funktionenschar $f''_n(y)$ nahezu orthogonal, und das Integral vereinfacht sich zu

$$2 E U \simeq \sum A_n^2 \int \int [\Phi_{n,xx}^2 + 2 \Phi_{n,xy}^2 + \Phi_{n,yy}^2] dy dx.$$

Nachdem über y integriert wird, kann man die Funktionen $g_n(x)$ als Lösungen einer einfachen Euler-Gleichung erhalten; die Koeffizienten A_n können mittels der Fourier-Entwicklungs-Formel bestimmt werden, und das Problem ist gelöst. In dem elastischen Endproblem des Zylinders kann man das Integral U durch Einführung geeigneter Produktfunktionen $\Phi_n = F_n(r) G_n(z)$ in gleicher Weise vereinfachen; jedoch findet man, dass $F_n(r)$ sich nicht in der üblichen Weise orthogonalisieren lässt; man benutzt zur Orthogonalisierung eine Verallgemeinerung der Idee des Rayleighschen Quotienten.

(Received: July 23, 1959.)

First and Second Order Distributions of a Sine Wave of Random Phase plus Gaussian Noise

By ROY LEIPNIK, China Lake, California, U.S.A.¹⁾

Introduction

One of the simplest types of random signal encountered in communications work is the sine wave of known amplitude and frequency, and uniformly distributed random phase. The first order distribution of this stationary process is well known. The second order density^{1) 2)} is a divergent series [2]; however the cumulative distribution is known and convergent [2].

A modicum of realism is injected into the study of detection of such random signals by addition of a statistically independent Gaussian random noise. RICE [3, 4] has made an extended study of this problem, deriving the characteristic function of the second-order distribution and a power series for the first order distribution, and numerous other properties of this signal plus noise, such as envelope, false-alarm, and zero-crossing probabilities. However, he has not given the second-order distribution itself. It may therefore be of interest to write down an explicit formula for the second-order distribution in terms of rapidly converging Bessel series, and a like formula for the first-order distribution. The main tools contain classical integration formulae and a generous application of Bessel function addition formulae. In view of the relatively simple results, a more elegant derivation should be obtainable, but the author was unable to find it.

1. The Rice Formula

Let $y(t)$ be stationary Gaussian noise with auto-covariance function $a(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]$, and let

$$x(t) = P \cos(\omega t + \theta) + y(t), \quad (1)$$

where the phase angle θ has a uniform distribution and is statistically independent of $y(t)$. We then have

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= E[e^{i u x(t) + i v x(t+\tau)}] \\ &= J_0\left(P\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega\tau}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}[a(0)(u^2 + v^2) + 2a(\tau)uv]\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ Michelson Laboratory, U.S. Naval Ordnance Test Station.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 126.

for the characteristic function (Fourier transform) of the second-order density $p(x_1, x_2)$, so that

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u, v) e^{-i u x_1 - i v x_2} du dv, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u, 0) e^{-i u x} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(Pu) \exp\left\{-\frac{1}{2} a(0) u^2\right\} e^{-i u x} du. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. An Auxiliary Result and the First Order Distribution

Both the density $p(x)$ and the joint density $p(x_1, x_2)$ depend on evaluation of a class of integrals, now introduced. Let the function F_n be defined by

$$F_n(a, b, \sigma^2; z) = J_n(a z) \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2} - i b z\right), \quad (1)$$

where n is an integer, a is real, b, z , are complex, and $\sigma^2 \geq 0$. We wish to obtain

$$G_n(a, b, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(a, b, \sigma^2, i) dt, \quad (2)$$

and will proceed by contour integration. Since the integrand is analytic in the finite z -plane, the complex integral around the rectangular contour with vertices $(-M, N, N + i c, -M + i c)$ is zero for all real $c \neq 0$. We prove that the vertical contributions tend to zero as $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, so that the open contour $(-\infty, \infty)$ can be displaced to $(-\infty + i c, \infty + i c)$ without changing the result.

The contribution from the segment $[N, N + i c]$ can be written as the real integral

$$\left. \begin{aligned} V_n &= i \int_0^c J_n(a N + a y i) \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} (N + i y)^2 - i b (N + i y)\right] dy \\ &= i \int_0^c J_n(a N + a y i) \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} (N^2 - y^2) + b_1 y + b_2 N\right] \\ &\quad \times \exp\{i (b_2 y - b_1 N - \sigma^2 N y)\} dy, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where $b = b_1 + i b_2$.

From the classical inequality [5]

$$|J_\nu(w)| \leq \frac{|w/2|^{|\nu|}}{\Gamma(|\nu| + 1)} \exp(|\operatorname{Im} w|), \quad (4)$$

we deduce

$$\left. \begin{aligned} |V_n| &\leq \int_0^c \frac{|a/2|^{|\nu|} (N^2 + y^2)^{|\nu|/2}}{|\nu|!} \exp\left[|a y| - \frac{\sigma^2}{2} (N^2 - y^2) + b_1 y + b_2 N\right] dy \\ &\leq \frac{|a/2|^{|\nu|}}{|\nu|!} (N^2 + c^2)^{|\nu|/2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 N^2}{2} + b_2 N\right) \int_0^c \exp\left(|a y| + b_1 y + \frac{\sigma^2 y^2}{2}\right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

For fixed a, b_1, σ^2, c , the integral is finite and the factor

$$(N^2 + c^2)^{|\nu|/2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 N^2}{2} + b_2 N\right) \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

for fixed $\sigma^2 > 0, c, n, b_2$. Hence $V_N \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$. Similarly the contribution from $[-M + i c, -M]$ tends to zero as $M \rightarrow \infty$. Thus

$$\int_{\sim}^{\infty} F_n(a, b, \sigma^2; t) dt = \int_{\sim}^{\infty + i c} F_n(a, b, \sigma^2; z) dz = \int_{\sim}^{\infty} F_n(a, b, \sigma^2; t + i c) dt. \quad (6)$$

We now choose c to simplify the integration. Let $c = -b_1/\sigma^2$ and check that

$$\left. \begin{aligned} F_n(a, b, \sigma^2; t + i c) &= J_n\left[a\left(t - \frac{b_2}{\sigma^2}\right) + \frac{a}{\sigma^2}(b_2 - i b_1)\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\left(t - \frac{b_2}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{(b_2 - i b_1)^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hence replacing $t - b_2/\sigma^2$ by t_1 ,

$$G_n(a, b, \sigma^2) = \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right) \int_{\sim}^{\infty} J_n\left(a t - \frac{i b a}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt. \quad (8)$$

Next we call ([5], p. 394) on the addition formula

$$J_n\left(a t - \frac{i b a}{\sigma^2}\right) = \sum_{m=\sim}^{\sim} J_m(a t) J_{n-m}\left(-\frac{i a b}{\sigma^2}\right) \quad (9)$$

and the generalized Weber formula

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J_m(a t) \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt \\ \left| \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma^2}\right) I_{m/2}\left(\frac{a^2}{4\sigma^2}\right), \quad m \text{ even}, \right. \\ \left. \left| 0, \quad m \text{ odd}. \right. \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

If termwise integration is valid, we have

$$G_n(a, b, \sigma^2) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{4\sigma^2}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{n-2q}\left(-\frac{iab}{\sigma^2}\right) I_q\left(\frac{a^2}{4\sigma^2}\right). \quad (11)$$

In particular, for $n=0$, $a=P$, $b=x$, $\sigma^2=a(0)$, we find

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{a(0)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{P^2}{4a(0)} - \frac{x^2}{2a(0)}\right) \\ &\quad \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{2q}\left(\frac{iPx}{a(0)}\right) I_q\left(\frac{P^2}{4a(0)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a(0)}\right) \exp\left(-\frac{P^2}{4a(0)}\right) \\ &\quad \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q I_{2q}\left(\frac{Px}{a(0)}\right) I_q\left(\frac{P^2}{4a(0)}\right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

It is the occurrence of both $P/a(0)$ and $P^2/a(0)$ in the density formula which makes asymptotic expansions difficult. Fortunately, the I_n functions are extensively tabulated and the convergence of the above series is reasonably rapid. (It is interesting to compare the result above with the power series expansions derived by RICE.) If $P=0$, we have the noise only, and

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a(0)}\right)$$

as it should.

To justify our operations above, it is sufficient to prove that $B < \infty$, where

$$B = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |J_m(at)| \left| J_{n-m}\left(-\frac{iab}{\sigma^2}\right) \right| \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt. \quad (13)$$

By the inequality (4) and the integral [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^m \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{(|m|+1)/2} \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}\right), \quad (14)$$

we infer that

$$B \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \frac{a t}{2} \right|^{|m|}}{|m|!} \cdot \frac{\left| \frac{a b}{2 \sigma^2} \right|^{|n-m|} \exp\left(-\frac{|a b_1|}{\sigma^2}\right)}{|n-m|!} \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt \quad (15)$$

$$= \exp\left(-\frac{|a b_1|}{\sigma^2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \frac{a}{2} \right|^{|m|} \left| \frac{a b}{2 \sigma^2} \right|^{|n-m|}}{|m|! |n-m|!} \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{(|m|+1)/2} \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}\right).$$

Now split the last sum into the three parts corresponding to $m \geq \max(n, 0)$, $m \leq \min(n, 0)$, and $\min(n, 0) < m < \max(n, 0)$. Each of the first two is easily seen to converge by the ratio test, and the third is a finite sum. Hence (14) and its corollary (12) are valid.

3. The Second-Order Distribution

We now apply the integral formula (11) of the previous section to the more difficult task of evaluating the second-order density given by (2) and (3) of section 1 as

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(P \sqrt{u^2 + v^2 + 2 u v \cos \omega \tau}) \quad (1)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} [a(0)(u^2 + v^2) + 2 a(\tau) u v] - i x_1 u - i x_2 v\right\} du dv.$$

Since the matrices

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & 1 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} a(0) & a(\tau) \\ a(\tau) & a(0) \end{vmatrix}$$

are mutually commuting, we can simultaneously diagonalize the two quadratic forms in u, v which enter (1). Application of the $\pi/4$ rotation

$$u = \frac{v_1 + u_1}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{v_1 - u_1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

yields

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(P \sqrt{u_1^2 (1 - \cos \omega \tau) + v_1^2 (1 + \cos \omega \tau)}) \quad (3)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} [u_1^2 (a(0) - a(\tau)) + v_1^2 (a(0) + a(\tau))] \right. \\ \left. - i u_1 \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) - i v_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)\right\} du_1 dv_1.$$

From the addition formula ([5], p. 361)

$$J_0 \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2 - 2 z_1 z_2 \cos \theta} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1) J_m(z_2) \cos(m \theta) \quad (4)$$

for real z_1, z_2 , we have, taking $\theta = \pi/2$, $z_1^2 = u_1^2 (1 - \cos \omega \tau)$, $z_2^2 = v_1^2 (1 + \cos \omega \tau)$

$$\left. \begin{aligned} J_0 \left(P \sqrt{u_1^2 (1 - \cos \omega \tau) + v_1^2 (1 + \cos \omega \tau)} \right) \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m \left(P \sqrt{2} u_1 \sin \frac{\omega \tau}{2} \right) J_{2m} \left(P \sqrt{2} v_1 \cos \frac{\omega \tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

If termwise integration is justified, we insert (5) into (3) and obtain

$$\left. \begin{aligned} p(x_1, x_2) = \frac{1}{4 \pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m G_{2m} \left(P \sqrt{2} \sin \frac{\omega \tau}{2}, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, a(0) - a(\tau) \right) \\ \times G_{2m} \left(P \sqrt{2} \cos \frac{\omega \tau}{2}, \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, a(0) + a(\tau) \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2 \pi \sqrt{a^2(0) - a^2(\tau)}} \exp \left(- \frac{P^2 (a(0) - a(\tau) \cos \omega \tau)}{2 (a^2(0) - a^2(\tau))} \right) \\ &\times \exp \left(- \frac{a(0) (x_1^2 + x_2^2) - 2 a(\tau) x_1 x_2}{2 (a^2(0) - a^2(\tau))} \right) \\ &\times \sum_{m,q,r=-\infty}^{\infty} (-1)^m I_{2m-2q} \left(\frac{P (x_1 - x_2) \sin \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) - a(\tau)} \right) \\ &\times I_{2m-2r} \left(\frac{P (x_1 + x_2) \cos \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) + a(\tau)} \right) I_q \left(\frac{P^2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{2 (a(0) - a(\tau))} \right) \\ &\times I_r \left(\frac{P^2 \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}}{2 (a(0) + a(\tau))} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

on combining terms and using the relation $J_n(-iz) = (-i)^n I_n(z)$.

Fortunately, the triple series above is reducible to a double series, which in turn is reducible to an ordinary series. We note the addition formula ([5], p. 361)

$$\left. \begin{aligned} I_k \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2 w_1 w_2 \cos \theta} \right) \cos \left[k \tan^{-1} \left(\frac{w_2 \sin \theta}{w_1 - w_2 \cos \theta} \right) \right] \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_{j+k}(w_1) I_j(w_2) \cos j \theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

For $\theta = \pi/2$, we find

$$I_k \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \right) \cos \left(k \tan^{-1} \frac{w_2}{w_1} \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_{2j+k}(w_1) I_{2j}(w_2) (-1)^j. \quad (9)$$

For fixed q, r , take

$$j = m - q, \quad k = 2q - 2r.$$

$$w_2 = \frac{P(x_1 - x_2) \sin \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) - a(\tau)}, \quad w_1 = \frac{P(x_1 + x_2) \cos \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) + a(\tau)},$$

and check that

$$\left. \begin{aligned} I_{2q-2r}(\varrho_0) \cos((2q-2r)\varphi_0) &= (-1)^q \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \\ &\times I_{2m-2q} \left(\frac{P(x_1 - x_2) \sin \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) - a(\tau)} \right) I_{2m-2r} \left(\frac{P(x_1 + x_2) \cos \frac{\omega \tau}{2}}{a(0) + a(\tau)} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where

$$\varrho_0^2 = w_1^2 + w_2^2, \quad \varphi_0 = \tan^{-1} \frac{w_2}{w_1}.$$

Inserting this in the previous triple series yields the double series

$$D = \sum_{q,r=-\infty}^{\infty} (-1)^q I_{2q-2r}(\varrho_0) \cos((2q-2r)\varphi_0) I_q(w_3) I_r(w_4), \quad (11)$$

where

$$w_3 = \frac{P^2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{2(a(0) - a(\tau))}, \quad w_4 = \frac{P^2 \cos^2 \frac{\omega \tau}{2}}{2(a(0) + a(\tau))}.$$

If the above series converges absolutely, it can be re-ordered. Replacing the sum over q and r by a sum over q and $n = q - r$, we have

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n}(\varrho_0) \cos(2n\varphi_0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q I_q(w_3) I_{q-n}(w_4). \quad (12)$$

Invoking the addition formula (9) with $\theta = \pi$, $k = -n$, we obtain

$$I_{-n}(w_3 + w_4) = \sum_q I_q(w_3) I_{q-n}(w_4) (-1)^q. \quad (13)$$

Since $I_n(z) = I_{-n}(z)$, we have the ordinary series

$$\left. \begin{aligned} D &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(w_3 + w_4) I_{2n}(\varrho_0) \cos(2n\varphi_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(w_3 + w_4) I_{2n}(\varrho_0) \cos(2n\varphi_0), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ for $n \geq 1$.

Combining the preceding formulae, we have explicitly

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi (a^2(0) - a^2(\tau))^{1/2}} \exp\left(-\frac{a(0)(x_1^2 + x_2^2) - 2a(\tau)x_1x_2}{2(a^2(0) - a^2(\tau))}\right) \cdot \exp\left(-\frac{P^2(a(0) - a(\tau)\cos\omega\tau)}{2(a^2(0) - a^2(\tau))}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n\left(\frac{P(a(0) - a(\tau)\cos\omega\tau)}{2(a(0) - a^2(\tau))}\right) \cdot \cos\left[2n \tan^{-1}\left(\frac{(x_1 - x_2)(a(0) + a(\tau))}{(x_1 + x_2)(a(0) - a(\tau))} \tan\frac{\omega\tau}{2}\right)\right] \cdot I_{2n}\left(P \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 \sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{(a(0) - a(\tau))^2} + \frac{(x_1 + x_2)^2 \cos^2\frac{\omega\tau}{2}}{(a(0) + a(\tau))^2}}\right) \quad (15)$$

Note that if $P = 0$, so that only the noise is present, we have

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi (a^2(0) - a^2(\tau))^{1/2}} \exp\left(-\frac{a(0)(x_1^2 + x_2^2) - 2a(\tau)x_1x_2}{2(a^2(0) - a^2(\tau))}\right), \quad (16)$$

which is the known second-order joint distribution of gaussian noise (bivariate normal distribution). The resemblance between the series (12) of section 2 for $p(x)$ and the series (15) for $p(x_1, x_2)$ is not surprising.

In the special, but important case where $a(\tau) = 0$ for $\tau \neq 0$ (white noise) the formula (15) simplifies to

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi a(0)} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a(0)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{P^2}{2a(0)}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n\left(\frac{P^2}{2a(0)}\right) \cos\left[2n \tan^{-1}\left(\frac{(x_1 - x_2) \tan\frac{\omega\tau}{2}}{x_1 + x_2}\right)\right] \cdot I_{2n}\left(\frac{P}{a(0)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\omega\tau}\right). \quad (17)$$

A larger class of Gaussian noise processes for which the distribution (15) simplifies is that defined by $a(\tau) = a(0) e^{-d\tau} \cos\beta\tau$.

The operations performed above are valid in case $c_1, c_2, c_3 < \infty$, where c_1, c_2 , and c_3 are defined by

$$c_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |J_{2m}(k_1 u_1)| |J_{2m}(k_2 u_2)| \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2} u_1^2\right) \exp\left(-\frac{\sigma_2^2}{2} u_2^2\right) du_1 du_2, \quad (18)$$

$$c_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |I_{2m-2q}(a)| |I_{2m-2r}(b)| |I_q(c)| |I_r(d)| \quad (19)$$

$$c_3 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |I_{2q-2r}(a)| |I_q(b)| |I_r(c)| \quad (20)$$

for real $k_1, k_2, \sigma_1, \sigma_2, a, b, c, d$.

We have

$$\left. \begin{aligned} c_1 &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \frac{k_1 u_1}{2} \right|^{|2m|}}{|2m|!} \cdot \frac{\left| \frac{k_2 u_2}{2} \right|^{|2m|}}{|2m|!} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2} u_1\right) \exp\left(-\frac{\sigma_2^2}{2} u_2\right) du_1 du_2 \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \frac{k_1 k_2}{4} \right|^{|2m|}}{(|2m|!)^2} \left(\frac{2}{\sigma_1^2}\right)^{(|2m|+1)/2} \left(\frac{2}{\sigma_2^2}\right)^{(|2m|+1)/2} \Gamma_2\left(\frac{2|m|+1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

from (4) and (14) of section 13. The ratio of successive terms is of the order of $\text{const } (1/m^2) \rightarrow 0$, so the series converges. Likewise

$$\left. \begin{aligned} c_2 &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{|2m-2q|} \left(\frac{b}{2}\right)^{|2m-2r|}}{|2m-2q|! |2m-2r|!} \\ &\quad \cdot \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{|q|}}{|q|!} \cdot \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{|r|}}{|r|!} \exp(|a| + |b| + |c| + |d|) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

and

$$c_3 \leq \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{|2q-2r|} \left(\frac{b}{2}\right)^{|q|} \left(\frac{c}{2}\right)^{|r|}}{|2q-2r|! |q|! |r|!} \exp(|a| + |b| + |c|). \quad (23)$$

Now split the threedimensional lattice of summation in (23) into the 18 disjoint subregions determined by choosing signs of $m, 2m-2q, 2m-2r, q, r$. In each of these, we have a convergent series. For example, when $m \geq 0, r \geq m, q \geq m$ the essential part is

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{\alpha^m \beta^q \gamma^r}{(2q-2m)! (2r-2m)! r! q!} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \beta^{q+m} \gamma^{r+m}}{(2q)! (2r)! (m+q)! (m+r)!}. \end{aligned}$$

Since

$$\frac{(m+q)!}{m!q!} \geq 1,$$

the latter is

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha \beta \gamma)^m \beta^q \gamma^r}{(2q)!(2r)!m!q!m!r!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha \beta \gamma)^m}{(m!)^2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\beta^q}{q!(2q)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^r}{r!(2r)!},$$

the product of three convergent series.

Similarly, the twodimensional lattice of summation in (23) can be split into 6 disjoint subregions determined by the signs of q , r , $2q - 2r$, in each of which we have a convergent series. This concludes the validation of the whole chain of operations by which formula (15) was derived.

The author wishes to express his gratitude to Dr. D. E. ZILMER of the Michelson Laboratory, USNOTS, China Lake, California, for his kind assistance, and to Dr. JULIUS SIEKMANN for providing a German summary.

REFERENCES

- [1] J. F. BARRETT and D. G. LAMPARD, *An Expansion for some Second-order Noise Distributions and Its Application to Noise Problems*, Trans. IRE 2 (1), 10-15 (1955).
- [2] ROY LEIPNIK, *Integral Equations, Biorthonormal Expansions, and Noise*, J. Soc. Indust. appl. Math. 7 (1), 6-30 (1959).
- [3] S. O. RICE, *Mathematical Analysis of Random Noise*, Bell Syst. tech. J. 23, 282-332 (1944); 24, 46-156 (1945).
- [4] S. O. RICE, *Statistical Properties of a Sine-wave plus Random Noise*, Bell. Syst. tech. J. 27, 109-157 (1948).
- [5] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge 1952), p. 49.
- [6] D. BIERENS DE HAAN, *Nouvelles Tables d'Intégrals Définies* (Stechert, New York 1939), p. 122.

Zusammenfassung

Die Verteilungen erster und zweiter Ordnung einer Sinuswelle fester Amplitude und Frequenz sowie mit gleichmässig verteilter Zufallsphase und Gaußschem Zufallsgeräusch werden explizit berechnet durch Fourier-Umkehrung einer Formel nach RICE. Wir erhalten als Ergebnis Besselsche Reihen multipliziert mit Gauss-Verteilungen.

(Received: August 1, 1959.)

Heat-Transfer Near the Stagnation Point of a Body of Revolution in the Presence of a Magnetic Field

By RUDOLF X. MEYER¹), Los Angeles, Calif., U.S.A.

1. Introduction

The problem considered here is schematically indicated in Figure 1. An electrically conducting, viscous, incompressible fluid flows in the direction of the negative z -axis towards a flat plate located at $z = 0$. The motion is modified by the presence of a magnetic field, which can be thought of as being produced in part by a suitable current distribution outside the flow field (i.e. at $z \leq 0$) and in part by the currents induced in the fluid itself.

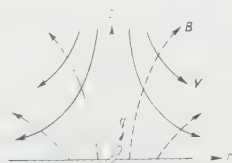


Figure 1

Streamlines and magnetic field lines (schematic).

It is assumed that the motion is steady and rotationally symmetric with the z -axis as axis of symmetry.

The magnetic field considered in this paper has the property that its field strength vanishes as $z \rightarrow +\infty$. Furthermore, as is known from the corresponding non-magnetic case, the viscous forces are negligible compared with inertial forces at a large distance from the flat plate. Therefore, in this region, the flow is approximated by the well-known stagnation point flow solution of an inviscous fluid. As will appear in the course of the analysis, the origin of the inviscous, non-magnetic stagnation point flow is displaced in the positive direction of the z -axis by an amount which depends upon the magnetic field strength. This solution serves as a boundary condition to the actual flow at $z = \infty$.

The temperature T_∞ of the fluid at $z = \infty$ is assumed to be uniform; similarly, it is assumed that the plate be kept at a uniform temperature T_0 . The properties of the fluid, i.e. its density ρ , electric conductivity σ , magnetic

¹) Space Technology Laboratories, Inc.

permeability μ , viscosity η , thermal conductivity κ and the specific heat per unit mass c are assumed to be constant.

The principle aim of this paper is to determine as a function of the radius r the rate of heat transfer from the fluid to the plate. The distributions of velocity, magnetic field strength and temperature are also found and explicitly computed for some values of the characteristic parameters. The rationalized mks system of units is employed.

2. Maxwell's Equations and Momentum Equation

MAXWELL's equations for steady state,

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

(\mathbf{H} magnetic field strength, \mathbf{B} magnetic induction, \mathbf{j} current density, \mathbf{E} electric field strength) are supplemented by the constitutive equation

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4)$$

(μ magnetic permeability) and Ohm's law for moving isotropic media,

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5)$$

(σ electric conductivity, \mathbf{v} velocity of the fluid).

Conservation of momentum is expressed by the Navier-Stokes equation for an incompressible fluid supplemented by the term $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ which represents the magnetic force per unit volume acting on the fluid (other forces being negligible in the considered applications),

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6)$$

(ρ density, p pressure, η viscosity). Together with the continuity equation

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

these equations suffice to determine, for instance, the velocity and the current distribution in the fluid. Since the properties of the fluid are constant, the energy equation is not required at this point; it is used later to determine the temperature distribution and heat transfer characteristics, taking into account convective and conductive heat transfer, Joule heating and viscous dissipation in the fluid.

In the present problem, by reason of symmetry, the derivatives with respect to the azimuth φ vanish. Furthermore,

$$j_r = j_z = 0, \quad (8a)$$

$$B_\varphi = 0, \quad (8b)$$

$$v_\varphi = 0, \quad (8c)$$

$$E_r = E_z = E_\varphi = 0, \quad (8d)$$

where the subscripts indicate the components in cylindrical coordinates. The postulate of symmetry expressed by equations (8) is justified by showing that these equations satisfy both the basic equations and the boundary conditions of the problem. Equation (8a) means that the current flows in circular loops about the z -axis. Equation (8b) follows from it by an application of Stokes theorem to equations (1) and (4). It also follows from equation (8a) that the magnetic force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ has no φ -component and that therefore the fluid, which initially (i.e. at $z = \infty$) has no φ -component of velocity, will never acquire one. Furthermore, since in Ohm's law, equation (5), \mathbf{j} and $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ have only φ -components, it follows that consistent with equation (8a) \mathbf{E} can have at most a φ -component. But even E_φ must vanish, as follows from equation (2), which holds at all points.

Eliminating the current density from equations (1) and (6) by means of Ohm's law,

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu \sigma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (9)$$

$$\varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\mu} (\text{curl } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (10)$$

Solving these two equations together with equations (3) and (7), is equivalent to solving the system of equations (1) to (7), since $\mathbf{E} \equiv 0$.

Written in component form,

$$-\frac{\partial}{\partial r} B_z + \frac{\partial}{\partial z} B_r = \mu \sigma (v_z B_r - v_r B_z), \quad (11a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{B_z}{\mu} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ - \frac{B_r}{\mu} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11c)$$

the corresponding equations for the other components being satisfied trivially, by virtue of the symmetry relations equations (8). Furthermore,

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (11d)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (11e)$$

A. Similarity Solution

An exact solution of the set of equations (11) can be found by substituting the trial solution

$$B_r = r g'(z), \quad B_z = -2 g(z), \quad (12a)$$

$$v_r = r f'(z), \quad v_z = -2 f(z), \quad (12b)$$

$$p_0 - p = h(z) + r^2 k(z), \quad (12c)$$

where f, g, h, k are as yet unknown functions of z alone and where the pressure is normalized by means of the pressure p_0 at the origin. Equations (12) are the rotationally symmetric analogue to NEURINGER's and MC ILROY's [1]²⁾ solution for the two-dimensional case, and are similar to the non-magnetic case (e.g. SCHLICHTING [3]), except that $k(z)$ can be replaced by a constant in the latter case.

Equations (11d) and (11e) are already satisfied by the choice of \mathbf{B} and \mathbf{v} . Substitution into equation (11a) results in an equation in which all terms are proportional to r , yielding therefore,

$$g'' + 2\mu\sigma(fg' - f'g) = 0. \quad (13a)$$

Similarly, equation (11b) requires that

$$\nu f''' + 2ff'' - (f')^2 - \frac{2}{\mu\varrho} g g'' = -\frac{2k}{\varrho}, \quad (13b)$$

where $\nu = \eta/\varrho$ is the kinematic viscosity. Equation (11c) yields terms which are independent of r and others which are proportional to r^2 . The coefficients of both terms must vanish separately, giving

$$2\nu f'' + 4ff' - \frac{1}{\varrho} h' = 0$$

or integrated

$$h - \bar{h} = 2\varrho(f^2 + \nu f') \quad (13c)$$

and

$$g g'' - \mu k' = 0$$

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 145.

or integrated,

$$k - \bar{k} = \frac{1}{2\mu}(g')^2, \quad (13d)$$

where \bar{h} and k are constants of integration. The trial solution therefore results in four equations which the functions f, g, h, k must satisfy. The manner in which the external current loops at $z \leq 0$ must be distributed, in order to produce the magnetic field required by the similarity solution, is not examined in this paper. It is noted that it follows from equations (12) that

$$j_\theta = \sigma(v_z B_r - v_r B_z) = 2\sigma r(f'g - fg')$$

and therefore the current density in the fluid is proportional to the radius. The integrated magnetic field strength due to these currents alone diverges for a stagnation-point flow extending to infinity in the radial direction. However, in any actual application to bodies of revolution, the radial extension of the stagnation-point region is finite, viz. of the order of the radius of curvature of the nose of the body. The question of how to distribute the external current loops (electromagnetic coils) is therefore coupled with the problem of the flow in the large which must include the region outside the vicinity of the stagnation-point.

B. Boundary Conditions

The simplest boundary condition which can be imposed on the magnetic field at $z = 0$ is to require that $B_z(0) = B_0$, where B_0 is a given constant. This results in a boundary condition on the function g ,

$$g(0) = -\frac{1}{2}B_0. \quad (14a)$$

The radial component B_r cannot be independently prescribed; it is obtained as a part of the solution.

Since $\mathbf{E} \equiv 0$ and since there is no current component normal to the plate, it is noted that it is immaterial for the solution whether the surface of the body be electrically conducting or not.

Both components of the velocity must vanish on the surface. Consequently,

$$f(0) = 0, \quad (14b)$$

$$f'(0) = 0. \quad (14c)$$

Furthermore, from the definition of p_0 as the pressure at the origin, $h(0) = 0$, and therefore from equation (13c)

$$\bar{h} = 0.$$

At $z = \infty$ the following boundary conditions are imposed: B_z is required to vanish, yielding the condition

$$g(\infty) = 0. \quad (14d)$$

For a suitably well-behaved function $g(z)$, the latter condition implies that $g'(\infty) = 0$ and that therefore also $B_r(r, z \rightarrow \infty) = 0$.

At a large distance from the plate, the condition is imposed that the flow be identical with the inviscous, non-magnetic stagnation-point flow. Therefore $v_r(\infty) = a r$, hence

$$f'(\infty) = a, \quad (14e)$$

where the constant ' a ' is determined by the characteristics of the flow outside the stagnation point region. It follows by integration (cf. the *Appendix* for the asymptotic behavior of the functions f and g),

$$v_z(\infty) = -2a(z - \bar{z}),$$

which is the correct expression for the inviscous, non-magnetic stagnation-point flow, and where the constant of integration $\bar{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} [z - f(z)/a]$ is the amount by which this flow is displaced in the positive direction of the z -axis (due to the action of viscosity and magnetic field).

It follows from equation (13d) that $k(\infty) = \bar{k}$. The product $f(z)f''(z)$ in equation (13b) tends to zero as $z \rightarrow \infty$ and therefore

$$\bar{k} = \frac{\rho}{2} a^2$$

from this equation. Consequently, the expression for the pressure assumes for large values of z the form

$$p + \frac{\rho}{2} (v_r^2 + v_z^2) = p_0 - 2\eta a.$$

The flow is seen to satisfy asymptotically the Bernoulli equation, with a total pressure which is smaller than the pressure at the origin by an amount $2\eta a$, just as in the non-magnetic case.

C. Summary of Equations

Eliminating $k(z)$ from equations (13b) and (13d), and introducing the dimensionless variables

$$\zeta = \sqrt{\mu \sigma a} z, \quad (15a)$$

$$F(\zeta) = \sqrt{\frac{\mu \sigma}{a}} f(z), \quad (15b)$$

$$G(\zeta) = -\frac{2}{B_0} g(z), \quad (15c)$$

one obtains two equations for $F(\zeta)$ and $G(\zeta)$,

$$G'' + 2(FG' - F'G) = 0, \quad (16a)$$

$$F''' + \frac{1}{\beta} [2FG'' - (F')^2 + 1] - \frac{1}{2\alpha} [2GG'' - (G')^2] = 0, \quad (16b)$$

where the prime now indicates differentiation with respect to ζ and where the dimensionless constants α and β are defined by

$$\alpha = \frac{\eta a}{B_0^2/2\mu} = \frac{2R_m}{H^2}, \quad (17a)$$

$$\beta = \mu \sigma \nu. \quad (17b)$$

The quantity α represents the ratio of the viscous shear stress ηa to the magnetic pressure $B_0^2/2\mu$. It is also expressed in terms of the magnetic Reynolds number $R_m = aR^2\mu\sigma$ (where R is an arbitrary reference length) and the Hartmann number $H = B_0 R\sqrt{\sigma/\eta}$.

As usual, the quantity β is introduced, which depends only on the properties of the fluid. It represents the ratio of the viscous diffusivity $\nu = \eta/\rho$ to the magnetic diffusivity $(\mu\sigma)^{-1}$.

The boundary conditions in terms of the new variables are

$$\left. \begin{aligned} \text{at } \zeta = 0 : \quad F = F' = 0, \quad G = +1; \\ \text{at } \zeta = \infty : \quad F' = +1, \quad G = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. Equation of Energy

The equation of energy is of the form

$$\rho c \frac{DT}{Dt} - \kappa \nabla^2 T = \frac{1}{\sigma} j^2 + \Phi \quad (19)$$

(c specific heat per unit mass, T temperature, κ thermal conductivity). The terms on the left represent the rate of heat removed per unit volume by convection and by heat conduction, respectively. The terms on the right represent the rate of heat added per unit volume through Joule heating and through viscous dissipation, where the dissipation function Φ in terms of the shear stress components τ_{ij} is given by

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

In cylindrical coordinates, making use of the symmetry relations equations (8),

$$\left. \begin{aligned} \rho c \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{1}{\sigma} j_\varphi^2 + \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

This equation is satisfied by an expression which is analogous to equation (12c) for the pressure,

$$T_0 - T = l(z) + r^2 m(z), \quad (21)$$

where T_0 is the temperature at the origin of the coordinate system.

Noting that from equations (1) and (12a), $j_\varphi = (\mu)^{-1} r g''(z)$, it is found that substitution of the expression for the temperature into the energy equation results in an equation which contains terms which are independent of r , and others which are proportional to r^2 , resulting therefore in two equations for $l(z)$ and $m(z)$. Introducing the dimensionless quantities

$$L(\zeta) = -\frac{1}{T_\infty - T_0} l(z), \quad (22a)$$

$$M(\zeta) = +\frac{c}{a^2} m(z), \quad (22b)$$

where T_∞ is the temperature at a large distance from the plate, one obtains after some calculations,

$$-\frac{1}{Pr} M'' + \frac{2}{\beta} (F M' - F' M) = (F'')^2 + \frac{1}{2\alpha} (G'')^2 \quad (23a)$$

$$\frac{\vartheta}{Pr} L'' + \frac{2\vartheta}{\beta} F L' = \frac{4}{Pr} M - 12 (F')^2, \quad (23b)$$

where Pr is the Prandtl number, $Pr = c \eta / \kappa$, and where the dimensionless constant

$$\vartheta = c (T_\infty - T_0) \frac{\mu \sigma}{a}.$$

The first term on the right of equation (23a) arises from the viscous dissipation, the second from Joule heating. Since these terms are known from the previous calculation, equation (23a) is a linear equation for the determination of $M(\zeta)$. Similarly, the last equation then permits to determine $L(\zeta)$.

If it is assumed that the plate be kept at a constant temperature $T = T_0$, it follows that the fluid also assumes this temperature, as $z \rightarrow 0$, and that therefore,

$$\text{at } \zeta = 0: \quad L = M = 0. \quad (24a)$$

The temperature, T_∞ , of the fluid streaming towards the plate is assumed to be uniform at a large distance from the plate. Consequently,

$$\text{at } \zeta = \infty: \quad L = +1; \quad M = 0. \quad (24b)$$

4. Boundary Layer Approximation

In almost all foreseeable engineering applications of magnetohydrodynamics to fluid mechanics or aerodynamics, $\beta \ll 1$. In the case of liquid metals, β is of the order of 10^{-6} . In a typical application to the ionized air behind a normal shock at hypersonic velocity, β is also of this order of magnitude. Only in the case of extremely low densities, or very high temperatures approaching thermonuclear ignition temperatures, can β be of order one or larger.

It is convenient to introduce the ratio

$$\gamma = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma B_0^2}{\rho a}, \quad (25)$$

which can also be written as $\gamma = H^2/4 R_i$. R_i is the viscous Reynolds number, $R_i = a R^2/\nu$, where R is a characteristic dimension of the blunt body. Since H^2 represents the ratio of magnetic to viscous forces, and R_i the ratio of inertial to viscous forces, γ represents the ratio of the magnetic forces to the inertial forces.

In general, the magnitude of γ is limited by the magnetic field strength which must be provided and which, in practice is subject to limitations. On the other hand, in order to significantly alter the flow as it would be established in the case of no magnetic field, it is in general necessary that the magnetic forces be at least comparable in magnitude to the inertial forces. The magnetohydrodynamically important case is therefore the one in which γ is of order one.

A. Velocity and Magnetic Field Distributions

Since α and β are both small, one is led to a singular perturbation problem. Outside a thin boundary layer, in which the functions undergo rapid changes, the first term in equation (16b) can be neglected with the result that

$$G_1'' + 2(F_1 G_1' - F_1' G_1) = 0, \quad (26a)$$

$$2F_1 F_1'' - (F_1')^2 + 1 - \gamma(2G_1 G_1'' - (G_1')^2) = 0, \quad (26b)$$

where F_1 and G_1 are functions of ζ_1 , and where the subscript refers to the region *outside the boundary layer*. In this region, $F \equiv F_1$, $G \equiv G_1$ and $\zeta \equiv \zeta_1$. The neglected term represents the effect of the viscous stress, which indicates that outside the boundary layer the only forces present are inertial and magnetic forces.

Since the boundary condition $F'(0) = 0$, which expresses the vanishing at the plate of the radial velocity, is no longer applicable if the viscous stresses are absent, one has the boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \text{at } \zeta_1 = 0: \quad F_1 = 0, \quad G_1 = +1; \\ \zeta_1 = \infty: \quad F'_1 = +1, \quad G_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

The validity of the boundary conditions at $\zeta_1 = 0$ is established in the next section. The solution depends upon a single parameter, γ , which is of order one. Functional values such as $F'_1(\zeta_1 = 0)$ depend upon γ , through the solution, and can be expected to be of order one, a result which is of importance for the discussion of orders of magnitudes, which follows.

If the quantity δ indicates the order of magnitude of the boundary layer thickness, made dimensionless in the same manner as ζ , the following estimates are obtained for the functions F and G and their derivatives, *inside the boundary layer*:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F &= O(\delta), & \text{(e)} \quad G &= +1, \\ \text{(b)} \quad F' &= O(1), & \text{(f)} \quad G' &= +G'_1(0), \\ \text{(c)} \quad F'' &= O\left(\frac{1}{\delta}\right), & \text{(g)} \quad G'' &= O(1), \\ \text{(d)} \quad F''' &= O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \end{aligned}$$

The justification for the orders of magnitudes (a) to (d) is the same as in the case of non-magnetic boundary layers and, therefore, does not require any further discussion.

G is $+1$ on the plate and of order one at the edge of the boundary layer. (Actually $G = +1$, as shown by the considerations which follow.) Therefore, G' would be expected to be at most of order $(\delta)^{-1}$. Substitution of these orders of magnitudes into equation (16a) then yields equation (g). From this it follows by integration that inside the boundary layer, G' can be approximated by a constant, the magnitude of which is determined by the inviscid solution [equation (f)]. A further integration then leads to the conclusion that G can be approximated by $+1$ inside the boundary layer [equation (e)]. Finally, substitution into equation (16b) gives

$$\delta = O(\sqrt{\alpha}) = O(\sqrt{\beta}).$$

Equation (16a) is seen to reduce to

$$G'' - 2F' = 0$$

inside the boundary layer. With this equation and with equations (e) and (f)

above, the function G can be eliminated from equation (16b). With the introduction of

$$\zeta_2 = \beta^{-1/2} \zeta, \quad (28a)$$

$$F_2 = \beta^{-1/2} F, \quad (28b)$$

where the subscript 2 refers to the interior of the boundary layer, the equation becomes

$$F_2''' + 2 F_2 F_2'' - (F_2')^2 - 4 \gamma F_2' = -\gamma (G_1'(0))^2 - 1. \quad (29)$$

The right-hand side is known from the solution of the system of equations (26). The origin of the various terms in this equation indicates that inside the boundary layer all three types of forces – inertial, viscous and magnetic – play a role.

The boundary conditions are

$$\text{at } \zeta_2 = 0: F_2 = F_2' = 0. \quad (30a)$$

At $\zeta_2 = \infty$ one has the condition $F_2'(\zeta_2) = F_1'(0)$. It can be replaced by the weaker condition

$$\text{at } \zeta_2 = \infty: F_2'' = 0, \quad (30b)$$

because it follows from this condition and from equation (29),

$$(F_2')^2 + 4 \gamma F_2' = \gamma (G_1'(0))^2 + 1 \quad \text{for } \zeta_2 \rightarrow \infty,$$

since $F_2 F_2''$ tends to zero with increasing argument. On the other hand, it follows from equations (26) together with the boundary conditions at $\zeta_1 \rightarrow 0$ that

$$\gamma (G_1'(0))^2 + 1 = (F_1'(0))^2 + 4 \gamma F_1'(0)$$

and therefore

$$(F_2')^2 + 4 \gamma F_2' = (F_1'(0))^2 + 4 \gamma F_1'(0) \quad \text{for } \zeta_2 \rightarrow \infty.$$

The solution of this quadratic equation which applies is

$$F_2'(\zeta_2) = F_1'(0) \quad \text{for } \zeta_2 \rightarrow \infty,$$

as was to be shown.

B. Temperature Distribution

Since $|\alpha| \ll 1$ and $|\beta| \ll 1$, equation (23a) outside the boundary layer can be simplified to

$$F_1 M_1' - F_1' M_1 = \frac{\gamma}{2} (G_1'')^2 \quad (31)$$

in a notation which is self-explanatory. Since the order of this equation has been reduced to one, only one boundary condition can be satisfied, viz.

$$\text{at } \zeta_1 = \infty: M_1 = 0. \quad (32)$$

As a consequence of the singular perturbation, $M(\zeta)$ drops from a value of order one at the outer edge of a boundary layer to zero at the wall. It is well known from the non-magnetic case, that the thickness of this thermal boundary layer is of the same order as the one of the velocity boundary layer, assuming that the Prandtl number of the fluid is of order one.

This equation can be integrated, in terms of a quadrature, yielding

$$M_1 = \left[C - \frac{\gamma}{2} \int_{\zeta_1}^{\infty} \left(\frac{G_1''}{F_1} \right)^2 d\zeta_1 \right] F_1,$$

where C is the constant of integration. It follows from the asymptotic behavior of the functions $F_1(\zeta_1)$ and $G_1(\zeta_1)$ that the integral exists and that the boundary condition equation (32) is satisfied, provided $C = 0$.

In particular, for $\zeta_1 = 0$, one has

$$M_1(0) = -\frac{\gamma}{2} \lim_{\zeta_1 \rightarrow 0} \left\{ F_1(\zeta_1) \int_{\zeta_1}^{\infty} \left(\frac{G_1''}{F_1} \right)^2 d\zeta_1 \right\}.$$

As the lower limit of integration tends to zero, the integral becomes unbounded. However, the above limit exists, as shown by an application of the Bernoulli-L'Hospital rule, from which one obtains

$$M_1(0) = -\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{(G_1''(0))^2}{F_1'(0)}.$$

It follows from equation (26a) that this result can also be written in the final form

$$M_1(0) = -2\gamma F_1'(0). \quad (33)$$

By an analogous consideration, it follows from equation (23b) that $L_1'(\zeta_1) = 0$. It then follows from the boundary condition at infinity,

$$L_1 = +1 \quad (34)$$

independent of ζ_1 .

Inside the boundary layer, the following estimates are obtained for the magnitudes of the functions L and M and their derivatives:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad L &= O(1), & \text{(d)} \quad M &= O(1), \\ \text{(b)} \quad L' &= O\left(\frac{1}{\delta}\right), & \text{(e)} \quad M' &= O\left(\frac{1}{\delta}\right), \\ \text{(c)} \quad L'' &= O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), & \text{(f)} \quad M'' &= O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

The justification for these estimates is analogous to the one given previously for the estimates of the functions F and G , and does not differ from the non-magnetic case.

Substituting into equation (23a), it is found that all terms in this equation have the same order of magnitude and must be retained. Therefore, Joule heating, viscous dissipation, convective and conductive heat transfer are all of importance in the magnetohydrodynamic boundary layer. Putting

$$M_2 \equiv M, \quad (35)$$

this equation becomes,

$$\frac{1}{Pr} M_2'' + 2 (F_2 M_2' - F_2' M_2) = (F_2'')^2 = 4 \gamma (F_2')^2 \quad (36)$$

if use is made of the equation preceding equation (28a). The boundary conditions are

$$\text{at } \zeta_2 = 0: M_2 = 0 \quad (37a)$$

and $M_2(\zeta_2) \rightarrow M_1(0)$ as $\zeta_2 \rightarrow \infty$. However, this condition can be relaxed to the requirement that

$$\text{at } \zeta_2 = \infty: M_2' = 0 \quad (37b)$$

because if this latter condition is substituted into equation (36) together with results obtained from the examination of the asymptotic behavior, viz. $F_2 M_2' \rightarrow 0$, $M_2'' \rightarrow 0$, $F_2' \rightarrow F_1'(0)$ and $F_2'' \rightarrow 0$ as $\zeta_2 \rightarrow \infty$] one obtains

$$-M_2(\zeta_2) = 2 \gamma F_1'(0) \quad \text{for } \zeta_2 \rightarrow \infty$$

and therefore, from equation (33)

$$M_2(\zeta_2) = M_1(0) \quad \text{for } \zeta_2 \rightarrow \infty,$$

as was to be shown.

Considering next equation (23b) which determines the function L , it is seen from the estimates of the magnitudes of L and its derivatives in the boundary layer, that both terms on the right can be neglected. Putting

$$L_2 \equiv L, \quad (38)$$

one obtains

$$L_2'' + 2 Pr F_2 L_2' = 0, \quad (39)$$

where the boundary conditions remain unchanged (replacing ζ by ζ_2 and L by L_2). The solution of this equation is, just as in the non-magnetic case,

$$L_2 = K \int_0^{\zeta_2} dt \exp \left\{ -2 Pr \int_0^t F_2(s) ds \right\}, \quad (40)$$

where already use has been made of the boundary condition at the origin, and where K is a constant of integration. Putting $L_2(\zeta_2) = K I(\zeta_2)$ where $I(\zeta_2)$

is the above double integral, it follows from the boundary condition at infinity that $K = [I(\infty)]^{-1}$ since the integral converges. Furthermore, the following result, needed in the determination of the heat transfer to the plate, is obtained,

$$L'_2(0) = K$$

from differentiation of equation (40). Therefore

$$L'_2(0) = \frac{1}{\int_0^\infty dt \exp \left\{ -2 Pr \int_0^t F_2(s) ds \right\}}. \quad (41)$$

5. Heat-Transfer

The rate of heat q transferred per unit area from the fluid to the plate is a function of the radius and can be written in the usual notation

$$q(r) = h(r) \cdot (T_\infty - T_0), \quad (42)$$

where h is the heat transfer coefficient. As is common in the literature on heat transfer problems, the dimensionless Nusselt number Nu , defined here as

$$Nu(r) = h(r) \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{a}}, \quad (43)$$

is introduced. Since

$$q(r) = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0},$$

one obtains from equation (21), after a short calculation,

$$Nu(r) = L'_2(0) - M'_2(0) \frac{a^2 r^2}{c (T_\infty - T_0)}.$$

Defining the quantities $Nu^{(0)}$ and $Nu^{(1)}$ by

$$Nu^{(0)} = +L'_2(0), \quad (44a)$$

$$Nu^{(1)} = -M'_2(0), \quad (44b)$$

one has

$$Nu(r) = Nu^{(0)} + Nu^{(1)} \frac{a^2 r^2}{c (T_\infty - T_0)}. \quad (45)$$

It follows from the derivation that $Nu^{(0)}$ and $Nu^{(1)}$ depend only upon γ and Pr . The numerical computations are carried out for $Pr = 0.700$.

6. Numerical Results

Computations were carried out on a 1103 Remington Rand digital computer. In order to determine the heat transfer data, a solution of equations (26) had to be determined first. The result, representing the distributions of velocity and magnetic field strength outside the boundary layer is given in Figures 2 and 3.

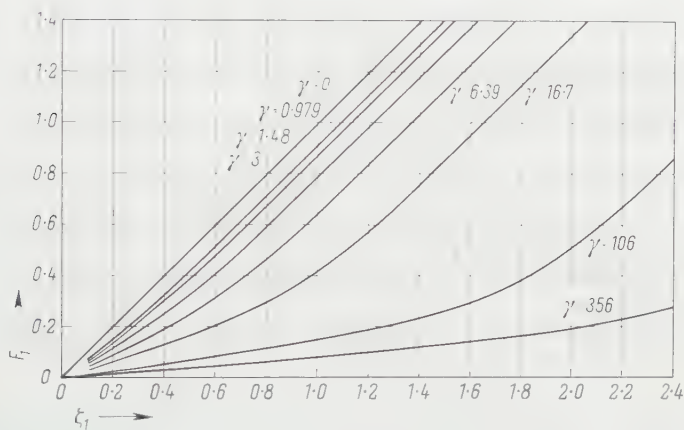


Figure 2
Function $F_1(\xi_1)$.

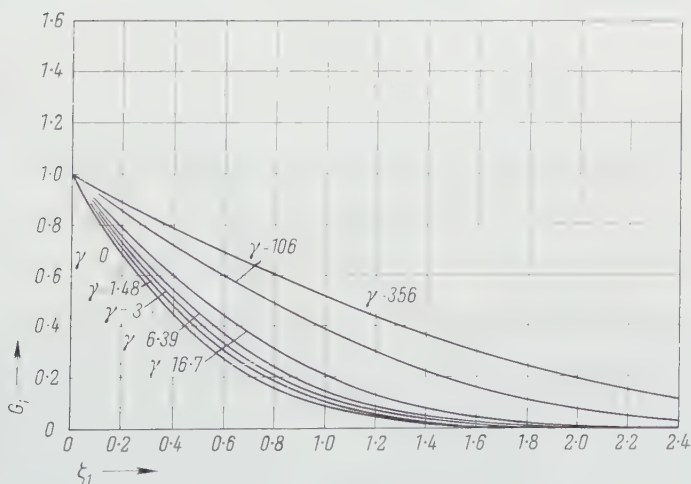


Figure 3
Function $G_1(\xi_1)$.

Next equation (29) was numerically integrated. The result is given in Figure 4. The temperature distribution in the boundary layer can then be

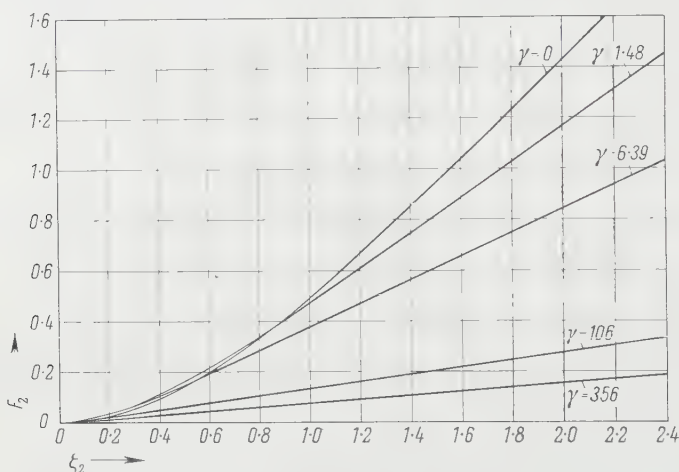


Figure 4
Function $F_2(\xi_2)$.

determined from equations (36) and (39) yielding also the Nusselt numbers $Nu^{(0)}$ and $Nu^{(1)}$ (see table).

Computed Nusselt Numbers $Nu^{(0)}$ and $Nu^{(1)}$ for $Pr = 0.70$

γ	$Nu^{(0)}$	$Nu^{(1)}$
0	0.666	0.394
0.274	0.662	0.789
0.476	0.660	1.057
0.979	0.653	1.650
1.48	0.645	2.158
6.39	0.582	5.274
106	0.350	16.200
356	0.264	23.900

It is noted that the heat transfer at the stagnation point itself decreases monotonically as the magnetic field strength is increased. This result is in qualitative agreement with NEURINGER's and McILROY's conclusions [1] for the two-dimensional case. On the other hand, $Nu^{(1)}$ increases, indicating an increased slope of the heat transfer rate considered as a function of the radius.

The non-magnetic case, i.e. $B_0 = 0$ and/or $\sigma = 0$, corresponds to $\gamma = 0$. The numerical values for the velocity distribution (function F_2) in this case are in excellent agreement with FRÖSSLING's work [3]. $Nu^{(0)}$ for $\gamma = 0$ differs from results obtained by RESHOTKO and COHEN [2] for the non-magnetic case by less than 0.5%.

The author is indebted to Dr. LEE O. HEFLINGER of Space Technology Laboratories, Inc., under whose supervision the digital computer was programmed, and who also suggested the asymptotic expansions derived in the Appendix. Thanks are due also to Mr. WILLIAM B. BUSH for a number of helpful discussions.

APPENDIX

In this section, the asymptotic expansions for the functions $F(\zeta)$ and $G(\zeta)$ are found.

$F(\zeta)$ and $G(\zeta)$ can be represented by

$$F(\zeta) = {}_0F(\zeta) + {}_1F(\zeta) + {}_2F(\zeta) + \dots, \quad (\text{A-1})$$

$$G(\zeta) = {}_1G(\zeta) + {}_2G(\zeta) + \dots, \quad (\text{A-2})$$

where for sufficiently large ζ

$$|{}_0F(\zeta)| \gg |{}_1F(\zeta)| \gg |{}_2F(\zeta)| \gg \dots$$

and similarly for the functions ${}_iG(\zeta)$. The zero-order approximation to $F(\zeta)$ is taken as

$${}_0F(\zeta) = \zeta - \bar{\zeta}, \quad (\text{A-3})$$

where $\bar{\zeta}$ is a constant. Introducing the expressions (A-1) and (A-2) into equations (16a) and (16b), and neglecting small terms of higher order, one obtains

$${}_1G'' + 2(\zeta - \bar{\zeta}) {}_1G' - 2{}_1G = 0, \quad (\text{A-4})$$

$${}_1F''' + \frac{2}{\beta} [(\zeta - \bar{\zeta}) {}_1F'' - {}_1F'] - \frac{1}{2\alpha} [2{}_1G {}_1G'' - ({}_1G')^2] = 0, \quad (\text{A-5})$$

where the argument of all functions is ζ . These equations together with suitable boundary conditions at infinity are taken as the (exact) equations defining the functions ${}_1F(\zeta)$ and ${}_1G(\zeta)$.

Equation (A-4) which determines ${}_1G(\zeta)$, as well as the homogenous part of equation (A-5) - considering ${}_1F'(\zeta)$ as the unknown - are of the form

$$Y'' + 2k[(\zeta - \bar{\zeta}) Y' - Y] = 0 \quad (k > 0), \quad (\text{A-6})$$

where k is a constant. The general solution of this equation is

$$Y(\zeta) = y_1 \left\{ e^{-x^2} - \sqrt{\pi} x [1 - \Phi(x)] \right\} + y_2 x, \quad (\text{A-7})$$

where $x = \sqrt{k} (\zeta - \bar{\zeta})$ and where y_1 and y_2 are constants of integration. $\Phi(x)$ is the error function,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

For large values of x one has the asymptotic expansion

$$\sqrt{\pi} x [1 - \Phi(x)] \sim e^{-x^2} \left[1 - \frac{1}{2} x^{-2} + \frac{3}{4} x^{-4} - \dots \right]$$

from which

$$Y(\zeta) \sim \frac{1}{2} y_1 e^{-x^2} x^{-2} \left[1 - \frac{3}{2} x^{-2} + \dots \right] + y_2 x. \quad (\text{A-8})$$

Therefore, replacing y_1 by the constant $1g$, y_2 by zero [as required by the boundary condition on $G(\zeta)$ at infinity], and k by $+1$,

$${}_1G(\zeta) \sim \frac{1}{2} 1g e^{-(\zeta - \bar{\zeta})^2} (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} \left[1 - \frac{3}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} + \dots \right]. \quad (\text{A-9})$$

Similarly, it follows from differentiation of equation (A-7), that the expression which occurs in the inhomogeneous part of equation (A-5), can be written

$$2 {}_1G {}_1G'' - ({}_1G')^2 \sim 1g^2 e^{-2(\zeta - \bar{\zeta})^2} (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} [1 - 2(\zeta - \bar{\zeta})^{-2} + \dots]. \quad (\text{A-10})$$

The solution ${}_1F_h(\zeta)$ of the homogeneous equation corresponding to equation (A-5) is obtained by putting $k = 1/\beta$ and by noting that $y_2 = 0$ in view of the boundary condition on $F'(\zeta)$ at infinity. Consequently

$${}_1F'_h(\zeta) \sim {}_1f e^{-(\zeta - \bar{\zeta})^2/\beta} (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} \left[1 - \frac{3}{2} \beta (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} + \dots \right], \quad (\text{A-11})$$

where ${}_1f$ is a constant.

A particular solution of the inhomogeneous equation is obtained by considering the expansion

$${}_1F'_i(\zeta) \sim e^{-2(\zeta - \bar{\zeta})^2} (\zeta - \bar{\zeta})^n \sum_{i=0}^m a_i (\zeta - \bar{\zeta})^{-i},$$

where n and the coefficients a_i (where $a_0 \neq 0$) are determined by substituting

the expansion into equation (A-5). The result of this substitution is

$$\begin{aligned} 8 a_0 \left(2 - \frac{1}{\beta} \right) (\zeta - \bar{\zeta})^{n+2} + 8 a_1 \left(2 - \frac{1}{\beta} \right) (\zeta - \bar{\zeta})^{n+1} \\ + \left\{ 2 a_0 \left[-4n - 2 + \frac{n-1}{\beta} \right] + 8 a_2 \left[2 - \frac{1}{\beta} \right] \right\} (\zeta - \bar{\zeta})^n + \dots \\ = \frac{1}{2\alpha} 1g^2 [(\zeta - \bar{\zeta})^{-2} - 2(\zeta - \bar{\zeta})^{-4} + \dots]. \end{aligned}$$

Therefore, the expansion above is seen to satisfy equation (A-5), provided $n = -4$ and

$$a_1 = a_3 = \dots = 0, \quad a_0 = + \frac{1g^2}{16\alpha \left(2 - \frac{1}{\beta} \right)}, \quad a_2 = - \frac{1g^2 \left(30 - \frac{13}{\beta} \right)}{64\alpha \left(2 - \frac{1}{\beta} \right)^2}, \quad \text{etc.}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} {}_1F'(\zeta) = {}_1F'_h(\zeta) + {}_1F'_i(\zeta) \sim e^{-(\zeta - \bar{\zeta})^{2/\beta}} (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} \left[{}_1f - \frac{3}{2} {}_1f\beta (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} + \dots \right] \\ + e^{-2(\zeta - \bar{\zeta})^3} (\zeta - \bar{\zeta})^{-4} [a_0 + a_2 (\zeta - \bar{\zeta})^{-2} + \dots] \end{aligned}$$

and

$$\left. \begin{aligned} {}_1F(\zeta) \sim e^{-(\zeta - \bar{\zeta})^{2/\beta}} (\zeta - \bar{\zeta})^{-3} \sum_{i=0}^m b_i (\zeta - \bar{\zeta})^{-i} \\ + e^{-2(\zeta - \bar{\zeta})^3} (\zeta - \bar{\zeta})^{-5} \sum_{i=0}^m c_i (\zeta - \bar{\zeta})^{-i}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-12})$$

where

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 = \dots = 0, \quad b_0 = -\frac{1}{2} \beta {}_1f, \quad b_2 = +\frac{3}{2} \beta^2 {}_1f, \quad \text{etc.} \\ c_1 = c_3 = \dots = 0, \quad c_0 = -\frac{a_0}{4}, \quad c_2 = +\frac{5}{16} a_0 - \frac{1}{4} a_2, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

The number of undetermined constants in these equations (ζ , ${}_1f$, $1g$) corresponds to the number of boundary conditions on $F(\zeta)$ and $G(\zeta)$ at the origin.

From these results, it follows for instance that

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [F(\zeta) F''(\zeta)] = 0,$$

a result which was used in the formulation of the boundary conditions.

REFERENCES

- [1] NEURINGER, J. L., and McILROY, WM., Institute of the Aeronautical Sciences, Preprint No. 764 (1958).
- [2] RESHOTKO, E., and COHEN, C. B., NACA TN 3513 (1955).
- [3] SCHLICHTING, H., *Grenzschicht-Theorie* (Braun, Karlsruhe 1951).

Zusammenfassung

Die affine Lösung von NEURINGER und McILROY [1] für die ebene, laminare Staupunktströmung einer elektrisch leitenden Flüssigkeit in einem magnetischen Feld wird auf den rotationssymmetrischen Fall erweitert. Die gemäss dem Jouleschen Gesetz umgesetzte Wärme sowie die Wärmezufuhr durch Reibung werden dabei ohne Vernachlässigung berücksichtigt.

Die Randbedingungen werden neu formuliert, und Lösungen werden erhalten in der Gestalt von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die numerisch integriert werden.

Die Grössenordnung der auftretenden Parameter wird abgeschätzt in Fällen, welche physikalisches Interesse haben. In den meisten Fällen ist es möglich, eine Grenzschicht-Annäherung einzuführen. Die Resultate hängen dann im wesentlichen nur von einem einzigen Parameter ab. Die Geschwindigkeitsverteilung, das magnetische Feld und der Wärmeübergang an der Körperoberfläche werden berechnet.

(Received: June 27, 1959.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Eine einfache Verallgemeinerung der Rayleigh-Grenzschicht

Von ERNST BECKER, Göttingen, Deutschland

1. Aufgabenstellung

Eine für alle Zeiten $t < 0$ ruhende, unendlich ausgedehnte, ebene Wandgrenze an ein für $t < 0$ ruhendes, unendlich ausgedehntes, ideales Gas mit der Dichte ϱ_0 , der absoluten Temperatur T_0 und der Zähigkeit μ_0 , die im übrigen der absoluten Temperatur proportional sein soll. Prandtl-Zahl Pr und spezifische Wärme c_p des Gases werden als konstant vorausgesetzt. Zur Zeit $t = 0$ werde diese Wand in ihrer Ebene mit der Geschwindigkeit $u_w = u_0 t^n / t_0^n$ in Bewegung gesetzt (u_0 ist eine konstante Bezugsgeschwindigkeit, $t_0 > 0$ eine konstante Bezugszeit, $n \geq 0$). Gleichzeitig soll die Wandtemperatur auf den konstanten Wert T_w gebracht werden und durch die Wand Gas mit der Normalgeschwindigkeit $v_w = v_0 t_0^{1/2} / t^{1/2}$ abgesaugt ($v_w < 0$) bzw. ausgeblasen ($v_w > 0$) werden (v_0 ist wieder eine konstante Bezugsgeschwindigkeit)¹⁾.

2. Lösungsverfahren

Die für $t > 0$ sich an der Wand ausbildende Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschicht hängt ausser von t nur von der Koordinate y in wandsenkrechter Richtung ab und wird durch folgende Gleichungen bestimmt [1, 3]²⁾:

$$\varrho (u_t + v u_y) = (\mu u_y)_y, \quad (1)$$

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen ist eine Arbeit von KWANG-TZU YANG erschienen (*Unsteady Laminar Compressible Boundary Layer on an Infinite Plate With Suction or Injection*, J. Aero-Space Sci. 26, Nr. 10, S. 653-662 [1959]), in der Grenzschichten der hier betrachteten Art zur Kontrolle von Rechnungen nach dem von Kármán-Pohlhausen-Verfahren herangezogen werden.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 152.

$$\varrho (T_t + v T_y) = \frac{1}{Pr} (\mu T_y)_y + \frac{\mu}{c_p} (u_y)^2, \quad (2)$$

$$\varrho_t + (\varrho v)_y = 0. \quad (3)$$

Hierbei ist wie üblich vorausgesetzt, dass die Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit v_w klein gegen die Wandgeschwindigkeit u_w bleibt, da sonst die Grenzschichtvernachlässigungen nicht gelten, besonders der Druck nicht als konstant betrachtet werden darf. Direkt nach Bewegungsbeginn ist diese Voraussetzung wegen $v_w \sim t^{-1/2}$ nicht erfüllt, aber für sehr kleine t sind ohnehin auch für $v_w = 0$ die Grenzschichtvernachlässigungen nicht mehr zulässig [1].

Die Randbedingungen werden weiter unten formuliert. Diese Gleichungen lassen sich durch folgende Transformationen vereinfachen (vgl. [1, 3]):

$$t' = t, \quad (4)$$

$$y' = \int_0^y \frac{\varrho}{\varrho_w} dy. \quad (5)$$

Die Dichte ϱ_w an der Wand ist wegen $T_w = \text{const}$ ebenfalls konstant. Dann erhält man

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\varrho}{\varrho_w} \cdot \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \left(\int_0^y \frac{\varrho_t}{\varrho_w} dy \right) \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial t'} + v_w \frac{\partial}{\partial y'} - v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (7)$$

Beim Übergang von der zweitletzten zur letzten Zeile wurde dabei Gebrauch von der Kontinuitätsgleichung (3) und der Randbedingung $v(0) = v_w$ gemacht. Die Gleichungen (1) und (2) gehen nun mit der Beziehung $\mu \varrho = \mu_w \varrho_w$ (Voraussetzung, dass die Zähigkeit der absoluten Temperatur proportional ist!) über in

$$u_{t'} + v_w u_{y'} = v_w u_{y'y'}, \quad (8)$$

$$T_{t'} + v_w T_{y'} = \frac{v_w}{Pr} T_{y'y'} + \frac{v_w}{c_p} (u_{y'})^2 \quad (9)$$

mit $v_w = \mu_w / \varrho_w$.

Für das Folgende wird zunächst das der Reibungswärme Rechnung tragende letzte Glied in Gleichung (9) vernachlässigt; die folgenden Überlegungen gelten daher nur, solange die Mach-Zahlen in der Grenzschicht klein bleiben. Erst zum Schluss wird auf das Reibungsglied in (9) eingegangen. Die Gleichungen (8) und (9) lassen sich mit dieser Vernachlässigung durch folgenden Ansatz lösen:

$$u = \frac{u_0 t^n}{t_0^n} F(\eta), \quad (10)$$

$$T = T_0 + (T_w - T_0) \Theta(\eta) \quad (11)$$

mit

$$\eta = 2 \left(v_w \frac{y'}{t'} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Aus (8) und (9) ergibt sich für $F(\eta)$ und $\Theta(\eta)$:

$$F'' + 2(\eta - r)F' - 4nF = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\Theta''}{Pr} + 2(\eta - r)\Theta' = 0, \quad (14)$$

wobei r ein das Absaugen bzw. Ausblasen kennzeichnender Parameter ist, nämlich

$$r = \frac{v_0 t_0^{1/2}}{y_0^{1/2}}. \quad (15)$$

$r > 0$ bedeutet Ausblasen, $r < 0$ Absaugen. Die Randbedingungen sind

$$\eta = 0: \quad F = \Theta = 1, \quad (16)$$

$$\eta = \infty: \quad F = \Theta = 0. \quad (17)$$

Man sieht nun leicht folgendes ein: Es sei die Lösung des Problems ohne Absaugung ($r = 0$) bekannt und mit $F(\eta; r = 0) = f(\eta)$, $\Theta(\eta; r = 0) = \vartheta(\eta)$ bezeichnet. Diese physikalisch nur für $\eta > 0$ sinnvollen Lösungen lassen sich in das Gebiet $\eta < 0$ analytisch beliebig weit fortsetzen, weil die Gleichungen (13) und (14) in diesem Gebiet für beliebiges r singularitätenfrei sind. Die Lösung für beliebiges r erhält man dann als

$$F(\eta) = \frac{f(\eta - r)}{f(-r)}, \quad (18)$$

$$\Theta(\eta) = \frac{\vartheta(\eta - r)}{\vartheta(-r)}, \quad (19)$$

denn diese Lösungen befriedigen die Gleichungen (13) und (14) und die Randbedingungen (15) und (16).

3. Rayleigh-Grenzschicht mit Absaugen oder Ausblasen

Als Beispiel wählen wir $n = 0$; in diesem Fall wird die Wand zur Zeit $t = 0$ ruckartig mit der Geschwindigkeit u_0 in Bewegung gesetzt (Rayleigh-Grenzschicht [1–3]). Es ist dann

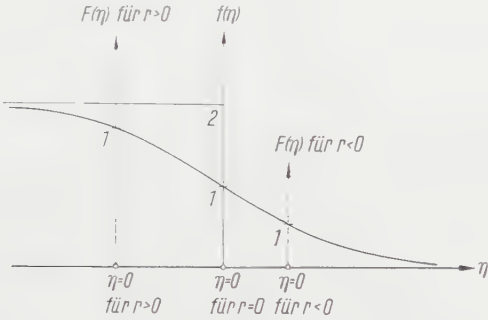
$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-s^2} ds, \quad (20)$$

$$\vartheta(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (21)$$

Der Ausdruck (21) für $\vartheta(\eta)$ gilt übrigens für alle $n \geq 0$. Die Verläufe von $f(\eta)$ (Geschwindigkeitsprofil) und $\vartheta(\eta)$ (Temperaturprofil) unterscheiden sich nur durch einen Maßstabsfaktor, so dass wir uns auf die Diskussion des Geschwindigkeitsprofils beschränken können.

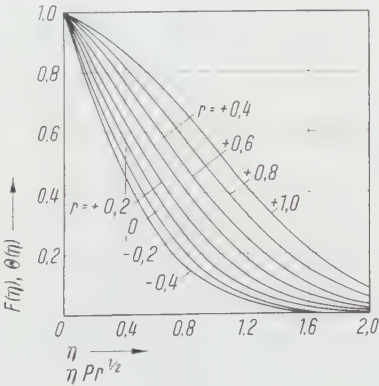
$f(\eta)$ ist in Figur 1 für $-\infty < \eta < \infty$ schematisch dargestellt. Den Verlauf von $F(\eta)$ für $r \neq 0$ erhält man hieraus nach (18) durch Verschieben des Koordinatennullpunktes nach $\eta = -r$ und Änderung des Ordinatenmaßstabes derart, dass die Kurve $f(\eta)$ die verschobene Ordinatenachse im Punkte $F = 1$ schneidet. Mit anderen Worten: Die Grenzschichtprofile für alle $r < r_0$, wobei r_0 eine beliebige Konstante ist, sind sämtliche in dem Profil für $r = r_0$ enthalten. Da die Kurve $f(\eta)$

und damit auch $\vartheta(\eta)$ an der Stelle $\eta = 0, f = 1$ bzw. $\vartheta = 1$ einen Wendepunkt und sonst keinen hat, zeigen alle Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für $r > 0$ (Ausblasen) einen Wendepunkt, dagegen sind diese Profile für $r < 0$ (Absaugen) wendepunktfrei. Dies entspricht ganz den Verhältnissen bei der analogen stationären Grenzschicht (vgl. [2], Seite 219). Die Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofile für verschiedene Werte von r sind in Figur 2 aufgetragen.



Figur 1

Koordinatensystem und Verlauf von $F(\eta)$ für $r > 0$ (Ausblasen), $r = 0$ und $r < 0$ (Absaugen).



Figur 2

Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofile der Rayleigh-Grenzschicht mit Ausblasen ($r > 0$) oder Absaugen ($r < 0$) bei vernachlässigter Reibungswärme.

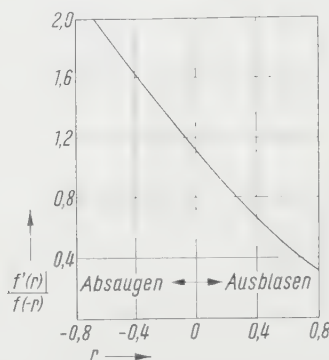
Für die Wandschubspannung erhält man (Index w bezeichnet Größen direkt an der Wand)

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \tag{22}$$

Nach kurzer Rechnung unter Benutzung von (10) und (12) mit $n = 0$ erhält man hieraus als Wandreibungskoeffizient c_w

$$c_w \equiv \frac{|\tau_w|}{1/2 \rho_w u_0^2} = \sqrt{\frac{\nu_w}{u_0^2 t}} \cdot \frac{|f'(-r)|}{f(-r)} \tag{23}$$

Anhand des in Figur 1 wiedergegebenen Verlaufs von $f(\eta)$ ist klar, dass c_w mit wachsendem r abnimmt. In Figur 3 ist der Faktor $|f'(r)|/f(-r)$ aufgetragen. Für die



Figur 3

Änderung des Wandreibungskoeffizienten der Rayleigh-Grenzschicht durch Absaugen oder Ausblasen [vgl. Formel (23)].

pro Zeit- und Flächeneinheit durch Wärmeleitung auf die Wand übergehende Wärmemenge q bzw. die entsprechende Nusselt-Zahl $Nu = q u_0 t / \{\lambda_w \cdot (T_w - T_0)\}$ (λ_w = Wärmeleitfähigkeit an der Wand) ergibt sich im Sonderfall $Pr = 1$

$$Nu = \frac{c_w}{2} \cdot \frac{u_0^2 t}{\nu_w}, \quad (24)$$

während für $r = 0$, aber beliebiges Pr

$$Nu = \frac{c_w}{2} \cdot \frac{u_0^2 t}{\nu_w} Pr^{1/2} \quad (25)$$

gilt (vgl. [3]).

4. Allgemeinere Fälle

Wenn $n \neq 0$ ist, dann gelten die in Abschnitt 3 hergeleiteten Beziehungen weiterhin unverändert für das Temperaturprofil, da n in die Gleichung (14) für Θ gar nicht eingeht. Das Geschwindigkeitsprofil ergibt sich aus (13). Für $n = 1$ und $r = 0$ erhält man zum Beispiel (vgl. [2], Seite 176)

$$t(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[(1 + 2\eta^2) \int_{\eta}^{\infty} e^{-s^2} ds - \eta e^{-\eta^2} \right]. \quad (26)$$

Hieraus erhält man nach (18) bzw. der in Figur 1 erläuterten Koordinatenverschiebung auch $F(\eta)$. Da $f(\eta)$ nach (26) in $-\infty < \eta < \infty$ keinen Wendepunkt besitzt, erhält man auch hier beim Ausblasen keine Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkt.

Die Berücksichtigung der seither vernachlässigten Reibungswärme in (9) ändert an den Überlegungen für das Geschwindigkeitsprofil gar nichts. Dagegen erhält man mit den oben benutzten Randbedingungen für die Temperatur (konstante Wand- und Aussentemperatur) im allgemeinen keine Temperaturprofile mehr, die nur von

η abhängen («ähnliche Profile»). Solche Profile ergeben sich nur für spezielle Randbedingungen, zum Beispiel dann, wenn man $T_w = T_0$ fordert. Die Temperaturverteilung kann dann durch folgenden Ansatz beschrieben werden:

$$T = T_0 + \frac{t^{2n}}{t_0^{2n}} \cdot \frac{u_0^2}{2 c_p} \tilde{\Theta}(\eta), \quad (27)$$

und für $\tilde{\Theta}$ folgt aus (9):

$$\frac{1}{Pr} \tilde{\Theta}'' + 2(\eta - \gamma) \tilde{\Theta}' - 8n \tilde{\Theta} = -2F'^2, \quad (28)$$

mit $\tilde{\Theta}(0) = \tilde{\Theta}(\infty) = 0$. Der einfache Zusammenhang zwischen dem Temperaturprofil für $\gamma = 0$ und demjenigen für $\gamma \neq 0$ geht hierbei allerdings verloren. Für $n = 0$ (Rayleigh-Grenzschicht) erhält man im Sonderfall $Pr = 1$ auch für beliebige, konstante Wandtemperatur T_w ein einfaches Ergebnis. Als Temperaturverteilung in der Grenzschicht ergibt sich hier:

$$T = T_0 + (T_w - T_r) F_* + (T_r - T_0) F(2 - F) \quad (29)$$

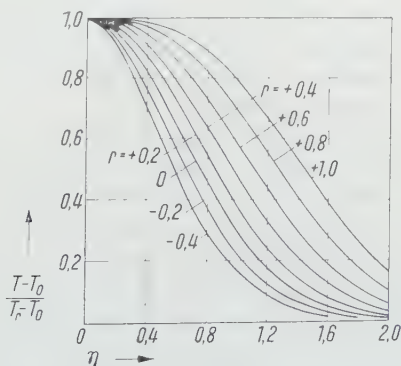
mit

$$T_r = T_0 + \frac{u_0^2}{2 c_p}. \quad (30)$$

Man bestätigt dies leicht durch Einsetzen in Gleichung (9). Dies ist übrigens dieselbe Abhängigkeit des Temperaturprofils vom Geschwindigkeitsprofil, wie man sie bei stationären Grenzschichten ohne Druckgradient hat (Crocco'sche Beziehung). Falls kein Wärmeübergang durch Wärmeleitung zwischen Wand und Gas stattfindet, das heisst, falls $\partial T / \partial y = 0$ für $y = 0$, folgt aus (29) für die Temperaturverteilung:

$$\frac{T}{T_r} \frac{T_0}{T_0} = F(2 - F). \quad (31)$$

In Figur 4 sind die Temperaturprofile nach (31) für verschiedene γ aufgetragen, F ist hierbei durch Figur 2 gegeben.



Figur 4

Temperaturprofile der Rayleigh-Grenzschicht beim Thermometerproblem.

Zum Schluss sei noch folgende Bemerkung angefügt: Das in Abschnitt 3 behandelte Beispiel $n = 0$ kann als Sonderfall einer allgemeineren Klasse von ebenen Grenzschichtströmungen aufgefasst werden, die sich dadurch auszeichnen, dass die Aussengeschwindigkeit sowie die Wand- und Aussentemperatur nur von x/t abhängen (x = Koordinate in wandparalleler Richtung) und die Absauggeschwindigkeit einem Gesetz von der Form $v_w = t^{-1/2} \varphi(x/t)$ genügt. In diesem Fall lassen sich die instationären Grenzschichtgleichungen von 3 auf 2 unabhängige Variablen reduzieren. Einen Überblick über solche Grenzschichten für den Sonderfall $v_w = 0$, wie sie in Stosswellenrohren und ähnlichen Einrichtungen auftreten, gibt die Arbeit [3].

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. D. VAN DYKE, *Impulsive Motion of an Infinite Flat Plate in a Viscous Compressible Fluid*, Z. angew. Math. Phys. 3, 343–353 (1952).
- [2] H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 1. Aufl. (Karlsruhe 1951).
- [3] E. BECKER, *Instationäre Grenzschichten hinter Verdichtungsstößen und Expansionswellen*, Z. Flugwissensch. 7, 61–73 (1959).

Summary

A simple generalization of the theory of the compressible boundary layer near an infinite flat plate to the case with suction or blowing out is given if at the time $t = 0$ the plate is set into motion in its own plane with velocity $u_w \sim t^n$. The normal velocity at the wall shall vary with time according to $v_w \sim t^{-1/2}$. In that case one gets similar boundary layer profiles for all $t > 0$, which can be reduced to the profiles without suction or blowing ($v_w = 0$) by a simple parallel displacement and stretching of the coordinates. As an example the Rayleigh boundary layer ($n = 0$, $u_w = \text{const}$) is discussed.

(Eingegangen: 21. August 1959.)

The Back Effect of a Wall on a Jet

By HARRIS C. LEVEY, Nedlands, Australia¹⁾

Introduction

There is a great deal of interest currently in bodies which are supported by jets and stay relatively close to the ground. Although intuitively one seems to regard jets as behaving in a parabolic manner, that is, that no back effects are felt at the source of the jet, this cannot really be so for subsonic jets since the equations governing the flow are elliptic.

More specifically the intuitive argument runs as follows. If the source of a jet of incompressible and inviscid fluid is at distance h from an obstacle and if d is a typical jet width, then if d/h is small the typical length scales for longitudinal and lateral variations are in the ratio h/d , not too near the source or the obstacle. From

¹⁾ Mathematics Department, The University of Western Australia.

the continuity equation the longitudinal and lateral velocity components are in the same ratio. This leads to the parabolic form of the governing equations and the result that for impingement problems the jet is assumed uniform apart from the influence of the obstacle.

Of course this is really a singular perturbation problem in the parameter d/h and the parabolic solution is not valid near the jet source. However, we feel that a more interesting question is how do the gross features of the jet, namely momentum and mass flux, depend on the ratio h/d ? Accordingly, the simplest possible two-dimensional model that can be treated by free-streamline theory is chosen, namely an incompressible fluid confined in an infinite chamber whose side is parallel to a wall distance h away. The chamber side has a slit of width d through which the fluid escapes (Figure 1).

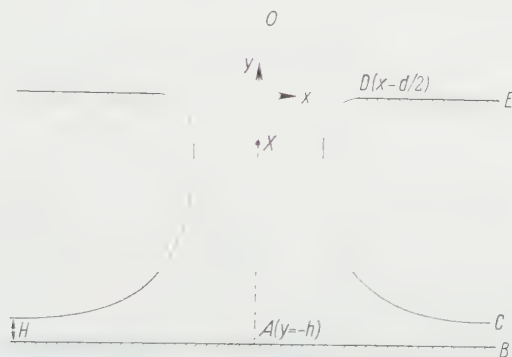


Figure 1

The physical plane; with axis of symmetry OA , chamber side DE , wall AB , jet boundary DC .

The solution is carried through in the usual manner by mapping the flow region in the plane of the complex velocity potential, w , and in the plane of the Helmholtz potential, Ω , on an appropriate region of the plane of an auxiliary complex variable t . If J and M are the excess momentum flux and mass flux and J_∞ , M_∞ are their corresponding values when h/d is infinite, we are now able to express the ratios J/J_∞ , M/M_∞ in terms of complete elliptic integrals.

On closer examination the interesting result emerges that J/J_∞ and M/M_∞ remain nearly equal to unity not only for large h/d but down to values of $h/d \approx 1$. Of course, no account is taken here of laminar or turbulent mixing, for example, so the results although of intrinsic interest can be taken only as indicating a possible trend in practice.

The Solution Details

The stagnation pressure p_s is supposed greater than P , the pressure of the fluid outside the chamber, so that the fluid emerges from the slit as a jet, the constant speed on the jet boundary being U . The jet divides symmetrically at the wall and ultimately flows parallel to the wall in a half-jet of width H . The axes chosen are shown in Figure 1, and since there are two stagnation points on the axis of symmetry, at $y = \infty$ and $y = -h$, it is assumed that there is one point, X , of maximal speed on this axis.

If q, θ are the polar velocity components and

$$z = x + i y$$

we have

$$\frac{dw}{dz} = q e^{-i\theta} \quad (1)$$

and

$$\Omega = \log \frac{U}{q} + i \theta. \quad (2)$$

We need consider only the half of the flow field in $x \geq 0$ by symmetry. The regions corresponding to this in the w and Ω planes are mapped onto the positive quadrant of the plane of an auxiliary complex variable t , such that the flow boundaries in both planes map onto the axes $\text{Re } t = 0, \text{Im } t = 0$, the points C, D, E, O, A, B mapping onto $t = i\infty, 0, 1, 1, k^{-1}, \infty$ respectively. Note that the flow region in the Ω -plane is bounded by a semi-infinite pentagon that has a doubly-described reentrant side OXA with interior angle 2π at X . The mapping functions are

$$w = i U H - \frac{U H}{\pi} \log \frac{1-t^2}{2} \quad (3)$$

and

$$\Omega = i \pi + \frac{1}{2} \left\{ \log \frac{1-t}{1-t} - \log \frac{1-kt}{1-kt} \right\}, \quad (4)$$

where $k < 1$. (In passing, the value of t at the point X is found to be $k^{-1/2}$.) The branch of the logarithm is chosen that is real for $t < 1$ and real, and the singularities are avoided by passing above them.

If $2c$ is the jet-width at a given value of y , the excess momentum flux (per unit breadth normal to the plane of flow) and the mass flux are defined respectively by

$$J = 2 \int_0^c (p - P + \varrho v^2) dx, \quad M = -2 \varrho \int_0^c v dx = 2 \varrho U H,$$

where v is the y -component of the velocity and ϱ is the density. From momentum conservation J is the excess pressure on the wall, so that

$$J = 2 \int_0^\infty (p - P) dx = \varrho \int_0^\infty (U^2 - q^2) dx,$$

where the integration is along the wall $y = -h$. When h/d is infinite, it may be deduced²⁾ that

$$J = J_\infty = \frac{\pi \varrho U^2}{\pi + 2},$$

and

$$M = M_\infty = \frac{\pi \varrho U}{\pi + 2},$$

so that

$$\frac{J}{J_\infty} = \left(\frac{\pi + 2}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left(\frac{U^2 - q^2}{U^2} \right) dx, \quad \text{on } y = -h \quad (5)$$

²⁾ H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Dover 1945).

and

$$\frac{M}{M_{\infty}} = 2 \left(\frac{\pi + 2}{\pi} \right) \frac{H}{d} . \quad (6)$$

We obtain the relations between h , d , H and k by using

$$\frac{dz}{dt} = U^{-1} e^{\Omega} \frac{dw}{dt}$$

so that

$$-i h - \frac{1}{2} d = \frac{2H}{\pi} \int_0^{k^{-1}} t (1-t^2)^{-1} (1+t)^{1/2} (1-t)^{-1/2} (1+kt)^{1/2} (1-kt)^{-1/2} dt , \quad (7)$$

where the roots are real and positive when $t < 1$ and real, and the path of integration detours above the singularity at $t = 1$. Similarly we find that

$$\left. \begin{aligned} \pi \frac{J}{J_{\infty}} &= 4 \left(\frac{\pi + 2}{\pi} \right) \frac{H}{d} (1+k) \int_{k^{-1}}^{\infty} t^2 (t^2 - 1)^{-1} \\ &\quad \times (t+1)^{1/2} (t-1)^{-1/2} (kt+1)^{1/2} (kt-1)^{-1/2} dt . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

The substitution

$$\sin \theta = \frac{k}{t}$$

reduces the integral in (8) to the complete elliptic integral of the third kind $\Pi(k^2, k^3)$, while the substitution

$$t = k^{-1} \sin \theta$$

in the integral in (7) reduces it, after some manipulation, to

$$-(1-k)^{-1} \left\{ k^2 + \frac{1}{2} k^2 (1-k) \log \frac{1+k}{1-k} + k^2 E + \frac{1}{2} \pi i k^2 (1-k) + i k^2 (K' - E') \right\} ,$$

where K , E are the complete elliptic integrals, with modulus k , of the first and second kinds respectively, and a dash denotes the same function of the complementary modulus $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. Since Π may also be expressed in terms of E we have finally

$$\frac{h}{d} = \frac{\frac{1}{4} \pi (1-k) + \frac{1}{2} (K' - E')}{D} , \quad (9)$$

$$\frac{M}{M_{\infty}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \pi \right) (1-k)}{D} , \quad (10)$$

and

$$\frac{J}{J_{\infty}} = \frac{\left(\frac{\pi + 2}{\pi} \right) E}{D} , \quad (11)$$

³ P. BYRD and M. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* (Springer-Verlag, Berlin 1954).

where

$$D = 1 + E + \frac{1}{2} (1 - k) \log \frac{1+k}{1-k}. \quad (12)$$

Now when k is small,

$$K' = \log \frac{4}{k} + O\left(k^2 \log \frac{4}{k}\right), \quad E' = 1 + O\left(k^2 \log \frac{4}{k}\right), \quad E = \frac{1}{2} \pi + O(k^2),$$

so that the case $k \rightarrow 0$ corresponds to $h/d \rightarrow \infty$, and, moreover h/d varies so rapidly with k that when $h/d = 1$, k is still only 0.01 and then J/J_∞ differs from 1 by merely 0.004 and M/M_∞ differs from 1 by 0.014. From about $h/d = 1$ to $h/d = \infty$ then, good approximations to (10) and (11) are

$$\frac{J}{J_\infty} - 1 = -\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \exp\left[\frac{1}{2} \pi - 1 - \frac{(2 + \pi) h}{d}\right] \quad (13)$$

and

$$\frac{M}{M_\infty} - 1 = -(4 + \pi) (2 + \pi)^{-1} \exp\left[\frac{1}{2} \pi - 1 - \frac{(2 + \pi) h}{d}\right]. \quad (14)$$

At the other extreme $k \rightarrow 1$ gives $h/d \rightarrow 0$ and there $M/M_\infty \rightarrow 0$, while

$$\frac{J}{J_\infty} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = 0.818,$$

so that there is not a great deal of variation of jet momentum over the whole range.

The curves are shown in Figure 2. As remarked on before the interesting fact is that, as far as gross features are concerned, the jet behaves as if governed by parabolic equations down to such comparatively small values of h/d . It seems to the author that this result is by no means obvious.

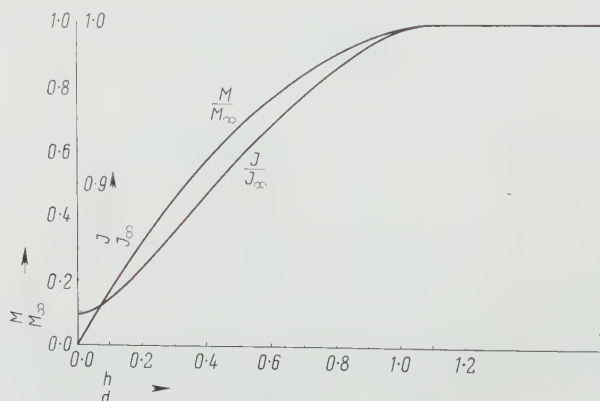


Figure 2
Variation of excess-momentum flux and mass flux with wall spacing.

Zusammenfassung

Ein ebener Flüssigkeitsstrahl von der Weite d wird normal gegen eine Wand geleitet, die von der Quelle h Einheiten entfernt ist. Man nimmt gewöhnlich an, dass, wenn das Verhältnis h/d gross ist, die Auswirkung des Hindernisses nicht zur Quelle des Strahles zurückwirkt, so dass im besonderen wichtige Eigenschaften des Strahls, wie sein Impuls und die Massenströmung, durch den Widerstand unberührt bleiben.

An einem einfachen Modell, in dem der Strahl, bestehend aus einer inkompressiblen und reibungslosen Flüssigkeit, von einem Schlitz in der Wand einer unendlichen Kammer ausströmt, zeigen wir, dass, soweit diese Haupteigenschaften betroffen sind, der Strahl durch das Hindernis beinahe ungestört bleibt, selbst für Werte der Verhältniszahl h/d , die nahe an der Einheit liegen.

(Received: July 29, 1959.)

Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie

VON HANS ZIEGLER, ETH, Zürich

1. Einleitung

Die Fliessbedingung eines isotropen idealplastischen Materials¹⁾, das unter hydrostatischem Druck nicht fliesst, ist bekanntlich [2] von der Form

$$F(S_2, S_3) = 0, \quad (1.1)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \dots - \sigma_y \sigma_z - \dots) + \tau_{yz}^2 + \dots, \\ S_3 &= \frac{1}{27} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) (2 \sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) (2 \sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz}^2 - \dots + 2 \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

die Grundvarianten des Spannungsdeviators sind [3] und die Funktion F so gewählt ist, dass $F(0, 0) < 0$ gilt. So hat im Falle der Fliessbedingung von v. MISES [4] (1.1) die einfache Form

$$F = S_2 - \frac{1}{3} \sigma_0^2 = 0, \quad (1.3)$$

wenn σ_0 die Fliessgrenze im linearen Spannungszustand bezeichnet; nach der Fliessbedingung von TRESCA [5] ist dagegen

$$F = 4 S_2^3 - 27 S_3^2 - 9 \sigma_0^2 S_2^2 + 6 \sigma_0^4 S_2 - \sigma_0^6 = 0. \quad (1.4)$$

Im Rahmen der Theorie des plastischen Potentials [6] lautet das zugehörige Fliessgesetz, in den plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{yz}, \dots$ ge-

¹⁾ Bezüglich der Definition siehe [1]. Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 163.

schrieben, wiederum allgemein

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \sigma_x} \right), \dots, \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} \right), \dots, \end{aligned} \right\} \lambda \geq 0. \quad (1.5)$$

Die hier auftretenden partiellen Ableitungen von S_2 und S_3 sind nach (1.2) durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \dots, \\ \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} &= 2 \tau_{yz}, \dots, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{9} (2 \sigma_x^2 - \sigma_y^2 - \sigma_z^2 + 4 \sigma_y \sigma_z - 2 \sigma_z \sigma_x - 2 \sigma_x \sigma_y) \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2), \dots, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{2}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz} + 2 \tau_{zx} \tau_{xy}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

gegeben.

2. Problemstellung

Ist die z -Achse Hauptachse des Spannungszustandes, dann gilt

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad (2.1)$$

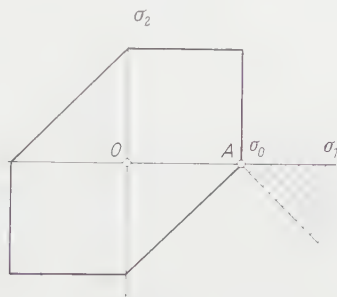
und aus den Beziehungen (1.6) folgt, dass die partiellen Ableitungen von S_2 und S_3 nach τ_{yz} sowie τ_{zx} verschwinden. Somit ist nach (1.5)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} \right) = 0, \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial S_2} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{zx}} + \frac{\partial F}{\partial S_3} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{zx}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Zwar muss grundsätzlich auch die Möglichkeit $\lambda = \infty$ im Auge behalten werden, wie etwa beim ebenen Spannungszustand die Diskussion des Fließgesetzes in den Ecken des aus (1.4) zu gewinnenden Tresca-Sechsecks (Figur 1) zeigt; hier kann man indessen diesen Fall, da man die Endlichkeit der übrigen Verzerrungsgeschwindigkeiten postulieren muss, ausschliessen.

Wenn also eine Achse Hauptachse des Spannungstensors ist, dann ist sie unter den in Abschnitt 1 formulierten allgemeinen Voraussetzungen über die Fließbedingung und das Fließgesetz auch Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, wie das von H. GEIRINGER [7] erstmals festgestellt worden ist. Dagegen ist die Umkehrung dieses Satzes und damit die strenge Richtigkeit der Aussage, dass die beiden Tensoren koaxial seien, keineswegs evident. Da nämlich ein symmetrischer Tensor zweiter Ordnung mehr als ein Tripel von Hauptachsen (das heisst deren unendlich viele) aufweisen kann, ist es durchaus denkbar, dass der Spannungstensor in einem Punkt drei wohldefinierte Hauptachsen, der Tensor der

Verzerrungsgeschwindigkeiten aber noch weitere Hauptachsensysteme besitzt, so dass nicht jede seiner Hauptachsen auch eine solche des Spannungstensors ist. Dieser Fall tritt beispielsweise stets dann ein, wenn alle Verzerrungsgeschwindigkeiten null sind, das heisst, wenn das zum betreffenden Punkt gehörende Raumelement zwar plastifiziert ist, sich aber wie ein starrer Körper, bzw. gar nicht bewegt. Der Schluss von (2.2) auf (2.1) wird sich daher, wenn überhaupt, nur unter der Voraussetzung ziehen lassen, dass sich das Material wirklich plastisch deformiert.



Figur 1

Tresca-Sechseck für den ebenen Spannungszustand.

Das hier aufgeworfene Problem ist von Bedeutung für den ebenen Verschiebungszustand. Dieser wird, wenn x, y die Verschiebungsebene ist, durch die Forderungen

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \quad (2.3)$$

samt der Bedingung definiert, dass die übrigen Verzerrungsgeschwindigkeiten nur von x und y abhängen. Aus den letzten beiden Beziehungen (2.3) wird in der Literatur allgemein auf (2.1) geschlossen²⁾. Dieser Schluss, so sehr er sich auch aufdrängt, folgt aber nicht ohne weiteres aus (2.2). Es ist auch nicht einzusehen, wie er sich physikalisch rechtfertigen lässt. Wohl ist man versucht, die Symmetrie heranzuziehen und daraus, dass sich zwei benachbarte, zur Ebene x, y parallele Schichten gleich bewegen, auf die Abwesenheit der die Symmetrie störenden Schubspannungen τ_{yz} und τ_{zx} zu schliessen. Symmetriebetrachtungen sind aber in der Plastizitätstheorie gefährlich und entschieden abzulehnen. Bekanntlich liegt es auch beim Zugversuch nahe, aus Symmetriegründen darauf zu schliessen, dass die Querkontraktion in allen Querrichtungen gleich gross sei. Aus der Fliessbedingung von TRESCA und dem zugehörigen Fliessgesetz folgt aber (Figur 1) nur, dass im Punkte $A(\sigma_0, 0)$ des Fließsechsecks für den ebenen Spannungszustand der Vektor $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ der Verzerrungsgeschwindigkeit im schraffierten Gebiet liegen muss, und da mit Rücksicht auf die Inkompressibilität des Materials nur noch die Bedingung $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$ hinzukommt, braucht die Symmetrieforderung $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3$ keineswegs erfüllt zu sein.

Bei Beschränkung auf die Fliessbedingung von v. MISES und das zugehörige Fliessgesetz ist der Schluss von (2.2) auf (2.1), sofern man plastischen Fluss voraussetzt, korrekt und leicht zu ziehen (vergleiche zum Beispiel [1], S. 125). Aus (1.3)

²⁾ Siehe zum Beispiel [7]; [8]; [1], S. 126; [3], S. 268; [9].

erhält man nämlich $\partial F/\partial S_2 = 1$ und $\partial F/\partial S_3 = 0$, also aus (2.2) nach (1.6)

$$\dot{\gamma}_{yz} = 2\lambda \tau_{yz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 2\lambda \tau_{zx} = 0, \quad (2.4)$$

und da $\lambda = 0$ einer starren Bewegung entsprechen würde, folgt hieraus (2.1).

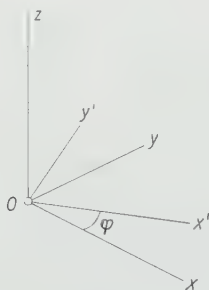
Im folgenden soll dieser Schluss verallgemeinert und nachgewiesen werden, dass unter den weitgefassten Voraussetzungen von Abschnitt 1 betreffend Fließbedingung und Fließgesetz beim plastischen Fluss jede Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten auch eine solche des Spannungstensors ist. Im Anschluss hieran soll gezeigt werden, dass sich dieses Resultat zwar nicht direkt, aber unter einer einschränkenden Voraussetzung auch auf gewisse Körper mit Verfestigung übertragen lässt.

3. Reduktion des Spannungszustandes

Bei einer Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse (Figur 2) transformieren sich die Spannungskomponenten $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$ gemäss

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi, \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi, \\ \tau'_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ \tau'_{zx} &= \tau_{zx} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi, \\ \tau'_{yz} &= -\tau_{zx} \sin \varphi + \tau_{yz} \cos \varphi, \\ \sigma'_z &= \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Die ersten drei Beziehungen (3.1) sind die Transformationen des ebenen Spannungszustandes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, die sich geometrisch mit dem Spannungskreis interpretieren lassen; die beiden folgenden sind diejenigen eines Vektors τ_{zx}, τ_{yz} in der Ebene x, y . Entsprechende Transformationen gelten für die Komponenten $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{yz}/2, \dots$ des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten.



Figur 2
Rotation des Koordinatensystems.

Wenn die z -Achse Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten ist, dann gelten die beiden Beziehungen (2.2), und zwar in der Form $\dot{\gamma}'_{yz} = \dot{\gamma}'_{zx} = 0$ auch im gedrehten Koordinatensystem. Mit $\lambda = 0$ oder $\partial F/\partial S_2 = \partial F/\partial S_3 = 0$ wären sämtliche Verzerrungsgeschwindigkeiten null, und da man den Fall der starren Bewegung wieder auszuschliessen hat, müssen in (2.2) beide Klammern null sein, ohne dass gleichzeitig $\partial F/\partial S_2$ und $\partial F/\partial S_3$ verschwinden. Das ist aber nur möglich,

wenn ihre Determinante

$$\frac{\partial S_2}{\partial \tau_{yz}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{zx}} - \frac{\partial S_2}{\partial \tau_{zx}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial \tau_{yz}} = 0 \quad (3.2)$$

ist. Führt man (3.2) mit (1.6) aus, so kommt

$$(\sigma_x - \sigma_y) \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{xy} (\tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = 0, \quad (3.3)$$

und da die Bedingungen (2.2) auch im gedrehten Koordinatensystem gelten, muss (3.3) auch in den gestrichelten Spannungskomponenten erfüllt, mithin unabhängig von der Wahl des Winkels φ

$$(\sigma'_x - \sigma'_y) \tau'_{yz} \tau'_{zx} + \tau'_{xy} (\tau'^2_{yz} - \tau'^2_{zx}) = 0 \quad (3.4)$$

sein.

Der dritten Transformation (3.1) ist zu entnehmen, dass man stets einen Winkel φ so finden kann, dass $\tau'_{xy} = 0$ ist. Da ferner die Fließbedingung (1.1) von der ersten Grundinvariante $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ des Spannungstensors unabhängig ist, darf man von den drei Normalspannungen die gleiche Grösse subtrahieren und daher annehmen, dass im gedrehten System von den beiden Normalspannungen σ'_x, σ'_y eine beliebige null sei. Ist dann die andere ungleich null, so folgt aus (3.4), dass eine der beiden Schubspannungen τ'_{yz}, τ'_{zx} verschwinden, also beispielsweise $\tau'_{zx} = \sigma'_x = 0$ sein muss. Damit ist aber der gegebene auf den ebenen Spannungszustand $\sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}$ zurückgeführt. Sind dagegen σ'_x und σ'_y gleichzeitig null, so folgt aus den ersten drei Transformationen, (3.1) bzw. aus dem Spannungskreis, dass auch in jedem anderen Koordinatensystem mit z als Achse $\sigma'_x = \sigma'_y = \tau'_{xy} = 0$ ist. Nach der vierten Transformation (3.1) kann dann der Drehwinkel φ so gewählt werden, dass überdies $\tau'_{zx} = 0$ gilt, und damit ist der Spannungszustand wiederum auf einen ebenen σ'_z, τ'_{yz} reduziert.

Falls also die Bewegung nicht starr und die z -Achse Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten ist, dann lässt sich der gegebene Spannungszustand durch eine Drehung um die z -Achse in jedem Fall auf einen ebenen $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ zurückführen. Somit ist x eine Hauptachse des Spannungszustandes, und es muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass auch z eine solche ist.

4. Der ebene Spannungszustand

Der Spannungskreis des ebenen Spannungszustandes $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ ist durch die Abszisse seines Mittelpunktes und seines Radius, also durch die Grössen

$$I_1 = \sigma_y + \sigma_z, \quad I_2 = (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4 \tau_{yz}^2 \quad (4.1)$$

vollständig bestimmt. Daher muss sich die Fließbedingung (1.1) hier auch in der Form

$$G(I_1, I_2) = 0 \quad (4.2)$$

und das Fließgesetz in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_y &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_y} = \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_y - \sigma_z) \right], \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_z} = \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_y - \sigma_z) \right], \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \lambda \frac{\partial G}{\partial \tau_{yz}} = 8 \lambda \frac{\partial G}{\partial I_2} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

anschreiben lassen. In der Tat überzeugt man sich leicht davon, dass aus (1.2) mit $\sigma_x = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$

$$S_2 = \frac{1}{12} (I_1^2 + 3 I_2), \quad S_3 = -\frac{1}{108} (I_1^3 - 9 I_1 I_2) \quad (4.4)$$

folgt. Damit ist aber (4.2) gerechtfertigt.

Nach (4.3) führt die Bedingung $\dot{\gamma}_{yz} = 0$, wenn die starre Bewegung wieder ausgeschlossen wird, auf

$$\tau_{yz} \left(\frac{\partial G}{\partial I_2} \right)_{\dot{\gamma}_{yz}=0} = 0. \quad (4.5)$$

Da $\dot{\epsilon}_y$ und $\dot{\epsilon}_z$ frei wählbar sind, folgt hieraus $\tau_{yz} = 0$, denn das Verschwinden des zweiten Faktors wäre nach (4.3) mit der Beziehung $\dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_z$ gleichbedeutend. Damit ist aber nachgewiesen, dass z eine Hauptachse des Spannungszustandes ist.

5. Körper mit Verfestigung

Bisher wurde angenommen, dass das betrachtete Material idealplastisch sei. Lässt man jetzt auch Körper zu, die sich nach der Regel von PRAGER [10] oder nach der vom Verfasser vorgeschlagenen Modifikation ([9], S. 55) derselben verfestigen, so sind in den Beziehungen von Abschnitt 1 die Spannungskomponenten rechterhand durchwegs durch die Ausdrücke $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$ zu ersetzen, und zwar gilt im Falle der Pragerschen Verfestigungsregel beim plastischen Fließen [11]

$$\dot{\alpha}_x = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_x, \dots, \quad \dot{\alpha}_{yz} = \frac{1}{3} c \dot{\gamma}_{yz}, \dots, \quad (5.1)$$

nach ihrer Modifikation dagegen

$$\dot{\alpha}_x = \mu (\sigma_x - \alpha_x), \dots, \quad \dot{\alpha}_{yz} = \mu (\tau_{yz} - \alpha_{yz}), \dots \quad (5.2)$$

Dabei sind c und μ positive Konstanten, deren Bedeutung in diesem Zusammenhang unerheblich ist, und ferner gilt zu Beginn des plastischen Flusses

$$\alpha_x = \dots = \alpha_{yz} = \dots = 0.$$

Nimmt man an, dass die z -Achse in irgendeinem Stadium des plastischen Flusses Hauptachse des Spannungstensors, mithin (2.1) erfüllt sei, so folgt aus den in der angegebenen Weise verallgemeinerten Beziehungen (1.5) und (1.6) noch nicht (2.2); eine Hauptachse des Spannungstensors ist also im allgemeinen nicht Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten. Das hängt damit zusammen, dass das Material mit der Verfestigung anisotrop wird. Nimmt man aber die Voraussetzung $\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0$ hinzu, so kommt jetzt (2.2), und zudem schliesst man aus (5.1) bzw. (5.2) auf $\dot{\alpha}_{yz} = \dot{\alpha}_{zx} = 0$. Folglich ist jede raumfeste Achse, die während des ganzen Fließvorganges eine Hauptachse des Spannungstensors ist, jederzeit auch Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten und damit auch Hauptachse des Verzerrungstensors.

Nimmt man umgekehrt an, dass die z -Achse in irgendeinem Stadium des plastischen Flusses Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, mithin (2.2) erfüllt sei, so kann man den Spannungszustand $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$ gemäss Abschnitt 3 auf einen ebenen $\sigma_y - \alpha_y, \sigma_z - \alpha_z, \tau_{yz} - \alpha_{yz}$ zurückführen, wobei im gedrehten Koordinatensystem insbesondere $\tau_{zx} - \alpha_{zx} = 0$ wird. Sodann zeigt man analog wie in Abschnitt 4, dass $\tau_{yz} - \alpha_{yz} = 0$ sein muss; da aber hieraus und aus

$\tau_{zx} - \alpha_{zx} = 0$ nicht (2.1) folgt, ist eine Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten im allgemeinen nicht Hauptachse des Spannungstensors. Nur mit der weiteren Voraussetzung $\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0$ erhält man (2.1); da aber dann aus (5.1) bzw. (5.2) auch $\dot{\alpha}_{yz} = \dot{\alpha}_{zx} = 0$ folgt, ist jede raumfeste Achse, die während des ganzen Fließvorganges Hauptachse des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten und somit auch eine solche des Verzerrungstensors ist, jederzeit auch eine Hauptachse des Spannungstensors.

Damit ist insbesondere auch für Körper, die sich gemäss (5.1) oder (5.2) verfestigen, nachgewiesen, dass im Falle des ebenen Verschiebungszustandes (2.3) die Normale z zur Verschiebungsebene stets eine Hauptachse des Spannungszustandes ist³⁾.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. PRAGER und P. G. HODGE, *Theorie ideal plastischer Körper* (Springer-Verlag, Wien 1954).
- [2] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity* (Clarendon Press, Oxford 1950), S. 16.
- [3] R. T. SHIELD und H. ZIEGLER, *On Prager's Hardening Rule*, Z. angew. Math. Phys. 9a, 266 (1958).
- [4] R. v. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Goettinger Nachr., Math. Phys. Klasse 1913, 582.
- [5] H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mém. prés. Acad. Sci., Paris, 18, 733 (1868).
- [6] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [7] H. GEIRINGER, *Some Recent Results in the Theory of an Ideal Plastic Body*, Adv. Appl. Mech. 3 (Academic Press, New York 1953), S. 207.
- [8] A. M. FREUDENTHAL und H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Physik, Band 6 (Springer-Verlag, Berlin 1958), S. 350.
- [9] H. ZIEGLER, *A Modification of Prager's Hardening Rule*, Quart. Appl. Math. 17, 60 (1959).
- [10] W. PRAGER, *The Theory of Plasticity, A Survey of Recent Achievements* (James Clayton Lecture), Proc. Inst. Mech. Eng. 169, 41 (1955).
- [11] CH. CLAVUOT und H. ZIEGLER, *Über einige Verfestigungsregeln*, Festschrift Richard Grammel, Ing. Arch. 28, 13 (1959).

Summary

In an ideally plastic material any principal axis of the stress tensor is also a principal axis of the strain rate tensor. It is shown here that in plastic flow also the reverse is true. Besides, the validity of either statement is discussed for materials obeying PRAGER's hardening rule or its modification proposed by the author.

(Eingegangen: 17. Dezember 1959.)

³⁾ Der Autor ist Herrn Dr. CH. CLAVUOT für die kritische Durchsicht dieser Mitteilung zu Dank verpflichtet.

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Festschrift Richard Grammel. Zum 70. Geburtstag am 3. März 1959. Unter Mitwirkung von A. BETZ, K. KLOTTER, K. MARGUERRE und E. METTLER herausgegeben von K. v. SANDEN (Springer-Verlag, Berlin 1959). 372 S., 217 Abb.; DM 52.—.

RICHARD GRAMMEL ist uns vor allem als Gründer und Herausgeber des Ingenieur-Archivs ein Begriff, als Redaktor der Mechanikbände des «alten» *Handbuches der Physik*, als Autor des bekannten Buches über den Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, sowie neben C. B. BIEZENO als Schöpfer des berühmten Werkes über technische Dynamik.

Die vorliegende Festschrift fügt sich als Band 28 in den Rahmen des Ingenieur-Archivs und enthält vierzig Aufsätze, die sich über das ganze Gebiet der Mechanik erstrecken und damit in schönster Weise für die Weite des Problemkreises zeugen, den GRAMMEL selbst durch seine wissenschaftliche Tätigkeit befruchtet hat. Diese Beiträge, von denen die meisten auch den Geist des Lehrers und Freundes GRAMMEL dokumentieren, können hier nicht im einzelnen gewürdigt oder auch nur aufgezählt werden. Immerhin sei auf das sympathische Geleitwort aus der Feder von BIEZENO noch besonders hingewiesen, das mit der folgenden Beurteilung des Geehrten schliesst: «Fassen sie [die Schüler, Freunde und Fachgenossen...] in grösster Kürze zusammen, wobei jedem Wort volle Bedeutung zukommt, so ehren sie in ihm den grossen Gelehrten, der seinem Fachgebiet national und international sehr bedeutsame Dienste geleistet hat; den vorzüglichen Lehrer; den integren, in seinen Auffassungen nicht zu erschütternden Menschen, der in einer ebenso wahnwitzigen wie verbrecherischen Zeit seiner Hochschule, seiner Stadt und seinem Land mit Einsatz seiner ganzen Persönlichkeit und seiner ganzen Arbeitskraft mit grossem Erfolg gedient hat.»

H. ZIEGLER

Principles and Applications of Random Noise Theory. Von JULIUS S. BENDAT (John Wiley & Sons, New York and Chapman & Hall, London 1958). 431 S., 106 Fig.; \$ 11.—.

Das Bedürfnis, die vielen zerstreuten Erkenntnisse und Methoden über die Behandlung von geräuschbehafteten Systemen in zweckmässiger Weise zusammengestellt vor sich zu haben, wird mit dem vorliegenden Werk fast ideal gestillt. Da es sich in erster Linie an den Ingenieur wendet, müssen notgedrungen auch die statistischen Grundlagen und das mathematische Rüstzeug dargestellt werden. So behandelt das 1. Kapitel Zufallsprozesse, Charakterisierung der technischen Systeme und Korrelationsfunktionen. Leistungsspektren, aufbauend auf Fourier-Reihe und Fourier-Integral, werden im 2. Kapitel diskutiert und der Zusammenhang mit der Korrelationsfunktion gezeigt, sowohl für stationäre wie nichtstationäre Zufallsprozesse. Das 3. Kapitel ist der Wahrscheinlichkeitstheorie gewidmet und angewandt auf die Analyse von registrierten Geräuschen. Im 4. Kapitel wird eine allgemeine Theorie gegeben über die optimale lineare Vorhersage und Filterung, basierend auf der Methode der kleinsten Quadrate und anwendbar auf lineare Systeme mit veränderlichen Koeffizienten, welche durch beliebige nichtstationäre Zufallsprozesse gestört werden. Die folgenden sechs Kapitel befassen sich mit physikalischen und technischen Anwendungen, wobei aber das mathematische Werkzeug entsprechend ergänzt wird. Eine besondere Rolle spielt die Autokorrelationsfunktion, welche eine exponentiell gedämpfte Cosinusfunktion ist, zur Darstellung

von vielen vorkommenden Geräuschquellen (5. Kapitel). Für solche kann mit Vorteil für die Messung von Effektivwerten des Ausgangsfehlers von linearen Systemen mit veränderlichen Koeffizienten eine Analogrechenmaschine eingesetzt werden (6. Kapitel). Eine wichtige Rolle spielt die Abschätzung der statistischen Fehler bei Autokorrelationsmessungen (7. Kapitel). Das 8. Kapitel zeigt, wie Probleme des gestörten Radio-Doppel-Empfangs zu behandeln sind, indem hier die Betrachtung der Umhüllenden und der Korrelation von Zufallsgeräusch dargestellt wird. Dabei spielt auch die automatische Verstärkereinstellung eine Rolle, welche berücksichtigt wird. Den optimalen zeitveränderlichen Filtern wird das 9. Kapitel gewidmet unter der Voraussetzung, dass das Geräusch durch eine exponentielle Cosinus-Korrelationsfunktion charakterisiert sei. Das 10. Kapitel befasst sich schliesslich noch mit dem schwierigen Problem der Zahl der Nulldurchgänge pro Zeitabschnitt, verursacht durch Geräusche. Die Betrachtung von RICE wird dahingehend erweitert, dass als Signal eine Sinuswelle mit konstanter Frequenz aber statistisch veränderlicher Amplitude und Phase zugrunde gelegt wird.

Da das Buch sowohl dem in der Forschung und Entwicklung stehenden Fachmann wie auch dem fortgeschrittenen Studenten dienen will, sind nebst neuesten Erkenntnissen auch die grundlegenden Betrachtungen berücksichtigt worden. Wo dies nicht der Fall sein konnte, ist auf die entsprechende Literatur empfehlend hingewiesen. Ob zu jedem Kapitel eine Einführung und eine Schlussbetrachtung notwendig sei, ist Geschmacksache, sicher ist, dass das vorliegende Buch eine spürbare Lücke in der Handbibliothek zu schliessen vermag für alle diejenigen, die mit statistisch zufälligen Störungen in ihren zu bauenden Systemen rechnen müssen.

H. WEBER

Stationäre Wärmespannungen. Von HEINZ PARKUS (Springer-Verlag, Wien 1959). 165 S., 34 Abb.; sFr. 38.90.

Das Buch ist als Fortsetzung des vom Verfasser zusammen mit ERNST MELAN bereits 1953 im gleichen Verlag publizierten Bändchens *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder* konzipiert. Es geht aber nicht nur in dem Sinne weiter, dass jetzt nichtstationäre Temperaturfelder betrachtet werden, sondern auch darin, dass neben elastischen auch viskoelastische und plastische Körper in den Kreis der behandelten Probleme einbezogen werden.

Dem Ingenieur, der nach Lösungen in konkreten Fällen sucht, kann das Buch bestens empfohlen werden. Es gibt eine auch für den Forscher auf diesem oder verwandtem Gebiete sehr wertvolle und recht vollständige Übersicht über den heutigen Stand der Forschung und die zur Verfügung stehenden Lösungen; zudem ist die Dokumentation vorbildlich. Als Einführung dagegen ist das Buch weniger geeignet, da die theoretische Fundierung gerade in den entscheidenden Punkten sehr kurz gehalten ist, bzw. fehlt. So enthält das einleitende Kapitel eine relativ breite Behandlung rein mechanischer Prinzipien, die überall anderswo nachgelesen werden können und im vorliegenden Rahmen von sekundärer Bedeutung sind, während bei den in diesem Zusammenhang entscheidenden Grundtatsachen der Wärmeleitung die Exposition ganz fehlt und durch einige Literaturhinweise ersetzt ist.

H. ZIEGLER

Theorie der Stabilität einer Bewegung. Von JOEL G. MALKIN, in deutscher Sprache herausgegeben von WOLFGANG HAHN und ROLF REISSIG (R. Oldenbourg, München 1959). 402 S., 20 Abb.; DM 47.—.

Die Entwicklung der Regelungstechnik, der Astronautik und vieler anderer Gebiete bringt es mit sich, dass der Theorie der Stabilität von Bewegungen immer

grössere Bedeutung zukommt. Die klassischen Methoden, die auch heute noch eine grosse Rolle spielen, stützen sich auf die Linearisierung der Bewegungsdifferentialgleichungen. Es ist indessen schon früh erkannt worden, dass dieses Verfahren logisch nicht einwandfrei ist und in gewissen Fällen ein falsches Bild von den wirklichen Stabilitätsverhältnissen gibt.

Die Grundlage für eine mathematisch strenge Behandlung des Stabilitätsproblems ist 1892 in seiner Dissertation durch LJAPUNOW geschaffen worden. Auf dieser Basis hat sich die seitherige Forschung entwickelt; dabei hat vor allem die russische Schule grosse Erfolge erzielt. Das vorliegende Werk ist von einem kompetenten Kenner und Förderer der Materie in streng mathematischer Form geschrieben und fasst die vielen Einzelarbeiten auf diesem Gebiet zu einem ausgezeichneten Lehrbuch zusammen. Die russische Fassung datiert von 1952; der deutsche Text enthält aber viele Verbesserungen von seiten des Verfassers wie der Übersetzer.

H. ZIEGLER

Gasentladungsröhren in der Nachrichtentechnik. Nachrichtentechnische Fachberichte NFT, Bd. 9. Herausgegeben von J. WOSNIK (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1957). 62 S., 99 Fig.; DM 8.50.

Das vorliegende Heft enthält zwölf Vorträge, die von europäischen Gasentladungsspezialisten an der Diskussionstagung in Aachen (Februar 1957) gehalten worden sind. Sie sind darum interessant, weil sie in einen Zeitpunkt fallen, in dem sich das allgemeine Interesse der Elektroniker von den Gasentladungsröhren eher abwandte, um sich mehr auf die Halbleitertechnik zu konzentrieren. Die Gründe dieses Verhaltens – vor allem der Automatik – liegen zum Teil in den für elektronische Schaltelemente relativ langen Schaltzeiten, in Unannehmlichkeiten im Zusammenhang mit dem Löschvorgang sowie in den hohen Betriebs- und Steuerungsspannungen. Die vorteilhaften Eigenschaften dieser Bauelemente, wie hohe Lebensdauer und grosse Robustheit im Betrieb, rechtfertigen offenbar weitere Entwicklungsarbeiten zur Verbesserung der Röhreneigenschaften.

So wird berichtet über Massnahmen zur Verkürzung und Stabilisierung der Schaltzeit, über Untersuchungen von Zündempfindlichkeit und Löschzeit. Im Blick auf übertragungstechnische Anwendungen interessieren die Studien über Störschwingungen und deren Vermeidung, während der Schaltungsingenieur nützliche Hinweise für die Entwicklung von Tor- und Zähschaltungen findet. Ein besonderer Abschnitt ist den Sperröhren gewidmet, die im Frequenzbereich bis 10 000 MHz als Schaltdioden arbeiten müssen und daher besondere physikochemische Probleme aufwerfen. Der letzte Beitrag behandelt die Glimmröhren als Überspannungsableiter zum Schutz von Fernmeldeanlagen.

Alle Abschnitte sind durch gute graphische Darstellungen, Oszillogramme, Konstruktionsskizzen und Literaturangaben bereichert. Das Heft bietet einen guten Überblick über den Stand der Entwicklung und die Möglichkeiten der technischen Anwendung der Gasentladungsröhren und dürfte Physiker und Ingenieure in gleicher Weise interessieren.

F. KUMMER

Praktische Spannungsoptik. Von L. FÖPPL und E. MÖNCH (Springer-Verlag, Berlin 1959). 209 S., 163 Abb.; DM 30.–.

Die zweite Auflage dieses Buches, das in erster Linie für den in der Praxis tätigen Ingenieur geschrieben ist, wurde zum grossen Teil vollständig neu bearbeitet, da seit dem Erscheinen der ersten Auflage verschiedene Methoden der Spannungsoptik erheblich verbessert worden sind.

Der erste Abschnitt gibt die theoretischen und experimentellen Grundlagen der ebenen und räumlichen Photoelastizität sowie eine Behandlung der mechanischen Ähnlichkeitsgesetze, die für die Übertragung der Ergebnisse vom Modell auf die Wirklichkeit wichtig sind. Im zweiten Abschnitt sind die besonderen Verfahren kurz beschrieben, während der dritte einige typische Anwendungen enthält, die am Spannungsoptischen Laboratorium der Technischen Hochschule München ausgeführt worden sind.

Im Gegensatz zur ersten Auflage, in welcher aus verschiedenen Gründen die einfache spannungsoptische Apparatur (mit Filter, ohne Linsen und mit diffusum Licht) der üblichen optischen Bank bevorzugt wurde, werden jetzt beide Einrichtungen einander gegenübergestellt. Das neueste in München konstruierte Gerät vereinigt die Vorteile der ersteren (leichte Handhabung, gute Beobachtungsmöglichkeit grosser Flächen des Modells) mit den Vorteilen der letzteren (paralleler Strahlengang, Möglichkeit des Projizierens).

Das Buch ist ein Zeugnis der jahrzehntelangen Erfahrung beider Verfasser auf dem Gebiet der Photoelastizität und kann daher allen empfohlen werden, die sich mit dieser Wissenschaft und deren Anwendung beschäftigen wollen.

W. SCHUMANN

Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE und E. CREUTZ, Band 44, 1. Teil: *Instrumentelle Hilfsmittel des Kernphysikers* (Springer-Verlag, Berlin 1959). 473 S., 225 Fig.; DM 125.–.

Der vorliegende Band der Flüggeschen Handbuchreihe befasst sich mit Apparaten zur Beschleunigung geladener Teilchen. Das Gebiet des Acceleratorenbaues hat sich im Laufe der letzte Jahre zu industriellen Ausmassen ausgeweitet und liegt heute nicht mehr ausschliesslich in den Händen des Kernphysikers, sondern eröffnet auch Ingenieuren, Mathematikern und Technikern ein weites Tätigkeitsfeld. Neuere Arbeitsprinzipien, wie etwa die Entdeckung des Prinzips der starken Fokussierung, hatten zur Folge, dass immer höhere Werte der Maximalenergie angestrebt werden, was natürlich mit einem entsprechenden Anstieg des Aufwandes verbunden ist. Es ist daher charakteristisch, dass diejenigen Physiker, die grössere Acceleratoren für kernphysikalische Experimente benutzen, im allgemeinen nicht mehr in der Lage sind, die Feinheiten ihres Beschleunigers im Detail zu überblicken. Und gerade für diese Physiker dürfte das vorliegende Buch von Nutzen sein: es vermittelt Kenntnisse über die wichtigsten Acceleratortypen und deren Wirkungsweise, ohne dabei auf alle diejenigen Einzelheiten einzugehen, die für den Konstrukteur von Bedeutung sind.

Die zwei ersten Kapitel befassen sich mit dem Kaskadengenerator (E. BALDINGER) und dem Van-De-Graff-Generator (R. G. HERB) und ergänzen sich insofern vorteilhaft, als die Behandlung des Kaskadengenerators sich auf die Erzeugung der Hochspannung beschränkt, während Probleme, die beiden Acceleratoren gemeinsam sind, wie Ionenquellen, Strahlrohre usw., im zweiten Kapitel diskutiert werden. Die Zirkularbeschleuniger werden in vier weiteren Kapiteln behandelt: Zyklotron und Synchrozyklotron (B. L. COHEN), Elektron-Synchrotron (R. R. WILSON), Betatron (D. W. KERST) und Proton-Synchrotron (G. K. GREEN). Die Probleme der Teilchenbahnen, die Bahn- und Phasenstabilität, der Injektions- und Extraktionsmechanismus beanspruchen ihrer Bedeutung gemäss hier den weitesten Raum. Daneben werden aber auch die wichtigsten konstruktiven und technischen Fragen nicht vernachlässigt. Wie an allen Stellen des Buches werden zur Illustration in der Praxis ausgeführte Maschinen besprochen. Ein weiteres von SMITH verfasstes Kapitel über lineare Acceleratoren wird mit einer

allgemeinen Diskussion der Bewegungsgleichung eingeleitet. Elektronen- und Ionenbeschleuniger sind dabei separat behandelt. Besonders sorgfältig werden die für den Bau so wichtigen Toleranzforderungen besprochen und als Beispiele der Elektronenbeschleuniger in Stanford und der Beschleuniger für schwere Ionen in Berkeley angeführt. Im letzten Kapitel (D. J. HUGHES) wird der Reaktor als Neutronenquelle für kernphysikalische Experimente besprochen. Die Wahl der in diesem Kapitel diskutierten Objekte erscheint auf den ersten Blick etwas willkürlich. Ein Vergleich mit vorangehenden Bänden dieser Handbuchreihe zeigt jedoch, dass hier eine Fülle von wertvollen Ergänzungen zu anderen Artikeln (vgl. zum Beispiel *Instrumentelle Hilfsmittel des Kernphysikers*, 2. Teil) geboten wird. Man findet Angaben über Energiespektren von Reaktorneutronen, charakteristische Neutronenmessanordnungen sowie einen kurzen Überblick über Strahlungsschutzmassnahmen.

Wenn man den Zweck des vorliegenden Buches in der eingangs skizzierten Weise versteht und nicht eine erschöpfende Darstellung der behandelten Gegenstände erwartet, wird man – sofern nicht der hohe Preis davon abschreckt – gern zum Erwerb dieses Bandes schreiten.

F. HEINRICH

An Introduction to Plasticity. Von WILLIAM PRAGER (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading 1959). 148 S., 82 Fig.; \$6.50.

Das Buch ist als Übersetzung des Bändchens *Probleme der Plastizitätstheorie* angekündigt, das 1955 im Verlag Birkhäuser erschienen und in ZAMP 7, 471 (1956) besprochen worden ist. Tatsächlich stellt es eine modernisierte und erweiterte Fassung der deutschen Ausgabe dar. Neu sind die Abschnitte über Eindeutigkeit des anfänglichen Flusses im starrplastischen Medium unter gegebenen Lasten, über optimale Formgebung (Limit Design) und über einen Fall von modifiziert-pseudostationärem Fluss. Auch in den übrigen Abschnitten (zum Beispiel bei den Platten und in der Behandlung des Einflusses von Änderungen in der Geometrie des sich verformenden Körpers) sind neuere Resultate berücksichtigt. Die Literaturhinweise sind stark vermehrt sowie dem heutigen Stand angepasst worden, und schliesslich enthält die englische Fassung eine grössere Zahl von äusserst interessanten Übungsaufgaben.

Man kann sich fragen, ob der neue Titel dem Inhalt des Buches gerecht wird. Einführungen in die Plastizität gibt es viele; als knappe, meisterhaft klare, anschauliche und zudem ausgezeichnet dokumentierte Übersicht über die zurzeit wichtigsten Probleme und Verfahren steht dieses Werk aber allein.

H. ZIEGLER

Approximate Methods of Higher Analysis. Von L. V. KANTOROVICH und V. I. KRYLOV (P. Noordhoff Ltd., Groningen 1958). 681 S., 68 Fig.; \$ 17.—.

Der vorliegenden englischen Übersetzung liegt eine vierte, offenbar unveränderte Auflage des russischen Originals zugrunde. Die Autoren bemerken prinzipiell, dass heute ein viel umfangreicheres Erfahrungsmaterial über die Anwendungen der behandelten Methoden zur Verfügung steht als zur Zeit des ersten Erscheinens dieses Buches und dass der Einsatz von Rechenautomaten zum Teil neue Gesichtspunkte gebracht hat, und sie behalten sich für die Zukunft eine entsprechende totale Neubearbeitung des Stoffes vor.

Der Inhalt umfasst: Lösung von partiellen Differentialgleichungen durch Reihenansätze; approximative Lösung von Fredholmschen Integralgleichungen; Differenzenmethoden; Methoden der Variationsrechnung; Konforme Abbildungen, mit Anwendung auf harmonische und biharmonische Probleme; die Schwarzsche Methode (Dirichlet- und Neumann-Problem).

P. LÄUCHLI

Steady State Solution of the Relativistic Boltzmann Transport Equation¹⁾

IVAN ABONYI, Budapest, Hungary²⁾

Introduction

A detailed study of the Maxwellian velocity distribution function was made by F. JÜTTNER [1]³⁾ as early as in 1911 from the point of view of relativistic mechanics. JÜTTNER's treatment is based on a generalisation of the familiar phase-space method in which the Liouville theorem holds for the motions described by the relativistic equations of motion [2]. Then the distribution function is determined in the usual combinatorial way.

Here we propose to follow another line of thought. Namely, we start from the relativistic Boltzmann transport equation given by CLEMMOW and WILLSON [3] and KEN-ITI GOTO [4] and complete it with the collision integral. Then we try to find the steady state solution of this equation.

The Relativistic Boltzmann Transport Equation

Let $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ denote the distribution function of a system consisting of N identical particles, \mathbf{r} the position and

$$\mathbf{u} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

the reduced velocity of the particles (c being the velocity of light in vacuo). We note that

$$\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right]^{1/2} = (1 + \mathbf{u}^2)^{1/2}.$$

The particles of rest mass m_0 obey the relativistic equations of motion

$$m_0 c \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2)$$

¹⁾ A part of these calculations was carried out while the author was the guest of the Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze whose kind hospitality is gratefully acknowledged.

²⁾ Institute for Theoretical Physics, Eötvös University.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 175.

where \mathbf{F} is the ordinary force vector. The relativistic Boltzmann transport equation as given by CLEMMON and WILLSON is

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} \{(\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F})\} f = \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll}, \quad (3)$$

where $\nabla_{\mathbf{u}}$ is the gradient operating on the functions of \mathbf{u} , $(\Delta f / \Delta t)_{coll}$ represents the change in the value of f produced by collisions during a time interval of unit length (invariant collision integral). CLEMMON and WILLSON neglect the expression $(\Delta f / \Delta t)_{coll}$ because they do not take into account the role of the collisions. Though their approximation is appropriate for many practical applications, a more precise treatment of certain theoretical and practical problems demands closer consideration of this term.

As is well known from text-books of statistical mechanics [5], for the motions described by the Newtonian equations of motion the collision integral can be written in the form

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll}^{cl.} = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega d\mathbf{v}', \quad (4)$$

where $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ is the distribution function for the system, and

$$f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'), \quad \bar{f} = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}}), \quad \bar{f}' = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}}'), \quad (5)$$

\mathbf{v} and \mathbf{v}' , $\bar{\mathbf{v}}$ and $\bar{\mathbf{v}}'$ being the respective velocities of the colliding particles long before and long after the encounter; $I(g, \vartheta)$ is the differential cross section of the collision; and

$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|.$$

Remembering the deduction of (4), it is easy to see that (4) is valid also in the case of relativistic motions described by (2). The only change to be made is the substitution for the ordinary velocity \mathbf{v} of the reduced velocity \mathbf{u} . Then the relativistic form of the collision integral is

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll}^{rel.} = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega d\mathbf{u}', \quad (6)$$

where $g = |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|$, and

$$f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}), \quad f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}'), \quad \bar{f} = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}), \quad \bar{f}' = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}'), \quad (7)$$

\mathbf{u} and \mathbf{u}' , $\bar{\mathbf{u}}$ and $\bar{\mathbf{u}}'$ being the respective reduced velocities of the particles long before and long after the collisions.

CLEMMON and WILLSON have pointed out that the left hand side of (3) is an invariant scalar with respect to the Lorentz transformations. It is easy to see also that (6) is an invariant scalar.

So the complete Boltzmann transport equation in relativistic form looks like

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} \{ (\mathbf{F} \nabla_u) + (\nabla_u \mathbf{F}) \} f \\ = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega d\mathbf{u}' . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

In general – even in the case of the velocity-dependent Lorentz force – the term containing

$$\nabla_u \mathbf{F}$$

makes no contribution, and we shall therefore omit it in the following.

Determination of the Steady State Solution

We may call a state steady when

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

and when the collision integral has no effect on the distribution; in other words, when the state is not changed either by the time or by the collisions. These two suppositions made, we have to solve the differential equation

$$\frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} (\mathbf{F} \nabla_u) f = 0 . \quad (9)$$

Later we shall have to demonstrate, that the solution of (9) is consistent with the second supposition, i.e., that the solution makes the collision integral zero.

For the time being we shall confine ourselves to one spatial direction and conservative velocity-independent forces only. Then the differential equation to be solved is

$$c u (1+u^2)^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + (m_0 c)^{-1} F(x) \frac{\partial f}{\partial u} = 0 . \quad (10)$$

This can be separated. Supposing a solution of the form

$$f(x, u) = A(x) \cdot B(u)$$

we get

$$\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{A'(x)}{A(x)} = - \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u m_0 c^2} \cdot \frac{B'(u)}{B(u)} = a ,$$

from which we easily compute that

$$f(x, u) = b \exp \{ - a m_0 c^2 \sqrt{1+u^2} - a V(x) \} .$$

Here $V(x) = -\int F(x) dx$, and a and b are the constants of integration to be determined later. In the general case we find that

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = b \exp\left\{-a m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} - a V(\mathbf{r})\right\}. \quad (11)$$

We can compute S , the entropy of the system under consideration, with the help of the distribution function in the form

$$S = -k \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \log f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u},$$

where k is the Boltzmann constant and the integration is extended over the whole phase space. Then denoting

$$N = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}, \quad (12)$$

$$E = N \bar{E} = \iint \left\{ m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} + V(\mathbf{r}) \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}, \quad (13)$$

we obtain

$$S = -k N \log b + a k E.$$

Taking into account the well-known thermodynamic relationship between energy E , entropy S and absolute temperature T :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T},$$

we can conclude that

$$a = \frac{1}{k T}. \quad (14)$$

In order to see the meaning of the other constant of integration we consider that we are describing a system consisting of N identical particles. The total number of particles, in the case of zero potential energy, is given by

$$N = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u} = b V \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{m_0 c^2}{k T} \sqrt{1 + \mathbf{u}^2}\right\} d\mathbf{u},$$

where V is the volume of the system. Performing a polar transformation of the variables of integration, we arrive at

$$N = 4 \pi b V \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{m_0 c^2}{k T} \sqrt{1 + u^2}\right\} u^2 du,$$

u being the length of the vector \mathbf{u} . Let

$$\alpha = i \frac{m_0 c^2}{k T} \quad \text{and} \quad u = \text{sh } \varphi,$$

then

$$N = 4 \pi b V \int_0^{\infty} \exp\{i \alpha \operatorname{ch} \varphi\} \operatorname{sh}^2 \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi \\ = \pi b V \int_0^{\infty} \exp\{i \alpha \operatorname{ch} \varphi\} (\operatorname{ch} 3 \varphi - \operatorname{ch} \varphi) d\varphi.$$

This integral can be evaluated with the help of the following formula [6]:

$$\int_0^{\infty} \exp\{i z \operatorname{ch} t\} \operatorname{ch} p t dt = \frac{\pi i}{2} e^{-p(\pi i/2)} H_p^{(1)}(z) \quad (15a)$$

which is valid for $0 \leq \arg z \leq \pi$ and $p > 0$. Here $H_p^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind with the index p , obeying the following recurrence formulae:

$$\left. \begin{aligned} z H_{p-1}^{(1)}(z) + z H_{p+1}^{(1)}(z) &= 2 p H_p^{(1)}(z), \\ H_{p-1}^{(1)}(z) - H_{p+1}^{(1)}(z) &= 2 \frac{d}{dz} H_p^{(1)}(z). \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

So N can be computed to be

$$N = \frac{\pi^2}{2} b V \{H_1^{(1)}(\alpha) + H_3^{(1)}(\alpha)\} = \frac{2 \pi^2 b V}{\alpha} H_2^{(1)}(\alpha). \quad (16)$$

Then

$$b = \frac{N}{V} (2 \pi^2)^{-1} \frac{\alpha}{H_2^{(1)}(\alpha)} = \frac{N}{V} (2 \pi^2)^{-1} \frac{i \frac{m_0 c^2}{k T}}{H_2^{(1)}\left(i \frac{m_0 c^2}{k T}\right)}. \quad (17)$$

And so the distribution function of the steady state is

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = (2 \pi^2)^{-1} \frac{N}{V} \cdot \frac{i \frac{m_0 c^2}{k T}}{H_2^{(1)}\left(i \frac{m_0 c^2}{k T}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{k T} (m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} + V(r))\right\}. \quad (18)$$

It is easy to see that the collision integral (6) vanishes for this solution. One can demonstrate this statement by direct substitution, taking into account the fact that in the collision the normal components of the reduced velocities change their sign. So we can conclude that this solution is the appropriate one.

In general, we have to use the complicated expression (18) which can be evaluated for a given value of $m_0 c^2/kT$ by using tables of the Hankel functions. But in the limiting case, when $m_0 c^2/kT \gg 1$ we can obtain explicit results without such difficulties, making use of the asymptotic form of the Hankel

functions valid for large values of the argument:

$$H_2^{(1)}(i x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x}, \quad (19)$$

x being real and positive. Then we obtain instead of (17)

$$b = \frac{N}{V} \left(\frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{m_0 c^2}{k T} \right\} \quad (20)$$

and so the distribution function in this approximation becomes

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{N}{V} \left(\frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m_0 c^2}{k T} (\sqrt{1 + \mathbf{u}^2} - 1) \right\}. \quad (21)$$

This may be called the relativistic Maxwellian velocity distribution function.

In order to see its connection with the non-relativistic function, we transform the expression

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}$$

into a function of \mathbf{r} and \mathbf{v} . Evidently

$$f(\mathbf{r}_1 \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{v})} d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

where $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ is the distribution function with the new arguments and $\partial(\mathbf{u})/\partial(\mathbf{v})$ the Jacobian of the substitution. Taking into account that

$$\mathbf{u} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}},$$

we easily compute $\partial(\mathbf{u})/\partial(\mathbf{v})$ to be

$$c^3 \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 \right]^{-5/2}.$$

So we see that

$$f(\mathbf{r} \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \frac{N}{V} \left(\frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 \right]^{-5/2} \exp \left\{ - \frac{m_0 c^2}{k T} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} - 1 \right) \right\} \quad (22)$$

which is exactly that given by JÜTTNER [1].

Remarks

Here we may call the attention of the reader to an already well-known result, namely, that in general the law of the equipartition of the energy loses its meaning in relativistic statistics, because we cannot write the relativistic

kinetic-energy as a homogeneous quadratic form of the velocity variables. In an unspecified case of $m_0 c^2/kT$ with zero potential energy, using (13), (15a) and (15b), one obtains the average total energy of the particle in the form

$$\bar{E} = kT \left(1 - i \frac{m_0 c^2}{kT} \cdot \frac{H_2^{(1)'} \left(i \frac{m_0 c^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{m_0 c^2}{kT} \right)} \right)$$

(dash denotes differentiation with respect to the whole argument). Even in the case $m_0 c^2 \gg kT$ this expression gives

$$E = \frac{3}{2} kT + m_0 c^2.$$

REFERENCES

- [1] F. JÜTTNER, *Ann. Physik* 34, 856 (1911).
- [2] W. PAULI, *Teoria della relatività* (Torino 1958), p. 204.
- [3] P. C. CLEMMOW and A. J. WILLSON, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 53, 222 (1957).
- [4] KEN-ITI GOTO, *Progr. theor. Phys.* 20, 1 (1958).
- [5] E. W. MONTROLL, *Principles of Statistical Mechanics and Kinetic Theory of Gases*, in: *Handbook of Physics*, edited by E. V. CONDON and H. ODISHAW (New York 1958).
- [6] W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik* (Berlin 1948), p. 38.

Résumé

Depuis les travaux de JÜTTNER [1], nous connaissons la forme relativiste de la fonction de répartition maxwellienne des vitesses. Le traité de JÜTTNER est basé sur une généralisation de la méthode de l'extension en phases, de sorte que le théorème de Liouville est valable par rapport aux équations relativistes de mouvement. La fonction de répartition est déterminée par la méthode combinatoire usuelle.

Ici, nous proposons de suivre une autre voie. Partant d'une forme relativiste de l'équation de transport de Boltzmann donnée par CLEMMOW et WILLSON [3] et KEN-ITI GOTO [4], nous proposons une expression relativiste de l'intégrale de collision qui complète cette équation, et nous donnons ensuite sa solution pour l'état stationnaire.

(Received: August 21, 1959.)

The Transverse Flexure of a Thin Circular Plate Subject to Parabolic Loading over a Concentric Ellipse

By W. A. BASSALI, Alexandria, Egypt¹⁾

1. Introduction

The behaviour of transversely loaded elastic plates has for several years been the subject of much research. Many analyses have appeared of cases where the boundary of the plate is rigidly clamped, simply supported, or free, and the plate is under various distributions of normal thrust; excellent bibliographies are to be found in MUSKHELISHVILI'S book [1]²⁾ and at the end of a recent paper by DEVERALL [2]. The problem has been extensively investigated in a series of papers [3, 4, 5, 6] for a thin circular plate subject to different types of loading over a concentric or an eccentric circle, when the edge of the plate is elastically restrained according to a general boundary condition which includes the rigidly clamped and simply supported boundaries as particular cases. When the boundary of the circular plate is free, and the plate is subject to symmetrical or uniformly varying pressures over an eccentric circle and is supported at several interior or boundary points, exact solutions for the problem have been developed by the author [7, 8] through the application of MUSKHELISHVILI'S complex variable method. Appropriate expressions for the complex potentials, deflections and stresses have also been established [9, 10] for an elastically restrained circular plate which is partially loaded over a sector or over a segment of the plate. In two recent papers [11, 12] the bending of the same plate has been discussed, when uniform or hydrostatic loadings are distributed over the surface of an ellipse concentric with the plate. Making use of MUSKHELISHVILI'S complex variable solution of the first boundary-value problem in the theory of elasticity for elliptic plates ([1], p. 244), SAPONDŽYAN [13] has determined the transverse deflection of a clamped elliptic plate uniformly loaded over a concentric circle or over a confocal ellipse.

In this paper we follow the same procedures adopted in the two previous papers [11, 12], in order to derive the complex potentials which solve the problem of an elastically restrained circular plate subject to parabolic loading extending over the area of a concentric ellipse. Standard formulae for the complex combinations of stress components are used in the computation of the

¹⁾ Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, University of Alexandria.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 190.

boundary and central values of the bending, twisting moments and shearing forces. The two limiting cases in which the loaded elliptic patch becomes a circle or a line ellipse are also considered.

2. Basic Equations

Let C denote the boundary of a thin circular plate, of centre O and radius c , made of isotropic homogeneous material whose Poisson's ratio is η and YOUNG'S modulus is E . If $2h$ is the thickness of the plate then its flexural rigidity is known to be given ([14], p. 3) by

$$D = 2E \frac{h^3}{3(1-\eta^2)}. \quad (2.1)$$

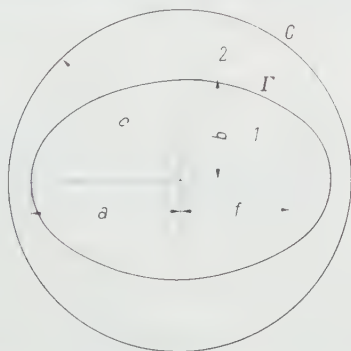
Let $z = x + iy = re^{i\theta}$ be any point in the mid-plane of the plate which is chosen as the plane $Z = 0$ of a rectangular Cartesian frame $O(x, y, z)$. We assume that the plate is divided into the two regions 1 and 2 by the contour Γ of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 \leq b \leq a \leq c), \quad (2.2a)$$

and we write

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad f^2 = a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2, \quad (2.2b)$$

where ε is the eccentricity of the ellipse (see figure). If $p_j(z, \bar{z})$ ($j = 1, 2$) are the



transverse load intensities at points of regions 1 (inside Γ) and 2 (between Γ and C) then, according to the Poisson-Kirchhoff theory of the bending of thin plates ([14], p. 88), the small transverse displacements w_j ($j = 1, 2$), measured in the upward direction OZ , at the point z satisfy the Lagrange partial differential equations³⁾

$$D \nabla^4 w_j(z, \bar{z}) = -p_j(z, \bar{z}) \quad (j = 1, 2), \quad (2.3)$$

³⁾ Bars are used to denote conjugate complex quantities.

where ∇^2 denotes the Laplacian operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = 4 \partial^2/\partial z \partial \bar{z}$. The general solutions of equations (2.3) may be expressed in terms of four analytic functions $\Omega_j(z)$, $\omega_j(z)$ ($j = 1, 2$), usually called the complex potentials and two particular integrals $W_j(z, \bar{z})$ corresponding to the load intensities $p_j(z, \bar{z})$:

$$w_j = \bar{z} \Omega_j(z) + z \bar{\Omega}_j(\bar{z}) + \omega_j(z) + \bar{\omega}_j(\bar{z}) + W_j(z, \bar{z}) \quad (j = 1, 2). \quad (2.4)$$

Adopting STEVENSON'S nomenclature⁴⁾ and method of specification of stress [15] the bending, twisting moments and shearing forces at any point z of the plate are furnished by

$$\tilde{r}\theta - \tilde{\theta}r = -4(1 + \eta)P \left[2 \operatorname{Re} \Omega'_j(z) + \frac{\partial^2 W_j}{\partial z \partial \bar{z}} \right], \quad (2.5a)$$

$$\tilde{r}\theta + \tilde{\theta}r - 2i\tilde{\theta}\theta = -4(1 - \eta)P \left[z \Omega''_j(z) + \frac{z^2(\omega''_j + W''_j)}{r^2} \right], \quad (2.5b)$$

$$\tilde{r}\bar{Z} - i\tilde{\theta}\bar{Z} = -8P \left(\frac{z}{r} \right) \left[\Omega''_j(z) + \frac{\partial^3 W_j}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right], \quad (2.5c)$$

where the plate modulus P denotes LOVE'S flexural rigidity D divided by the thickness of the plate, Re stands for the real part and the primes on Ω_j , ω_j , and W_j designate differentiation with respect to z .

The transition conditions expressing the continuity of the deflections, slopes, moments and shears at any point on Γ may be taken as

$$[w]_2^1 = \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_2^1 = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \right]_2^1 = \left[\frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right]_2^1 = 0. \quad (2.6)$$

These conditions have been found extremely helpful in treating problems concerning partially and normally loaded thin circular plates (see References [3-12]).

3. Boundary Conditions and Boundary Values of Moments and Shears

Along the circular boundary C of the plate we shall assume that

$$w = 0, \quad \frac{\tilde{r}\theta}{\tilde{\theta}r} = \frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}, \quad (3.1)$$

⁴⁾ The relations between STEVENSON'S notations [15] and those used by TIMOSHENKO [14] are

$$M_n = -2h\tilde{n}s, \quad M_s = 2h\tilde{s}\tilde{n}, \quad M_{ns} = -M_{sn} = 2h\tilde{s}\tilde{s} = -2h\tilde{n}\tilde{n}, \\ Q_n = -2h\tilde{n}\bar{Z}, \quad Q_s = -2h\tilde{s}\bar{Z},$$

$2h$ being the thickness of the plate.

where λ is a dimensionless restraining parameter and $\beta = (1 - \eta)/(1 + \eta)$. It was proved [3, 9] that the conditions (3.1) imply that

$$w = 0, \quad c \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\tilde{r}\tilde{\theta}}{\eta - \nu} = \frac{\tilde{\theta}_r}{\eta \nu - 1} = -\frac{P}{c} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{4P \left[2 \operatorname{Re} \Omega_2'(z) + \frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial \bar{z}} \right]}{\nu - 1}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}{1 - \eta} = \frac{c \tilde{\theta}\tilde{Z}}{1 - \nu} = -\frac{P}{c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Re} \left[2 \Omega_2' + \frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial \bar{z}} - \lambda \left\{ z \Omega_2'' + \frac{z^2 (\omega_2'' + W_2'')}{c^2} \right\} \right] = 0, \quad (3.5)$$

along C , where

$$\nu = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}, \quad \infty \geq \nu \geq \eta, \quad 1 \geq \lambda \geq -\beta. \quad (3.6)$$

The boundary C is clamped or simply supported according as $\lambda = 1$ ($\nu = \infty$) or $\lambda = -\beta$ ($\nu = \eta$), respectively. Equations (3.3) and (3.4) are convenient in computing the boundary values of the moments and shearing force $\tilde{\theta}\tilde{Z}$. The boundary value of the shearing force $\tilde{r}\tilde{Z}$ can be calculated by using (2.5c). All these equations have the advantage of not involving the complex potential $\omega_2(z)$.

4. Complex Potentials for a Thin Circular Plate under Parabolic Loading over a Concentric Ellipse

In two previous papers [11, 12] the particular integrals and complex potentials corresponding to the load intensities $p_1(z, \bar{z}) = \text{constant } p_0$, $p_2 = 0$ and $p_1(z, \bar{z}) = p_0 x = p_0 (z + \bar{z})/2$, $p_2 = 0$ have been completely determined. We now deal with the case

$$p_1(z, \bar{z}) = p_0 r^2 = p_0 z \bar{z}, \quad p_2(z, \bar{z}) = 0. \quad (4.1)$$

In this case the total load on the plate is easily seen to be $\pi p_0 a b d^2/4$ and the particular integrals may be taken as

$$W_1(z, \bar{z}) = -\frac{1}{9} k z^3 \bar{z}^3, \quad W_2(z, \bar{z}) = 0, \quad (4.2)$$

where

$$k = \frac{p_0}{64 D} = \frac{p_0}{128 h P}. \quad (4.3)$$

It is known that the conformal transformation

$$z = \frac{1}{2} [(a+b)\zeta + (a-b)\zeta^{-1}] \quad (4.4)$$

maps Γ on the boundary of the unit circle in the ζ -plane. The point ζ corresponding to the point z on Γ is therefore given by

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{Z}}{a + b}, \quad \zeta^{-1} = \frac{z - \sqrt{Z}}{a - b}, \quad (4.5)$$

where⁵⁾

$$Z^2 = z^2 - f^2. \quad (4.6)$$

Substituting from (4.2) in (2.4) and introducing the resulting expressions in the continuity conditions (2.6) we find, using (4.4) and noticing that along Γ we have $\dot{\zeta} = \zeta^{-1}$

$$[\bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z})]_2^1 = \frac{1}{9} k z^3 \bar{z}^3 = \frac{1}{576} k [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^3, \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} & [\bar{z}\Omega'(z) + \Omega(\bar{z}) + \omega'(z)]_2^1 \\ &= \frac{1}{3} k z^2 \bar{z}^3 = \frac{1}{96} k [(a-b)\zeta + (a+b)\zeta^{-1}] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$[\Omega'(z) + \Omega'(z)]_2^1 = k z^2 \bar{z}^2 = \frac{1}{16} k [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^2, \quad (4.9)$$

$$[\Omega''(z)]_2^1 = 2k z \bar{z}^2 = \frac{1}{4} k [(a-b)\zeta + (a+b)\zeta^{-1}] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]. \quad (4.10)$$

From (4.4) we deduce that

$$\frac{d}{dz} = \frac{2}{(a+b) - (a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta}, \quad (4.11)$$

and hence (4.10) gives

$$\left[\frac{d}{d\zeta} \Omega'(z) \right]_2^1 = \frac{1}{8} k \zeta^{-1} [4ab + f^2(\zeta^2 - \zeta^{-2})] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]. \quad (4.12)$$

Integrating (4.12) and introducing for convenience the notations

$$u_n = \zeta^n + \zeta^{-n}, \quad v_n = \zeta^n - \zeta^{-n} \quad (4.13)$$

we immediately get

$$\left[\Omega'(z) \right]_2^1 = \frac{1}{8} k \left[8ab d^2 \log \zeta + \frac{1}{4} f^4 u_4 + f^2 d^2 u_2 + 2ab f^2 v_2 + K_1 \right], \quad (4.14)$$

⁵⁾ No confusion need arise between this definition of Z and the third dimension of the plate as expressed in the stresses rZ , θZ , xZ , and yZ , since the third dimension Z only arises in such stresses.

where K_1 is a real constant⁶) to be determined. Substituting from (4.14) in (4.9) we conclude that $K_1 = d^2 (3a^2 + b^2)/2$, and hence, using (4.11), equation (4.14) becomes

$$\begin{aligned} [\Omega'(z)]_2^1 &= \left[\frac{2}{a+b-(a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta} \Omega(z) \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{8} k \left[8ab d^2 \log \zeta + \frac{1}{4} f^4 u_4 + f^2 d^2 u_2 + 2ab f^2 v_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} d^2 (3a^2 + b^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

The integration of (4.15) yields

$$\begin{aligned} [\Omega(z)]_2^1 &= \frac{1}{16} k \left[16ab d^2 z \log \zeta + \frac{1}{20} f^4 (a u_5 + b v_5) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} f^2 \{ a (3a^2 + 13b^2) u_3 + b (13a^2 + b^2) v_3 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a (a^4 - 8a^2 b^2 - 17b^4) u_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} b (15a^4 + 8a^2 b^2 + b^4) v_1 + K_2 \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

where K_2 is an arbitrary constant that may be complex. From (4.4), (4.15) and (4.16) it is found that

$$\begin{aligned} [\bar{z} \Omega'(z) + \Omega(\bar{z})]_2^1 &= \frac{1}{16} k \left[\frac{3}{10} f^4 (a u_5 - b v_5) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} f^2 \{ a (9a^2 - b^2) u_3 + b (a^2 - 9b^2) v_3 \} \right. \\ &\quad \left. + a (3a^4 - 11b^4) u_1 + b (9a^4 - b^4) v_1 + \bar{K}_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Subtracting (4.17) from (4.7) leads to

$$\begin{aligned} [\omega'(z)]_2^1 &= \left[\frac{2}{a+b-(a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta} \omega(\zeta) \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{24} k \left[f^4 \left\{ \frac{1}{5} (b v_5 - a u_5) - a u_3 - b v_3 \right\} \right. \\ &\quad \left. + a (17b^4 + a^2 b^2 - 2a^4) u_1 \right. \\ &\quad \left. - b (b^4 + a^2 b^2 + 14a^4) v_1 - \frac{3}{2} \bar{K}_2 \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

⁶) A pure imaginary constant iK in $[\Omega'(z)]_2^1$ contributes a term iKz to $\Omega_1(z)$ or $\Omega_2(z)$ and can therefore be dropped since it makes no contribution to w .

which, on integration, gives

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{1}{48} k \left[4 a b (6 a^4 + a^2 b^2 + b^4) \log \zeta \right. \\ \left. - f^2 \left\{ \frac{1}{2} (a^4 + 17 a^2 b^2 - 2 b^4) u_2 + 8 a b d^2 v_2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{5} f^4 (d^2 u_4 + 3 a b v_4) - \frac{1}{30} f^6 u_6 - 3 \bar{K}_2 z + K_3 \right\} \right], \quad (4.19)$$

where K_3 is a constant of integration. Since a pure imaginary constant in $\omega(z)$ leads to $w = 0$ everywhere it follows that K_3 may be taken as real. Inserting (4.16) and (4.19) in the remaining transition condition (4.7) we deduce that

$$K_3 = \frac{1}{3} d^2 (7 b^4 + 107 a^2 b^2 - 2 a^4). \quad (4.20)$$

From (2.4) it follows that the terms

$$\frac{1}{16} k K_2 \quad \text{and} \quad -\frac{1}{16} k \bar{K}_2 z$$

entering in (4.16) and (4.19) contribute nothing to w and can accordingly be ignored. Introducing the value of K_3 from (4.20) in (4.19) we finally see that the transition conditions along Γ are satisfied by taking

$$[\Omega(z)]_2^1 = \frac{1}{16} k \left[16 a b d^2 z \log \zeta - \frac{1}{2} a (17 b^4 + 8 a^2 b^2 - a^4) u_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} b (15 a^4 + 8 a^2 b^2 + b^4) v_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{12} f^2 \left\{ a (3 a^2 + 13 b^2) u_3 + b (13 a^2 + 3 b^2) v_3 \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{20} f^4 (a u_5 + b v_5) \right], \quad (4.21)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{1}{48} k \left[4 a b (6 a^4 + a^2 b^2 + 9 b^4) \log \zeta \right. \\ \left. + \frac{1}{3} d^2 (7 b^4 + 107 a^2 b^2 - 2 a^4) \right. \\ \left. - f^2 \left\{ \frac{1}{2} (a^4 + 17 a^2 b^2 - 2 b^4) u_2 + 8 a b d^2 v_2 \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{5} f^4 (d^2 u_4 + 3 a b v_4) - \frac{1}{30} f^6 u_6 \right]. \quad (4.22)$$

Substituting for ζ and ζ^{-1} from (4.5) in (4.21), (4.22) and remembering the definitions of u_n and v_n given in (4.13) we obtain, after considerable reduction

$$[\Omega(z)]_2^1 = k a b \left[F(z) + d^2 \left\{ z \log \frac{z+Z}{a+b} - Z G(z) \right\} \right], \quad (4.23)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = k a b \left[H(z) + \frac{1}{12} a^2 f^2 \left\{ (16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{z+Z}{a+b} - Z K(z) \right\} \right], \quad (4.24)$$

where

$$Z = (z^2 - f^2)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{a^2}{f^2} = \varepsilon^{-2}, \quad (4.25)$$

$$F(z) = a b z \left[1 + \frac{1}{8} \alpha^{-1} - \frac{4 z^2}{3 f^2} + (8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \frac{z^4}{10 f^2 b^2} \right], \quad (4.26)$$

$$G(z) = \frac{1}{15} \left(16 - \frac{7 z^2}{f^2} + \frac{6 z^4}{f^4} \right), \quad (4.27)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} a b d^2 \left[1 - \frac{z^2}{4 a^2} + \frac{8 z^4}{3 f^4} - 4 (16\alpha - 16 + \alpha^{-1}) \frac{z^6}{45 f^4 b^2} \right], \quad (4.28)$$

$$K(z) = \left(\frac{z}{5 f^2} \right) \left[48\alpha - 63 + 49\alpha^{-1} + 4 (88\alpha - 88 + 9\alpha^{-1}) \frac{z^2}{3 f^2} - 16 (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \frac{z^4}{3 f^4} \right]. \quad (4.29)$$

Letting b tend to a and ε tend to zero in equations (4.21), (4.22) or equations (4.23), (4.24) we find that they simplify considerably to

$$[\Omega(z)]_2^1 = \frac{1}{2} k z a^4 \left[4 \log \frac{z}{a} - 3 \right], \quad (4.30)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{2}{9} k a^6 \left[6 \log \frac{z}{a} + 7 \right]. \quad (4.31)$$

It is now immediately checked that (4.30) and (4.31) are in agreement with equations (2.13) and (2.16) of [7], p. 732 in the special case $z_0 = 0$, $n = 4$.

We now introduce the notations⁷⁾

$$f' = \frac{c^2}{f}, \quad Z' = (f'^2 - z^2)^{1/2}. \quad (4.32)$$

⁷⁾ Accents in equation (4.32) do not indicate differentiation with respect to z .

Assuming that n and s are any two integers including zero it can be easily proved that along C we have

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z}{f} \right)^n \left(\frac{Z}{f} \right)^s \right] &= \operatorname{Re} \left[\left(\frac{f'}{z} \right)^n \left(\frac{Z'}{z} \right)^s \right], \\ \operatorname{Re} \left[\bar{z} Z \left(\frac{z}{f} \right)^n \right] &= \operatorname{Re} \left[\bar{z} Z' \left(\frac{f'}{z} \right)^{n-1} \right], \\ \frac{u(Z' + f')}{z + Z} &= 1 \left(u = \frac{f}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Since the expressions involving Z in equations (4.23), (4.24) are not uniform⁸⁾ inside Γ (region 1) we deduce that these expressions should enter into $\Omega_2(z)$, $\omega_2(z)$, respectively and not in $\Omega_1(z)$, $\omega_1(z)$. Moreover, since we require w_2 to vanish on C it follows that these expressions containing Z have to be associated with other terms involving Z' such that $\operatorname{Re} [\bar{z} \Omega_2(z) + \omega_2(z)]$ vanishes along C . Equations (4.33) are applied in the derivation of the appropriate expressions to be added and the continuity conditions imply that they should appear in $\Omega_1(z)$, $\omega_1(z)$ as well as in $\Omega_2(z)$, $\omega_2(z)$. It is found that these additional expressions containing Z' have poles at $z = 0$. Terms involving negative powers of z have therefore to be added in $\Omega_1(z)$, $\omega_1(z)$ in order to remove these singularities at $z = 0$. To satisfy the transition conditions, these negative power terms must also occur in $\Omega_2(z)$ and $\omega_2(z)$. Equations (4.33) are then used to combine them with the appropriate positive powers of z so as to get zero deflection on C . Carrying out the foregoing procedure we find that the appropriate forms for the complex potentials $\Omega_2(z)$, $\omega_2(z)$ may now be written as

$$\Omega_2(z) = k a b \left\{ z \varphi(z) - d^2 \left[z \log \frac{u(Z' + f')}{z + Z} + Z G(z) - Z' L(z) + \frac{2}{5} \left(\frac{f'^4}{z^3} - \frac{z^5}{f^4} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{f'^2}{z} - \frac{z^3}{f^2} \right) \right] \right\} \quad (4.34)$$

$$\omega_2(z) = k a b \left\{ -c^2 \varphi(z) + \frac{1}{12} a^2 f^2 \left[(16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{u(Z' + f')}{z + Z} + Z K(z) - Z' T(z) + 3(3\alpha^{-1} - 1) \left(\frac{f'^2}{z^2} - \frac{z^2}{f^2} \right) + 4(8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \left(\frac{f'^4}{z^4} - \frac{z^4}{f^4} \right) - \frac{16}{15} (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \left(\frac{f'^6}{z^6} - \frac{z^6}{f^6} \right) \right] \right\} \quad (4.35)$$

⁸⁾ The two branches of $Z = (z^2 - f^2)^{1/2}$ interchange when z describes a closed path round either focus of the ellipse Γ .

where $\varphi(z)$ is a function regular within region 2 and

$$L(z) = \frac{1}{15} \left(\frac{16z}{f'} - \frac{7f'}{z} + \frac{6f'^3}{z^3} \right), \quad (4.36)$$

$$T(z) = \frac{f'}{5z^2} \left[48\alpha - 63 + 49\alpha^{-1} + 4(88\alpha - 88 + 9\alpha^{-1}) \frac{f'^2}{3z^2} - 16(16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \frac{f'^4}{3z^4} \right]. \quad (4.37)$$

Adding (4.34) to (4.23) and (4.35) to (4.24) we get

$$\Omega_1(z) = k a b \left[z \varphi(z) + F(z) + d^2 \left\{ z \log \frac{u(Z' + f')}{a + b} - Z' L(z) + \frac{2}{5} \left(\frac{f'^4}{z^3} - \frac{z^5}{f^4} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{f'^2}{z} - \frac{z^3}{f^2} \right) \right\} \right], \quad (4.38)$$

$$\omega_1(z) = k a b \left[-c^2 \varphi(z) + H(z) + \frac{1}{12} a^2 f^2 \left\{ (16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{u(Z' + f')}{a + b} - Z' T(z) + 3(3\alpha^{-1} - 1) \left(\frac{f'^2}{z^2} - \frac{z^2}{f^2} \right) + 4(8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \times \left(\frac{f'^4}{z^4} - \frac{z^4}{f^4} \right) - \frac{16}{15} (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \left(\frac{f'^6}{z^6} - \frac{z^6}{f^6} \right) \right\} \right]. \quad (4.39)$$

Since the function $\varphi(z)$ appears in $\Omega_1(z)$, $\omega_1(z)$ as well as in $\Omega_2(z)$, $\omega_2(z)$ it follows that this function must be regular all over the entire plate. We have now to determine $\varphi(z)$ from the boundary condition (3.5) in which we put $W_2 = 0$.

The following terminology has been introduced in a previous paper [12] and will be used here. If $f(t)$ is a meromorphic function of the complex variable t ($|t| \leq u < 1$) which has a single pole of order s at $t = 0$ with principal part

$$g(t) = \sum_{n=1}^s \frac{a_n}{t^n},$$

then

$$\text{Reg } f(t) = f(t) - g(t). \quad (4.40)$$

Adopting this notation and applying (4.33) it can be shown from equations (4.34)–(4.37) that along C we obtain after some algebraic manipulation

$$\text{Re } \Omega_2'(z) = k a b \text{Re} \left[\{z \varphi'(z)\}' + d^2 \left\{ 1 + \frac{16}{15} \text{Reg} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left(2 + \frac{3f'^2}{z^2} \right) \right\} \right], \quad (4.41)$$

$$\text{Re} [z \Omega_2''(z)] = k a b \text{Re} \left[\{z^2 \varphi'(z)\}' + d^2 \left\{ 1 + \frac{16}{15} \text{Reg} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left(2 + \frac{3f'^2}{z^2} \right) \right\} \right], \quad (4.42)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z^2}{c^2} \omega_2''(z) \right] = -k a b \operatorname{Re} \left[z^2 \varphi''(z) + \frac{a^2 f^2}{12 c^2} \left\{ 16 \alpha - 19 + 9 \alpha^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{5} \operatorname{Reg} \frac{f' Z'}{z^2} \left(64 \alpha - 79 + 47 \alpha^{-1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 16 (12 \alpha - 12 + \alpha^{-1}) \frac{f'^2}{z^2} \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 16 (16 \alpha - 16 + 3 \alpha^{-1}) \frac{f'^4}{z^4} \right) \right\} \right] \quad (4.43)$$

Inserting these expressions in (3.5) with $W_2 = 0$ leads to

$$\operatorname{Re} \left[\varphi + (1 - \lambda) z \varphi'(z) + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) d^2 \left\{ 1 + \frac{16}{15} \operatorname{Reg} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left(2 + \frac{3 f'^2}{z^2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\lambda a^2 f^2}{24 c^2} \left\{ 16 \alpha - 19 + 9 \alpha^{-1} + \frac{4}{5} \operatorname{Reg} \frac{f' Z'}{z^2} \left(64 \alpha - 79 + 47 \alpha^{-1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 16 (12 \alpha - 12 + \alpha^{-1}) \frac{f'^2}{z^2} - 16 (16 \alpha - 16 + 3 \alpha^{-1}) \frac{f'^4}{z^4} \right) \right\} \right] = 0 \quad (4.44)$$

on C . This can be satisfied by equating the expression between the square brackets to $i K_4$ where K_4 is a real constant that can be ignored since it makes no contribution to w . Introducing for convenience

$$t = \frac{z}{f'}, \quad \varphi(z) = \psi(t), \quad m = (1 - \lambda)^{-1} = \frac{1}{2} (1 + \nu) > 0, \quad (4.45)$$

we get the linear differential equation

$$t \psi'(t) + m \psi(t) = \gamma + \sum_{j=0}^3 \gamma_j \operatorname{Reg} [t^{-2j} (1 - t^2)^{1/2}], \quad (4.46)$$

where

$$\left. \begin{aligned} -\gamma &= \frac{1}{2} (m+1) d^2 + \frac{1}{24} (m-1) (16 - 19 \alpha^{-1} + 9 \alpha^{-2}) \frac{a^4}{c^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{16}{15} (m+1) d^2, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{15} \left[8 (m+1) d^2 - \frac{1}{2} (m-1) (64 - 79 \alpha^{-1} + 47 \alpha^{-2}) \frac{a^4}{c^2} \right], \\ \gamma_2 &= -\frac{8}{5} \left[(m+1) d^2 + (m-1) \left(4 - 4 \alpha^{-1} + \frac{1}{3} \alpha^{-2} \right) \frac{a^4}{c^2} \right], \\ \gamma_3 &= \frac{8}{15} (m-1) (16 - 16 \alpha^{-1} + 3 \alpha^{-2}) \frac{a^4}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

For a clamped boundary $\lambda = 1$, $m = \infty$ and the function $\varphi(z)$ is immediately obtained by putting $\lambda = 1$ in the expression between the square brackets in (4.44) and equating the result to zero.

In the general case where $m \neq \infty$ the solution of (4.46) is

$$\psi(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{j=0}^3 \gamma_j S^j(t) + K_5 t^{-m},$$

where

$$S^j(t) = t^{-m} \int_0^t t^{m-1} \operatorname{Reg}[t^{-2j} (1 - t^2)^{1/2}] dt \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (4.48)$$

and K_5 is a constant of integration which, since $m > 0$, must be zero, so that $\psi(t)$ becomes regular at $t = 0$. From (4.40) we have

$$\operatorname{Reg}[t^{-2j} (1 - t^2)^{1/2}] = t^{-2j} \left[(1 - t^2)^{1/2} - \sum_{n=0}^{j-1} c_n t^{2n} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-j} t^{2n} \quad (j > 0), \quad (4.49)$$

where

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_n = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \quad (n > 1). \quad (4.50)$$

Introducing (4.49) in (4.48) we obtain

$$S^j(t) = t^{-m} \int_0^t t^{m-2j-1} \left[(1 - t^2)^{1/2} - \sum_{n=0}^{j-1} c_n t^{2n} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^j t^{2n}, \quad (4.51)$$

where

$$\delta_n^j = \frac{c_{n+j}}{2n+m} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \quad (4.52)$$

We therefore have

$$\varphi(z) = \psi(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{j=0}^3 \gamma_j S^j(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^j t^{2n}, \quad (4.53)$$

where

$$\delta_n = \sum_{j=0}^3 \gamma_j \delta_n^j = \frac{\gamma_0 c_n + \gamma_1 c_{n+1} + \gamma_2 c_{n+2} + \gamma_3 c_{n+3}}{2n+m}. \quad (4.54)$$

The integral in (4.51) can be written in the equivalent form

$$S^j(t) = t^{-m} \int_{(1-t^2)^{1/2}}^1 v (1 - v^2)^{m/2-j-1} \left\{ v - \sum_{n=0}^{j-1} c_n (1 - v^2)^n \right\} dv, \quad (4.55)$$

and for even positive integral values of m it can be easily evaluated in terms of elementary functions. This corresponds to values of the restraining parameter λ of the form $1 - n^{-1}$ where n is an even positive integer. Having obtained the function $\varphi(z)$, the particular integrals (4.2) and the complex potentials (4.34)–(4.39) corresponding to the boundary conditions (3.2) and to the load (4.1) over the concentric ellipse are now completely determined. With these values inserted in (2.4) the deflection at any point of the plate may be computed.

5. Central Values of Deflection, Moments and Shears

Letting z tend to zero in (4.39) and (4.37) we find that the deflection at the centre of the plate is furnished by

$$w_1(0) = 2 \omega_1(0) = 2 k a b \left[H(0) - c^2 \varphi(0) + \frac{1}{12} a^4 \left\{ \frac{20}{3} - \frac{49}{6} \varepsilon^2 + 5 \varepsilon^4 \right\} + (16 - 19 \varepsilon^2 + 9 \varepsilon^4) \log \frac{2c}{a+b} \right] \quad (5.1)$$

Substituting for $H(0)$ from (4.28) and for $\varphi(0)$ from (4.53), (4.54), (4.50), (4.47) and using the value of m given in (4.45) we obtain

$$w_1(0) = \frac{p_0 a b}{64 D} \left[\frac{1}{6} a^4 \left\{ \frac{20}{3} - \frac{49}{6} \varepsilon^2 + 5 \varepsilon^4 + (16 - 19 \varepsilon^2 + 9 \varepsilon^4) \times \left(\log \frac{2c}{a+b} - \frac{1}{2} \lambda \right) \right\} + (a^2 + b^2) \{ a b + (\lambda - 2) c^2 \} \right] \quad (5.2)$$

Setting $z = 0$ in equations (2.5) leads to

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{x}x_0 &= \widetilde{y}y_0 = x\widetilde{Z}_0 = y\widetilde{Z}_0 = 0, \\ \widetilde{x}y_0 - \widetilde{y}x_0 &= -8(1 + \eta) P \Omega'_1(0), \\ xy_0 + \widetilde{y}x_0 &= -4(1 - \eta) P \omega''_1(0). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

From (4.38) and (4.39) it can be shown after some straightforward calculations that

$$\left. \begin{aligned} \Omega'_1(0) &= k a b \left[d^2 \left(\log \frac{2c}{a+b} - \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{4} \right) + a b \left(1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) + \frac{\lambda a^4}{24 c^2} (16 - 19 \varepsilon^2 + 9 \varepsilon^4) \right], \\ \omega''_1(0) &= \frac{1}{2} k a^3 b \left[1 - \frac{b d^2}{2 a} - \varepsilon^2 \left\{ 3 + \frac{2(\lambda - 2) d^2 + (2 - 19 \varepsilon^2/8 + \varepsilon^4) a^4/c^2}{(3 - 2 \lambda) c^2} \right\} \right]. \end{aligned} \right\}$$

With these values introduced in (5.3) the bending moments $\widetilde{x}y_0$ and $\widetilde{y}x_0$ are determined.

6. Boundary Values of Slope, Moments and Shears

Substituting from (4.41) in (3.3) and remembering that $W_2 = 0$ and $k = p_0/(128 h P)$ we find the following formulae for the boundary values of the bending moments and slope:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\widetilde{r\theta}}{\eta - \nu} = \frac{\widetilde{\theta r}}{\eta \nu - 1} = -\frac{P}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=c} = \frac{p_0 a b}{16 (\nu - 1) h} \\ \cdot \operatorname{Re} \left[\{z \varphi(z)\}' + d^2 + \frac{16}{15} d^2 \operatorname{Re} g \frac{Z'^3}{f' z^2} \left(2 + \frac{3 f'^2}{z^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

where $z = c e^{i\theta}$. Inserting the value of $\varphi(z)$ given by (4.53) we see that the right side of (6.1) may be written as

$$\frac{p_0 a b}{16 (\nu - 1) h} \left[d^2 + \frac{\gamma}{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n u^{2n} \cos 2n \theta \right], \quad (6.2)$$

where $u = f/c$,

$$\delta'_n = (2n + 1) \delta_n + \frac{16}{15} d^2 (3c_{n+2} - c_{n+1} - 2c_n), \quad (6.3)$$

and γ, c_n, δ_n are given by (4.47), (4.50), (4.54), respectively. Differentiating (6.2) with respect to θ gives

$$-\frac{P}{c} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)_{r=c}$$

and hence from (3.4) we get for the boundary values of the twisting moment $\widetilde{\theta\theta}$ and the shearing force θZ

$$\frac{\widetilde{\theta\theta}}{1 - \eta} = \frac{c \theta Z}{1 - \nu} = \frac{p_0 a b}{8 (1 - \nu) h} \sum_{n=1}^{\infty} n \delta'_n u^{2n} \sin 2n \theta. \quad (6.4)$$

There remains the determination of the boundary value of the shearing force \widetilde{rZ} by substituting from (4.42) in (2.5c) which yields

$$(\widetilde{rZ})_{r=c} = -\frac{p_0 a b}{16 h c} \operatorname{Re} \left[\{z^2 \varphi'(z)\}' + d^2 + \frac{16}{15} d^2 \operatorname{Re} g \frac{Z'^3}{f' z^2} \left(2 + \frac{3 f'^2}{z^2} \right) \right], \quad (6.5)$$

and substituting from (4.53) we obtain

$$(\widetilde{rZ})_{r=c} = -\frac{p_0 a b}{16 h c} \left[d^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta''_n u^{2n} \cos 2n \theta \right], \quad (6.6)$$

where

$$\delta''_n = 2n(2n + 1) \delta_n + \frac{16}{15} d^2 (3c_{n+2} - c_{n+1} - 2c_n). \quad (6.7)$$

7. Limiting Cases

As a check on the validity of the foregoing results we deduce as a limiting case the complex potentials corresponding to the same boundary conditions (3.2) and the same loading (4.1) distributed over the area of a concentric circle. Letting b tend to a and α ($= \varepsilon^{-2}$) tend to infinity in equations (4.34)–(4.39) leads after reduction to

$$\Omega_1(z) = \frac{p_0 a^4 z}{32 D} \left[\frac{1}{4} + \lambda \left(\frac{a^2}{3 c^2} - \frac{1}{2} \right) - \log \frac{a}{c} \right], \quad (7.1)$$

$$\omega_1(z) = - \frac{p_0 a^6}{32 D} \left[\frac{1}{3} \lambda - \frac{7}{9} + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \frac{c^2}{a^2} + \frac{2}{3} \log \frac{a}{c} \right], \quad (7.2)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{p_0 a^4 z}{32 D} \left[1 + \lambda \left(\frac{a^2}{3 c^2} - \frac{1}{2} \right) - \log \frac{z}{c} \right], \quad (7.3)$$

$$\omega_2(z) = - \frac{p_0 a^6}{32 D} \left[\frac{1}{3} \lambda + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \frac{c^2}{a^2} + \frac{2}{3} \log \frac{z}{c} \right], \quad (7.4)$$

which agree with the expressions obtained by putting $s = 4$ and $s' = 6$ in equations (3.39) and (3.40) of [3], page 15. Expressions for the central values of the deflection and moments and the boundary values of the slope, moments and shears immediately follow by letting b tend to a ($\varepsilon \rightarrow 0$) in the results of sections 5 and 6 and it is easily verified that the formulae obtained coincide with those given⁹) on page 597 of [4] in the special case $n = 2$.

In the limiting case when the minor axis of the loaded elliptic patch tends to zero we have a line loading with variable load intensity p extending along the real axis from $x = -a$ to $x = a$. Assuming that b tends to zero and p_0 tends to ∞ such that $2b p_0$ tends to p_1 it is seen that the intensity p of this line loading at any point distant x from the centre is given by

$$p = p_1 x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (7.5)$$

The complex potentials appropriate to this line loading are immediately obtained by putting $p_1/2$ instead of $b p_0$, $f = a$, $f' = c^2/a$, $d^2 = a^2$ and $\alpha = 1$ in equations (4.34), (4.35), (4.27), (4.29), (4.53), (4.54), and (4.47).

REFERENCES

- [1] N. I. MUSKHELISHVILI, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Moscow 1949).
- [2] L. I. DEVERALL, J. appl. Mech. 24, 295 (1957).

⁹) There are two misprints in these formulae. The term $(b'^2 + r^2) \log v$ in equation (73i) must be replaced by $2(b'^2 + r^2) \log v$ and the factor $-\lambda$ entering in equation (75i) must be written as $+\lambda$.

- [3] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 27, 1 (1957).
- [4] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 584 (1956).
- [5] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 734 (1956).
- [6] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 742 (1956).
- [7] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 53, 728 (1957).
- [8] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 54, 265 (1958).
- [9] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, J. appl. Mech. 25, 37 (1958).
- [10] W. A. BASSALI and M. NASSIF, J. appl. Mech. 26, 44 (1959).
- [11] W. A. BASSALI and M. NASSIF, Proc. Camb. phil. Soc. 55, 101 (1959).
- [12] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 55, 110 (1959).
- [13] O. M. SAPONDZ'YAN, Akad. Nauk. Armyn. SSR. Izv. Fiz. Mat. Estest. Tehn. Nauki 7, 19 (1954).
- [14] S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells* (New York 1940).
- [15] A. C. STEVENSON, Phil. Mag. 34 (7), 105 (1943).

Zusammenfassung

Auf der Basis der Poisson-Kirchhoffschen Theorie und unter Verwendung der komplexen Methode werden die Durchbiegungen und Spannungen in einer dünnen isotropen Platte unter einer parabolischen Belastung ermittelt, die sich über die Fläche einer konzentrischen Ellipse erstreckt. Der Rand der Platte ist einer elastischen Bindung unterworfen, welche Auflage und Einspannung als Sonderfälle enthält. Es werden auch Grenzfälle der erhaltenen Lösung diskutiert.

(Received: October 8, 1959.)

Bemerkung zur Abelschen Integralgleichung

VON JOACHIM FRIEDRICH, Berlin, Deutschland¹⁾

1. Die nachstehende Bemerkung bezieht sich auf eine Verallgemeinerung der Integralgleichung

$$I(x) = 2 \int_x^{R_0} \frac{i(r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1)$$

vom Abelschen Typ. Gleichung (1) stellt den Zusammenhang zwischen der seitlich beobachteten Strahldichtevertellung $I(x)$ und der radialen Abhängigkeit der Strahlungsleistung je Volumeneinheit $i(r)$ der zylindrischen Säule eines elektrischen Lichtbogens dar. Sie wurde zuerst von HÖRMANN [1]²⁾ hergeleitet; ihre Lösung

$$i(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{R_0} \frac{I'(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad (2)$$

¹⁾ Osram-Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 197.

ist von ihm ohne Angabe des Lösungsweges mitgeteilt und später mehrfach zitiert worden [2-6].

In gleicher Weise ist auch der Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte $B(x)$ [cd/cm²] und der radialen Abstrahlung je Volumeneinheit $I^*(r)$ [cd/cm³] eines zylindrischen Bogens durch die Gleichungen (1), (2) gegeben [7, 8]. Dieser Zusammenhang wird zumeist dazu benutzt, mittels eines numerischen Verfahrens [1, 2, 9], vermöge seitlich beobachteter Messwerte für $I(x)$ bzw. $B(x)$, aus (2) – oder rekursiv aus (1) – die radialen Abhängigkeiten zu berechnen.

Im folgenden wird zunächst der Lösungsweg für eine verallgemeinerte Gleichung (1) beschrieben, anschliessend auf die Korrektur eines Ergebnisses für eine verwandte (von SUPLIN behandelte) Gleichung eingegangen und schliesslich eine Erweiterung des Wertebereichs für die Potenz des Kerns der verallgemeinerten Integralgleichung besprochen.

2. Eine Verallgemeinerung von (1) stellt offenbar die Gleichung

$$f(s) = \int_s^a \frac{y(t) dt}{(t^p - s^p)^\alpha}, \quad (3)$$

$0 < \alpha < 1$, $p \neq 0$, $a \geq s$, $a \neq 0$, $f(s)$ stetig differenzierbar, dar. Multiplikation mit $s^{p-1}/(s^p - z^p)^{1-\alpha}$ und nachfolgende Integration ergeben

$$\int_z^a \frac{s^{p-1} f(s) ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} = \int_z^a \frac{s^{p-1} ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} \int_s^a \frac{y(t) dt}{(t^p - s^p)^\alpha},$$

woraus nach Vertauschung der Integrationsgrenzen gemäss einem Satz von DIRICHLET [10] sowie mittels

$$\int_z^t \frac{s^{p-1} ds}{(t^p - s^p)^\alpha (s^p - z^p)^{1-\alpha}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (4)$$

die Gleichung

$$y(z) = - \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_z^a \frac{s^{p-1} f(s) ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} \quad (5)$$

folgt. Die Ausführung der Differentiation nach partieller Integration liefert nun die Lösung

$$y(t) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} t^{p-1} \left[\frac{f(a)}{(a^p - t^p)^{1-\alpha}} - \int_t^a \frac{f'(u) du}{(u^p - t^p)^{1-\alpha}} \right]. \quad (6)$$

Wird hierin $f(s) \equiv I(x)$, $y(t) \equiv 2r i(r)$, $a \equiv R_0$ sowie $p = 2$, $\alpha = 1/2$ und $I(R_0) = 0$ gesetzt entsprechend Gleichung (1), dann wird Gleichung (6) in der Tat identisch mit (2).

3. Der verwandte Fall der Abelschen Integralgleichung

$$f(s) = \int_a^s \frac{y(t) dt}{(s^p - t^p)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, p \neq 0, s \geq a) \quad (7)$$

ist von SUPLIN [11] behandelt worden. Sein Ergebnis enthält jedoch offenbar einen Druckfehler; es muss richtig lauten

$$y(t) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} t^{p-1} \left[\frac{f(a)}{(t^p - a^p)^{1-\alpha}} + \int_a^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^{1-\alpha}} \right]. \quad (8)$$

Auch in dem bekannten Werk von SCHMEIDLER [12] muss anstelle des dort auf Seite 214 zitierten Ergebnisses (in Beispiel 42) unsere Gleichung (8) stehen.

Zum Beweise werde Gleichung (8) in (7) eingesetzt. Dann wird

$$f(s) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} \left[f(a) \int_a^s \frac{t^{p-1} dt}{(s^p - t^p)^\alpha (t^p - a^p)^{1-\alpha}} + \int_a^s \frac{t^{p-1} dt}{(s^p - t^p)^\alpha} \int_a^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^{1-\alpha}} \right].$$

Nach Vertauschen der Integrationsgrenzen im zweiten und nach Anwendung von Gleichung (4) in beiden Summanden ergibt sich schliesslich die Identität

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'(u) du.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in diesem Fall $a = 0$ gesetzt werden.

Mit $p = 1$ folgt dann aus (7) die bekannte Gleichung

$$f(s) = \int_0^s \frac{y(t) dt}{(s - t)^\alpha} \quad (9)$$

mit der Lösung

$$y(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(u) du}{(t - u)^{1-\alpha}} \right] \quad (10)$$

gemäss Gleichung (8) [13, 10, 14].

Mit $\alpha = 1/2$, $p = 2$ ergibt sich aus (7) die von v. MISES [15] betrachtete Gleichung

$$f(s) = \int_0^s \frac{y(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} \quad (11)$$

mit der Lösung

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + t \int_0^t \frac{f'(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \right]. \quad (12)$$

Ein weiteres Beispiel von der Form (11), das bei der Untersuchung des Landestosses bei Segelflugzeugen auftritt, ist von SCHMEIDLER [12] zitiert worden.

4. Es lässt sich zeigen, dass die Integralgleichung (3) mittels der Transformation

$$\sigma = a^p - s^p, \quad \tau = a^p - t^p \quad (13)$$

auf Gleichung (9) zurückgeführt werden kann. Geht vermittels (13) die Funktion $f(s)$ über in $\varphi(\sigma)$ und $y(t)$ etwa in $\eta(\tau)$, so wird aus (3)

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{p} \int_0^a \frac{\eta(\tau)}{(\sigma - \tau)^\alpha} \cdot \frac{d\tau}{(a^p - \tau)^{(p-1)/p}}$$

und mit

$$\frac{\eta(\tau)}{p (a^p - \tau)^{(p-1)/p}} = \Phi(\tau)$$

daher

$$\varphi(\sigma) = \int_0^a \frac{\Phi(\tau) d\tau}{(\sigma - \tau)^\alpha}.$$

Dies ist eine Gleichung von der Form (9) mit der Lösung (10), welche nun durch Rücksubstitution wiederum Gleichung (6) als Lösung von (3) liefert. Ein solcher Ansatz (13) für den Spezialfall $p = 2$, $\alpha = 1/2$ ist bereits von SCHMITZ [2] verwendet worden.

5. Im folgenden werde nun die Integralgleichung

$$f(s) = \int_0^s (s^p - t^p)^\beta y(t) dt \quad (14)$$

behandelt, in der ausser dem bisher Gesagten ein Bereich $(-1 < \beta < n)$, $p \neq 0$ und ferner eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion $f(s)$ zugelassen sein soll.

Gleichung (14) verallgemeinert die bisher betrachteten Fälle im Sinne einer Erweiterung des Wertebereichs für β ; sie erfasst damit zugleich zwei weitere Spezialfälle. Der eine ($n = 1$) ist in der bereits genannten Arbeit von SUPLIN [11] enthalten, während der andere Sonderfall ($p = 1$) mit einem Ergebnis von ROTHE [16] identisch ist, das im Hinblick auf ein Anwendungsbeispiel in der Wasserbautechnik entwickelt wurde.

Es ist bemerkenswert, dass diese Verallgemeinerung, die einen gemeinsamen Ausdruck für alle bisher bekannten Anwendungen der Abelschen Gleichung liefert, ebenfalls mit verhältnismässig einfachen Mitteln zu behandeln ist.

Multiplikation der Gleichung (14) mit $(z^p - s^p)^\mu s^{p-1}$ und nachfolgende Integration über s ergibt

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} f(s) ds = \int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} \int_0^s (s^p - t^p)^\beta y(t) dt ds; \quad (15)$$

hierbei sei $-1 < \mu < n$ und $\beta + \mu + 1 = n \geq 0$ eine ganze Zahl.

Wird nun das Integral auf der linken Seite von (15) etwa mit $\psi_0(z)$ bezeichnet

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} f(s) ds \equiv \psi_0(z), \quad (16)$$

dann ergibt sich aus (15) durch Vertauschung der Integrationsgrenzen auf der rechten Seite

$$\psi_0(z) = \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\beta+1)}{p n!} \int_0^z (z^p - t^p)^n y(t) dt \quad (17)$$

wegen

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu (s^p - t^p)^\beta s^{p-1} ds = \frac{(z^p - t^p)^{\beta+\mu+1}}{p} \cdot B(\beta+1, \mu+1) \quad (18)$$

(wie durch die Substitution $(z^p - s^p) = u(z^p - t^p)$ leicht zu sehen ist). $B(\beta+1, \mu+1)$ ist die Eulersche Betafunktion.

Wird ferner

$$\frac{1}{z^{p-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \psi_k(z) = \psi_{k+1}(z) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (19)$$

gesetzt, dann ergibt sich als Lösung von (14)

$$y(z) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \psi_n(z) \quad (20)$$

oder

$$y(t) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{1-p} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{1-p} \dots \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{1-p} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t^p - u^p)^\mu u^{p-1} f(u) du \right) \dots \right] \right] \right\} \quad (21)$$

Setzen wir hierin speziell $p = 1$, dann folgt

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \int_0^t (t-u)^\mu f(u) du, \quad (22)$$

ein Ergebnis von ROTHE [16].

6. Es sollen auch die Differentiationen in (21) noch ausgeführt werden. Wird hierbei jetzt $f(0) = 0$ gesetzt, dann ist zunächst gemäss (19) und (17)

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f'(s) ds \quad (23)$$

und weiterhin

$$\psi_2(t) = \frac{1}{t^p} \left[(1 + p\mu) \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f'(s) ds + \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f''(s) s ds \right]. \quad (24)$$

Aus (24) lässt sich sofort ein weiteres Ergebnis von SUPLIN [11] ablesen, das hier dem speziellen Fall $n = 1$ entspricht. Gemäss (19) für $k = 1$ ist

$$t^{p-1} \psi_2(t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t).$$

Wird hierin $\psi_2(t)$ aus (24) eingesetzt, dann ergibt sich aus (20) mit $\mu = -\beta$ (wegen $n = 1$) die Lösung der Gleichung (14) zu

$$y(t) = \frac{\sin \beta \pi}{\beta \pi} \cdot \frac{1}{t} \left[(1 - p\beta) \int_0^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^\beta} + \int_0^t \frac{f''(u) u du}{(t^p - u^p)^\beta} \right]; \quad (25)$$

für diese gilt also $-1 < \beta < 1$ mit zweimal stetig differenzierbarer Funktion $f(s)$ und keinesfalls allein $0 < \beta < 1$, wie von SUPLIN angegeben. Es ist zum Beispiel $y(t) = f(t)$ sehr leicht zu sehen für $\beta = 0$.

Die weitere Differentiation gemäss (21) ergibt nun die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\mu + 1)} \cdot \frac{1}{t^{(n-1)p-1}} \left\{ \sum_{v=0}^n a_{vn} \int_0^t (t^p - u^p)^\mu f^{(v+1)}(u) u du \right\} \quad (26)$$

der Gleichung (14) mit den Voraussetzungen der Nr. 5. Die Koeffizienten a_{vn} genügen dabei den folgenden Bedingungen:

Es ist

$$a_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } k < i, \\ 1 \text{ für } k = i, \\ a_{i-1, k-1} + a_{i, k-1} b_{i, k-1} \\ \quad (k > i, i > 0). \end{array} \right\} \quad (27)$$

Ferner ist

$$a_{0k} = \prod_{v=1}^k [1 + p(\mu - v + 1)], \quad (28)$$

$$b_{ik} = [1 + i + p(\mu - k)]; \quad (29)$$

die Laufzahl k läuft in diesen Formeln von 1 bis n .

Für $n = 1$ wird gemäss (28) $a_{01} = (1 + p\mu)$, gemäss (27) wird $a_{11} = a_{00} = 1$. Damit ergibt (26) das bereits vorher abgeleitete Suplinsche Ergebnis (25).

Ist jedoch $f(0) \neq 0$, dann tritt auf der rechten Seite von Gleichung (26) noch ein zusätzlicher Summand

$$\frac{p}{\Gamma(\beta - 1)} \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} \mu(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1) i^{p(\mu - n + 1) - 1}$$

auf.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass auch die Lösung der hier besprochenen weiteren Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung, deren Spezialfall eine Anwendung in der Gasentladungsphysik besitzt, mit einfachen Mitteln erreicht werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. HÖRMANN, Z. Physik 97, 539 (1935).
- [2] G. SCHMITZ, Z. Physik 126, 1 (1949).
- [3] H. MAECKER, Z. Physik 136, 119 (1953).
- [4] P. GERTHSEN, Z. Physik 138, 515 (1954).
- [5] A. BAUER und P. SCHULZ, Z. Physik 146, 339 (1956).
- [6] H. BURCK und KU DSCHI-YÜ, Exper. Technik Physik 7, 39 (1959).
- [7] H. SCHIRMER, Techn.-wiss. Abh. Osram-Ges. 6, 20 (1953).
- [8] H. SCHIRMER, Z. angew. Physik 6, 3 (1954).
- [9] J. FRIEDRICH, Ann. Physik 3 (7), 327 (1959).
- [10] V. VOLTERRA, *Leçon sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles* (Paris 1913).
- [11] M. L. SUPLIN, Zbirnik prac inst. mat. Akad. Nauk. USSR Kiev 3, 113–121 (1940), ukrainisch mit französischer Zusammenfassung s. a. [12].
- [12] W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, 2. Aufl. (Leipzig 1955).
- [13] E. GOURSAT, Acta mathematica 27, 129 (1903).
- [14] W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2. Aufl. (Berlin 1948).
- [15] R. v. MISES, Z. angew. Math. Mech. 5, 150 (1925).
- [16] R. ROTHE, Math. Z. 33, 375 (1931).

Summary

In this paper the solution of a generalized integral equation of Abelian type is communicated with references to an application in gas discharge physics and, on the other hand, to the correction of a result in the corresponding literature. An extension of the validity range of this equation has been considered furthermore.

(Eingegangen: 5. September 1959.)

A Linear Heat Problem with a Moving Interface

By ROBERT E. GIBSON, London, England¹⁾

1. Introduction

In this paper we consider a one-dimensional heat conduction problem which possesses some unusual features, and which may be formulated as follows: we seek functions $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ governed by the equations

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t); \quad (1)$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad s(t) < x < \infty, \quad (2)$$

and satisfying the initial and boundary conditions

$$u_1(0, t) = g(t), \quad t > 0 \quad (3)$$

$$u_1[s(t), t] = u_2[s(t), t] = h(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad (5)$$

where the functions $g(t)$, $h(t)$ and $f(x)$ are given. The motion of the boundary $x = s(t)$ separating the two regions is also specified, and we suppose furthermore that $s(0) = 0$. The problem as stated above for the semi-infinite domain $x > 0$ consists in reality of two distinct problems, one relating to the interval $0 < x < s(t)$ (region 1) and the other to the interval $x > s(t)$ (region 2). Problems of this type involving one or other region arise in a variety of physical situations some of which have been discussed by authors [1 — 4]²⁾. In these papers solutions in closed form are given to examples in which $g(t)$ and $h(t)$ are constants, $f(x)$ is a linear function, and $s(t)$ is given by

$$s = \alpha t \quad (6)$$

or

$$s = \beta t^{1/2}, \quad (7)$$

but, save in one instance [3], the techniques adopted cannot readily be extended to resolve problems involving boundary conditions more general than these.

¹⁾ Imperial College, University of London.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 206.

We shall shew that for both regions the determination of a solution can be made to depend upon the possibility of solving a singular Fredholm equation of the first kind. In particular, when the motion of the boundary is restricted to the form (6) or (7) the kernel of the integral equation reduces to a type which enables a formal solution to be obtained in terms of a contour integral. We find that when the boundary moves with uniform speed the conditions for existence of the integral are not unduly restrictive, but when it moves according to (7) conditions must be imposed which are unlikely to be satisfied in many practical problems. For this latter case an alternative form of solution is discussed.

2. The Temperature Distribution in Region 1

2.1 *Derivation of the Integral Equation*

In region 1 the problem reduces to the determination of the temperature field $u(x, t)$ satisfying

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t), \quad (8)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

and

$$u[s(t), t] = h(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

where, for convenience, the suffix has been dropped.

It is evident from condition (9) that some simplification results by introducing a doublet of strength g at the origin, and taking a new dependent variable

$$v = u - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G(x, t - \tau) (t - \tau)^{-1} d\tau, \quad (11)$$

where

$$G(x, t) = t^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right).$$

Since

$$u(0, t) = v(0, t) + g(t)$$

it follows that v must satisfy

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t), \quad (12)$$

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (13)$$

and

$$v[s(t), t] = h(t) - \frac{s(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G[s(t), t - \tau] (t - \tau)^{-1} d\tau. \quad (14)$$

We now seek a solution of the form

$$v(x, t) = \int_0^\infty \varphi(\xi) [G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)] d\xi, \quad (15)$$

where φ is an arbitrary function, and this choice ensures that (12) and (13) are met with. It should be noted that as $t \rightarrow 0$

$$v \rightarrow 2a\sqrt{\pi}\varphi(x),$$

but this violates no imposed condition since region 1 also vanishes at this limit.

Finally, condition (14) at the moving boundary leads to the following integral equation for the unknown function $\varphi(\xi)$:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(\xi) \{G[s(t) - \xi, t] - G[s(t) + \xi, t]\} d\xi \\ = h(t) - \frac{s(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G[s(t), t - \tau] (t - \tau)^{-1} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

which may be written in the form

$$\int_0^\infty \varphi(\xi) \sinh\left[\frac{\xi s(t)}{2a^2 t}\right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right) d\xi = \chi(t), \quad (17)$$

where the right side of (16) is denoted by

$$2t^{-1/2} \exp\left(-\frac{s^2(t)}{4a^2 t}\right) \chi(t).$$

2.2 Solution for Region 1 when $s = \alpha t$

This integral equation may be solved when the boundary moves with uniform speed, for then

$$s = \alpha t, \quad \alpha > 0,$$

and the hyperbolic function in the integrand of (17) may be absorbed in the unknown function. By obvious changes of variable (17) can be cast into the form of LAPLACE'S integral equation (see [5]) with the solution

$$\varphi(\xi) = 2\xi \operatorname{cosech}\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \chi\left(\frac{1}{4a^2 p}\right) \exp(p\xi^2) dp, \quad (18)$$

where the choice of the real constant c will be dictated by the form of χ . This constitutes a purely formal solution to (17) under the conditions stated, and it

has been tacitly assumed that $h(t)$ and $g(t)$ behave in such a way that the contour integral (18) exists; the restrictions on g and h which ensure this are not severe, but we shall not pursue this point further here.

As an example of the application of the method consider the simple case where

$$g = g_0 \text{ (const)} \quad \text{and} \quad h = h_0 \text{ (const)}.$$

From the definition of χ it follows that

$$\chi\left(\frac{1}{4a^2p}\right) = \frac{1}{4a\sqrt{p}} \left[h_0 - g_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{4a^2\sqrt{p}}\right) \right] \exp\left(\frac{\alpha^2}{16a^4p}\right), \quad (19)$$

where the complementary error function is defined by

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz.$$

The integral (18) may be evaluated by standard methods, and we quote here only the final result, namely

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[h_0 \coth\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) - g_0 \operatorname{cosech}\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \right], \quad (20)$$

whence it follows from (20), (15) and (11) that

$$u = g_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \int_0^\infty \left[h_0 \coth\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) - g_0 \operatorname{cosech}\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \right] \sinh\left(\frac{x\xi}{2a^2t}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right) d\xi. \quad (21)$$

2.3 Solution for Region 1 when $s = \beta t^{1/2}$

In the next case we suppose the boundary to move according to the law

$$s = \beta t^{1/2}$$

and in these circumstances equation (17) reduces to a form which can be solved, at least formally, using Mellin transforms [6]. Writing

$$\zeta = \frac{\xi}{2a\sqrt{t}} \quad \text{and} \quad \tau = 2a\sqrt{t}$$

we have from (17)

$$\int_0^\infty \varphi(\zeta \tau) \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha} \zeta\right) \exp(-\zeta^2) d\zeta = \psi(\tau), \quad (22)$$

where

$$\psi(\tau) = \tau^{-1} \chi \left(\frac{\tau^2}{4a^2} \right). \quad (23)$$

The Mellin transform of ψ is denoted by

$$\psi^*(\sigma) = \int_0^\infty \psi(\tau) \tau^{\sigma-1} d\tau$$

with a similar notation for the other variables. Thus multiplying (22) by $\tau^{\sigma-1}$ and integrating over $(0, \infty)$ we obtain

$$\psi^*(\sigma) = \varphi^*(\sigma) 2^{(\sigma-3)/2} \Gamma(1-\sigma) \exp\left(\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \left[D_{\sigma-1}\left(\frac{-\beta}{a\sqrt{2}}\right) - D_{\sigma-1}\left(\frac{\beta}{a\sqrt{2}}\right) \right], \quad (24)$$

where D is WEBER'S parabolic cylinder function (see for example [7]). Solving for φ^* and inverting we find

$$\varphi(\xi) = 2^{3/2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{2^{-\sigma/2} \psi^*(\sigma) \xi^{-\sigma} d\sigma}{\Gamma(1-\sigma) [D_{\sigma-1}(-\beta/a\sqrt{2}) - D_{\sigma-1}(\beta/a\sqrt{2})]}. \quad (25)$$

If, however, we consider the example of the preceding section where g and h are supposed constant we find, from the definition of χ and (23), that

$$\psi(\tau) = \frac{1}{4a} \exp\left(\frac{\beta^2}{4a^2}\right) \left[h_0 - g_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a}\right) \right] = A \text{ say}, \quad (26)$$

the Mellin transform of which does not exist. This difficulty may be overcome for example by introducing an exponential factor to ensure convergence of the Mellin integral. We take

$$\bar{\psi}(\tau) = \psi(\tau) \exp(-\delta\tau), \quad \delta > 0,$$

of which the Mellin transform is

$$\bar{\psi}^*(\sigma) = A \Gamma(\sigma) \delta^{-\sigma}, \quad \operatorname{Re}(\sigma) > 0.$$

The contour integral may now be evaluated using the calculus of residues, and we find that

$$\varphi(\xi) = A \exp\left(-\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{(n+3)/2} \delta^n \xi^n}{(n!)^2 [D_{-n-1}(-\beta/a\sqrt{2}) - D_{-n-1}(\beta/a\sqrt{2})]}. \quad (27)$$

of which only the first term contributes in the limit. The expression may be simplified by using the known result

$$D_{-n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \frac{d^n}{dx^n} \left[\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

where n is zero or a positive integer, and the solution is now expressible in the form

$$\varphi(\xi) = \left[\frac{h_0 - g_0 \operatorname{erfc}(\beta/2 a)}{2 a \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\beta/2 a)} \right]. \quad (28)$$

It follows from (15) and (11) that

$$u = g_0 + (h_0 - g_0) \frac{\operatorname{erf}(x/2 a \sqrt{t})}{\operatorname{erf}(\beta/2 a)}, \quad (29)$$

a result obtained previously by GRINBERG [1]. It may be noted that for this particular example the rather involved procedure outlined above can be avoided for the integral equation (22) may be solved by inspection. Furthermore, if the function ψ is expressible as a polynomial:

$$\psi(\tau) = \sum_n a_n \tau^{\lambda_n}, \quad \lambda_n > -2,$$

it is seen from (22) that

$$q(\xi) = \sum_n b_n \xi^{\lambda_n},$$

where the coefficients b_n are determined from

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2^{(3+\lambda_n)/2} \exp(-\beta^2/8 a^2)}{\Gamma(1+\lambda_n) [D_{-1-\lambda_n}(-\beta/a \sqrt{2}) - D_{-1-\lambda_n}(\beta/a \sqrt{2})]}.$$

3. The Temperature Distribution in Region 2

3.1 Derivation of the Integral Equation

In the second region $x > s(t)$ we seek a function $u(x, t)$ governed by

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (30)$$

which satisfies the initial condition

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0 \quad (31)$$

and the boundary conditions

$$u[s(t), t] = h(t), \quad t > 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\infty, t) = 0, \quad (33)$$

where $f(x)$ is assumed to be of bounded variation.

If a solution of (30) satisfying (33) is chosen of the form

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [f(\xi) G(x - \xi, t) + \lambda(\xi) G(x + \xi, t)] d\xi, \quad (34)$$

then this corresponds physically to the temperature at (x, t) due to an initial temperature distribution $f(x)$ in $x > 0$ and $\lambda(x)$ in $x < 0$. Since of these initial conditions we are concerned only to ensure that (31) is met with, we are at liberty to regard λ as an arbitrary distribution which must be so adjusted that the remaining requirement (32) is satisfied. In this way we are led to the following integral equation for $\lambda(\xi)$:

$$2a\sqrt{\pi} h(t) = \int_0^{\infty} \{f(\xi) G[s(t) - \xi, t] + \lambda(\xi) G[s(t) + \xi, t]\} d\xi. \quad (35)$$

3.2 Solution for Region 2 when $s = \alpha t$

When the boundary maintained at temperature $h(t)$ moves into the medium at a uniform speed α , the above equation reduces to

$$2a\sqrt{\pi} t h(t) \exp\left(\frac{\alpha^2 t}{4a^2}\right) = \int_0^{\infty} \left[f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{2a^2}\right) + \lambda(\xi) \exp\left(\frac{-\alpha \xi}{2a^2}\right) \right] \exp\left(\frac{-\xi^2}{4a^2 t}\right) d\xi \quad (36)$$

and following again the methods of [5] it can easily be shewn that a formal solution is

$$\lambda(\xi) = \xi \exp\left(\frac{\alpha \xi}{2a^2}\right) \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} h\left(\frac{1}{4a^2 p}\right) \exp\left[p\xi^2 + \frac{\alpha^2}{16a^4 p}\right] dp + f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{2a^2}\right). \quad (37)$$

As illustrative of the method we consider the case where the temperature at the moving boundary is invariable, namely when

$$h = h_0 \text{ (const).}$$

The evaluation of the contour integral presents no unusual features and it is found that

$$\lambda(\xi) = h_0 \left[1 + \exp\left(\frac{\alpha \xi}{a^2}\right) \right] - f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{a^2}\right),$$

which enables the temperature distribution to be expressed in the form

$$u = \frac{h_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{h_0}{2} \exp \left[-\frac{\alpha}{a^2} (x - \alpha t) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x - 2\alpha t}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right) \int_0^\infty f(\xi) \sinh \left[\frac{\xi(x - \alpha t)}{2a^2 t} \right] \exp \left(\frac{\alpha \xi}{2a^2} - \frac{\xi^2}{4a^2 t} \right) d\xi. \quad (38)$$

An alternative method of approach to these problems of region 2, which has been exploited by BENFIELD [4] and GRINBERG [1] and which is discussed in [3], depends upon the introduction of a system of moving axes with origin embedded in the moving boundary. This is tantamount to taking a new space variable

$$z = x - s(t),$$

in terms of which the governing equation (30) becomes

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

The success of the method depends upon two circumstances: the boundaries are now 'fixed' at $z = 0, \infty$, and furthermore, since ds/dt is constant, the independent variable t may be eliminated temporarily by means of a Laplace transform. It is clear, however, that no special advantage would have been gained by using this approach to the problems of region 1.

3.3 Solution for Region 2 when $s = \beta t^{1/2}$

An argument corresponding closely to that of Section 2.3 can be appealed to for deriving the solution in region 2 appropriate to the case when the boundary moves according to (7). By the same changes of variable as used in that section, the following equation for determining λ may be derived

$$\int_0^\infty \lambda(\tau, \zeta) \exp \left(-\frac{\beta}{\alpha} \zeta - \zeta^2 \right) d\zeta = \mu(\tau), \quad (39)$$

where

$$\mu(\tau) = \sqrt{\pi} \exp \left(-\frac{\beta^2}{4a^2} \right) h \left(\frac{\tau^2}{4a^2} \right) - \int_0^\infty f(\tau, \zeta) \exp \left(\frac{\beta}{a} \zeta - \zeta^2 \right) d\zeta,$$

and using the Mellin transform as before it can be shewn that

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{2^{(1-\sigma)/2} \mu^*(\sigma) \exp(-\beta^2/8a^2) \xi^{-\sigma} d\sigma}{\Gamma(1-\sigma) D_{\sigma-1}(\beta/a\sqrt{2})} \quad (40)$$

and the remarks concluding section 2.3 apply *mutatis mutandis* to the above solution.

4. Concluding Remarks

The problems discussed in this paper may be generalized in two obvious ways.

Firstly, the condition $s(0) = 0$ may not be satisfied, and in this event some initial temperature distribution will be prescribed in region 1 as well as in region 2. In region 2 a change of variable

$$y = x - s(0)$$

reduces the problem to that already considered above. For region 1 it would be natural to attempt to extend the methods used in the paper and choose as unknowns the initial temperature distributions outside this region, that is in $x < 0$ and $x > s(0)$. A similar problem where this procedure proved successful is discussed elsewhere [8].

Secondly, when the boundary moves in a manner other than according to (6) or (7) it seems unlikely that explicit solutions can be obtained by the methods used here since the kernel of the integral equations will no longer be expressible in product or difference form. An exception to this may be noted: if

$$s = \alpha t + \beta \sqrt{t}$$

a solution for region 2 may be found.

REFERENCES

- [1] G. A. GRINBERG, Zh. tekhn. Akad. Nauk USSR 27 (3) (1951).
- [2] D. V. REDOZUBOV, Zh. tekhn. Akad. Nauk USSR 27 (9), 2149–57 (1957).
- [3] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford 1959), chapter 15.
- [4] A. E. BENFIELD, Quart. appl. Math. 7, 436–9 (1949).
- [5] R. E. GIBSON, Quart. appl. Math. 16, 426–30 (1959).
- [6] E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Clarendon Press, Oxford 1937).
- [7] A. ERDÉLYI (ed.), *Higher Transcendental Functions*, vol. 2 (McGraw-Hill, 1953).
- [8] R. E. GIBSON, *A One-dimensional Consolidation Problem with a Moving Boundary*, forthcoming in Quart. appl. Math.

Zusammenfassung

Die Temperaturverteilung in einem Körper, der den Halbraum einnimmt, $x \geq 0$, wird unter folgenden Bedingungen bestimmt:

1. Die Temperatur der Oberfläche $x = 0$ ist eine gegebene Funktion der Zeit t , $g(t)$.
2. Die Temperatur einer gemäss $x = s(t)$ fortschreitenden Fläche stellt eine gegebene Funktion der Zeit, $h(t)$ dar, wobei $s(0) = 0$ und $h(0) = g(0)$.
3. Bei $t = 0$ ist die Temperaturverteilung des Körpers eine gegebene Funktion von x , $f(x)$.

Die Lösung des Problems wird auf jene einer linearen Fredholm-Integralgleichung zurückgeführt. Es wird gezeigt, dass diese Integralgleichung eine explizite Lösung besitzt, wenn die Funktion $s(t)$ proportional zu t oder $t^{1/2}$ verläuft.

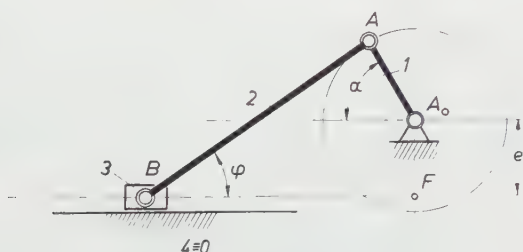
(Received: October 2, 1959.)

Die Harmonischen der Rotationsenergie bei der Schubkurbel und verwandte Fourier-Reihen

Von WALTHER MEYER ZUR CAPELLEN, Aachen, Deutschland¹⁾

1. Grundlagen

Während die Koeffizienten der Fourier-Reihe für die Bewegung des Schubgliedes 3 und für die Winkelbewegung der Koppel 2 (Figur 1) nicht in Form geschlossener Ausdrücke anzugeben sind [1, 2, 3, 6, 7, 8]²⁾, können, wie hier gezeigt werden soll, für die Rotationsenergie des Koppelgliedes, welche ja proportional dem Quadrat ihrer Winkelgeschwindigkeit ist, einfache Entwicklungen angegeben werden.



Figur 1
Geschränkte Schubkurbel.

Aus Figur 1 liest man mit, α als Kurbelwinkel, $A_0F = e$, $A_0A = a$, $AB = c$ und $\lambda = a/c$, $\varepsilon = e/c$, wobei $\lambda + \varepsilon \leq 1$ sein muss, für den Koppelwinkel φ die Beziehung $c \sin \varphi = e + a \sin \alpha$ oder

$$\sin \varphi = \varepsilon + \lambda \sin \alpha \quad (1)$$

ab. Durch Differentiation folgt hieraus für das Verhältnis

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi/dt}{d\alpha/dt} = \frac{d\varphi}{d\alpha}$$

¹⁾ Lehrstuhl für Getriebelehre, Rhein.-Westf. Technische Hochschule.

2) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 217.

die Gleichung

$$i = \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{\lambda \cos \alpha}{\cos \varphi}, \quad (2)$$

worin

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2 \quad (3)$$

ist.

Da die Rotationsenergie des Gliedes 2 von $1/\cos^2 \varphi$ abhängt, soll zunächst dieser Ausdruck analysiert werden.

2. Vergleichsreihe

Hierbei lässt sich die Aufgabe leicht durch Vergleich mit einer von der zentrischen Kurbelschleife her bekannten Entwicklung [4, 5, 7, 8, 10] lösen. Es gilt für $0 \leq \eta < 1^3$)

$$i_z = \frac{\eta (\eta + \cos \alpha)}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \eta \cos \alpha - \eta^2 \cos 2 \alpha + \eta^3 \cos 3 \alpha - \dots +, \quad (4)$$

und danach auch offensichtlich

$$y_0 = \frac{1}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \frac{1}{1 - \eta^2} (1 - 2 i_z)$$

oder

$$y_0 = \frac{1}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \frac{1}{1 - \eta^2} + \frac{2}{1 - \eta^2} \sum_{n=1,2,\dots} (-\eta)^n \cos n \alpha. \quad (5)$$

3. Die Reihe für $y = 1/\cos^2 \varphi$

3.1 Partialbruchzerlegung

Nach der von der Integralrechnung her bekannten Methode der Partialbruchzerlegung lässt sich hier schreiben

$$y = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = y_1 + y_2, \quad (6)$$

worin

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon + \lambda \sin \alpha}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon - \lambda \sin \alpha} \quad (7)$$

bedeuten. Jeder der beiden Ausdrücke lässt sich jedoch auf y_0 nach Gleichung (5) zurückführen.

³⁾ Es kann auch $-1 \leq \eta < 0$ sein, aber bei der praktischen Anwendung gelten die oben gegebenen Grenzen.

3.2 Entwicklung für y_1

Erweitert man y_1 mit dem zunächst unbekannten Faktor μ_1 und führt $\bar{\alpha} = \pi/2 - \alpha$ ein, so wird

$$y_1 = \frac{\mu_1/2}{\mu_1(1+\varepsilon) + \mu_1\lambda \sin \alpha} = \frac{\mu_1/2}{1 + \eta_1^2 + 2\eta_1 \cos \bar{\alpha}}, \quad (8)$$

sofern

$$\mu_1(1+\varepsilon) = 1 + \eta_1^2 \quad \text{und} \quad \mu_1\lambda = 2\eta_1 \quad (9)$$

gesetzt wird. Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen (9), so folgt durch Division

$$\left(\frac{1+\eta_1}{1-\eta_1}\right)^2 = \frac{1+\varepsilon+\lambda}{1+\varepsilon-\lambda} \quad (10)$$

oder

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1+(\lambda+\varepsilon)} - \sqrt{1-(\lambda-\varepsilon)}}{\sqrt{1+(\lambda+\varepsilon)} + \sqrt{1-(\lambda-\varepsilon)}} = \frac{1+\varepsilon - \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \lambda^2}}{\lambda}. \quad (11)$$

Ferner muss

$$\mu_1 = \frac{2\eta_1}{\lambda} \quad (12)$$

sein.

Da innerhalb der gegebenen Grenzen (vgl. auch Grenzfälle Absätze 3.5c und 4.2c) der Parameter η_1 kleiner als 1 bleibt, gilt somit

$$y_1 = \frac{\mu_1}{2} y_0(\eta_1, \bar{\alpha}) = \frac{\eta_1}{\lambda} \left[\frac{1}{1-\eta_1^2} - \frac{2}{1-\eta_1^2} \sum_{n=1,2,\dots} (-\eta_1)^n \cos n \bar{\alpha} \right]. \quad (13)$$

3.3 Entwicklung für y_2

In gleicher Weise liefert die Erweiterung von y_2 mit $\mu_2/2$ und die Einführung von $\alpha^* = \pi/2 + \alpha$ jetzt

$$y_2 = \frac{\mu_2}{2} y_0(\eta_2, \alpha^*) = \frac{\mu_2/2}{1 + \eta_2^2 + 2\eta_2 \cos \alpha^*}, \quad (14)$$

und in ähnlicher Weise folgt aus der Bedingung

$$\mu_2(1-\varepsilon) = 1 + \eta_2^2, \quad \mu_2\lambda = 2\eta_2 \quad (15)$$

der Parameter η_2 zu

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{1+(\lambda-\varepsilon)} - \sqrt{1-(\lambda+\varepsilon)}}{\sqrt{1+(\lambda-\varepsilon)} + \sqrt{1-(\lambda+\varepsilon)}} = \frac{(1-\varepsilon) - \sqrt{(1-\varepsilon)^2 - \lambda^2}}{\lambda} \quad (16)$$

mit

$$\mu_2 = \frac{2\eta_2}{\lambda}. \quad (17)$$

Es gilt somit $\eta_2 = \eta_1(-\varepsilon)$.

Damit hat y_2 die Form

$$y_2 = \frac{\mu_2}{2} y_0(\eta_2, \alpha^*) = \frac{\eta_2}{\lambda} \left[\frac{1}{1 - \eta_2^2} - \frac{2}{1 - \eta_2^2} \sum_{n=1,2,\dots} (-\eta)^n \cos n \alpha^* \right]. \quad (18)$$

3.4 Entwicklungen für y selbst

Beachtet man nun die Umformungen

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2n \bar{\alpha} \\ \cos 2n \alpha^* \end{array} \right\} = \cos(n\pi \mp 2n\alpha) = (-1)^n \cos 2n\alpha, \quad (19a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(2n-1)\bar{\alpha} \\ \cos(2n-1)\alpha^* \end{array} \right\} = \cos\left[\frac{2n-1}{2}\pi \mp (2n-1)\alpha\right] = \mp (-1)^n \sin(2n-1)\alpha, \quad (19b)$$

so führt die Addition der Gleichungen (13) und (18) auf

$$y = \frac{1}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = A_0 + \sum_n A_{2n} \cos 2n\alpha + \sum_{n=1,2,\dots} B_{2n-1} \sin(2n-1)\alpha. \quad (20)$$

Hierbei wird

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\eta_1}{1 - \eta_1^2} + \frac{\eta_2}{1 - \eta_2^2} \right] = \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2), \quad (21a)$$

$$A_{2n} = (-1)^n (\nu_1 \eta_1^{2n} + \nu_2 \eta_2^{2n}), \quad (21b)$$

$$B_{2n-1} = (-1)^n (\nu_1 \eta_1^{2n-1} - \nu_2 \eta_2^{2n-1}), \quad (21c)$$

wobei die Abkürzungen

$$\nu_1 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\eta_1}{1 - \eta_1^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \lambda^2}}, \quad \nu_2 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\eta_2}{1 - \eta_2^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 - \lambda^2}} \quad (21d)$$

benutzt wurden.

3.5 Sonderfälle

a) Für $\lambda \rightarrow 0$ wird getrieblich die *schiefe Kreuzschleife* erhalten, es wird $y = 1/(1 - \varepsilon^2)$, das heisst, es wird

$$A_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$$

und alle anderen Koeffizienten verschwinden, wie auch für $\eta_1 = \eta_2 = 0$ aus den Gleichungen (21) folgt.

b) Für $\varepsilon = 0$ liegt die *zentrische Schubkurbel* vor, und die Gleichungen (11) und (16) liefern

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = \frac{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda^2}) \quad (22a)$$

sowie

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (22b)$$

Somit verschwinden – da ja auch γ jetzt eine gerade Funktion ist – sämtliche B , und es folgt vereinfacht aus den Gleichungen (21a) und (21b)

$$A_0 = \nu = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad (23a)$$

$$A_{2n} = (-1)^n 2 \nu \eta^{2n}. \quad (23b)$$

c) Für $\varepsilon + \lambda = 1$ erhält man den *Grenzfall* des Getriebes mit Verzweigungslage. Dann geht aber γ für $\alpha \rightarrow \pi/2$ nach Unendlich, die Reihe konvergiert nicht, wie auch aus Gleichung (21d) zu erkennen ist: Für $\varepsilon + \lambda = 1$ oder $\lambda = 1 - \varepsilon$ geht ν_2 nach Unendlich. Es muss also hier $\varepsilon + \lambda < 1$ sein.

3.6 Geometrische Deutung der Parameter η_i

Die grössten Werte des Koppelwinkels, welche für $\alpha = \pi/2$ und $\alpha = -\pi/2$ erreicht werden, seien φ_{\max} und φ_{\min} . Für diese gilt

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{a+e}{c} = \lambda + \varepsilon, \quad \sin \varphi_{\min} = \frac{e-a}{c} = \varepsilon - \lambda,$$

und setzt man dann

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} - 2\psi, \quad \varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - 2\vartheta,$$

so wird

$$\begin{aligned} \sqrt{1+(\varepsilon+\lambda)} &= \sqrt{1+\cos 2\psi} = \sqrt{2} \cos \psi, & \sqrt{1-(\varepsilon+\lambda)} &= \sqrt{2} \sin \psi, \\ \sqrt{1+(\lambda-\varepsilon)} &= \sqrt{1-\cos 2\vartheta} = \sqrt{2} \sin \vartheta, & \sqrt{1-(\lambda-\varepsilon)} &= \sqrt{2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\eta_1 = \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\cos \psi + \cos \vartheta}, \quad \eta_2 = \frac{\sin \vartheta - \sin \psi}{\sin \vartheta + \sin \psi}, \quad (24)$$

worin

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{\max}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{\min}$$

bedeuten⁴⁾. Beim zentrischen Getriebe ($\varepsilon = 0$) wird

$$\varphi_{\min} = -\varphi_{\max}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \psi$$

und

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = \frac{\cos \psi - \sin \psi}{\cos \psi + \sin \psi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\max}}{2}. \quad (25)$$

Setzt man formal

$$\frac{1 + \varepsilon}{\lambda} = \cosh \delta, \quad \frac{1 - \varepsilon}{\lambda} = \sinh \sigma; \quad (26a)$$

so wird auch ganz einfach

$$\eta_1 = e^{-\delta}, \quad \eta_2 = e^{-\sigma}, \quad (26b)$$

$$\frac{1}{v_1} = \lambda \sinh \delta, \quad \frac{1}{v_2} = \lambda \sinh \sigma. \quad (26c)$$

Auch lassen sich mit der Substitution $\sin \bar{\delta} = \lambda/(1 + \varepsilon)$, $\sin \bar{\sigma} = \lambda/(1 - \varepsilon)$ die Parameter auf die Formen

$$\eta_1 = \operatorname{tg} \frac{\bar{\delta}}{2}, \quad \eta_2 = \operatorname{tg} \frac{\bar{\sigma}}{2}, \quad \frac{1}{v_1} = (1 + \varepsilon) \cos \bar{\delta}, \quad \frac{1}{v_2} = (1 - \varepsilon) \cos \bar{\sigma} \quad (26d)$$

bringen.

Hinsichtlich der Darstellung der Parameter vgl. Figuren 2 und 3⁵⁾.

4. Die Fourier-Reihe für $w = i^2$

4.1 Allgemeine Entwicklung

Die Reihe für

$$w = i^2 = \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} \quad (27)$$

lässt sich auf die Reihe für y bzw. y_0 zurückführen. Es wird

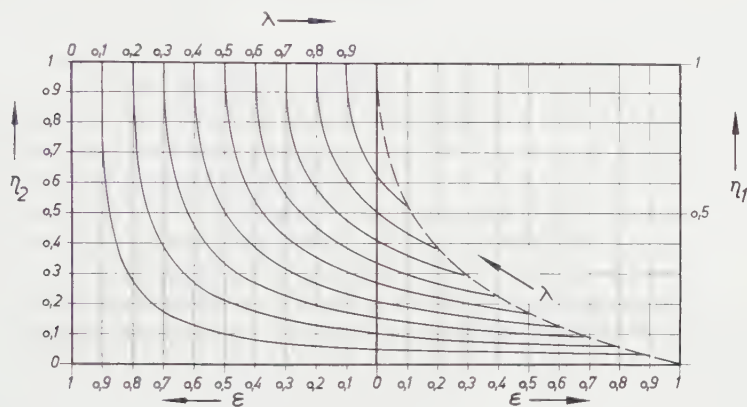
$$w = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos^2 \varphi} = \frac{\lambda^2}{2} (y + y \cos 2\alpha) = \frac{\lambda^2}{2} (w_1 + w_2). \quad (28)$$

Für den Anteil $w_2 = y \cos 2\alpha$ hat man die Reihe für y gemäss Gleichung (20) mit $\cos 2\alpha$ unter Beachtung der goniometrischen Formeln

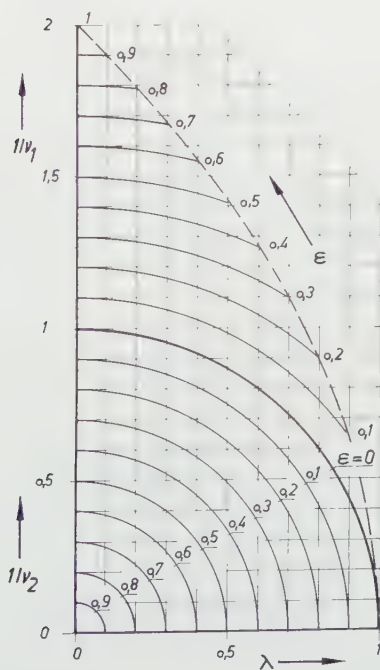
$$\left. \begin{aligned} 2 \cos 2n\alpha \cos 2\alpha &= \cos 2(n+1)\alpha + \cos 2(n-1)\alpha, \\ 2 \sin(2n-1)\alpha \sin 2\alpha &= \sin(2n+1)\alpha + \sin(2n-3)\alpha \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

⁴⁾ Diese Uniformungen spielen auch bei der Bestimmung des Extremums der Winkelgeschwindigkeit eine Rolle [6].

⁵⁾ Ähnliche Tafeln kommen bei der geschränkten Kurbelschleife vor [9].



Figur 2
 Funktionen $\eta_1 = f(\epsilon)$ und $\eta_2 = f(\epsilon)$ für verschiedene Parameter λ .



Figur 3
 Funktionen $1/\nu_1 = f(\lambda)$ und $1/\nu_2 = f(\lambda)$ für verschiedene Parameter ϵ .

zu multiplizieren und erhält

$$\left. \begin{aligned} w_2 = \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} (2 A_0 + A_4) \cos 2 \alpha + \frac{1}{2} (A_2 + A_6) \cos 4 \alpha \\ + \frac{1}{2} (A_4 + A_8) \cos 6 \alpha + \dots \\ + \frac{1}{2} (-B_1 + B_3) \sin \alpha + \frac{1}{2} (B_1 + B_5) \sin 3 \alpha \\ + \frac{1}{2} (B_3 + B_7) \sin 5 \alpha + \dots \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

Addiert man nun die Reihe für w_2 zu der von y selbst, so erhält man die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = A_0^* + \sum_{n=1, 2, \dots} A_{2n}^* \cos 2n \alpha \\ + \sum_{n=1, 2, \dots} B_{2n-1}^* \sin (2n-1) \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (30b)$$

worin zum Beispiel

$$A_4^* = \frac{\lambda^2}{4} [A_2 + 2 A_4 + A_6]$$

wird, das heisst

$$\begin{aligned} A_4^* &= \frac{\lambda^2}{4} [- (v_1 \eta_1^2 + v_2 \eta_2^2) + 2 (v_1 \eta_1^4 + v_2 \eta_2^4) - (v_1 \eta_1^6 + v_2 \eta_2^6)], \\ A_4^* &= - \frac{\lambda^2}{4} [v_1 \eta_1^2 (1 - \eta_1^2)^2 + v_2 \eta_2^2 (1 - \eta_2^2)^2] \\ &= - \frac{\lambda}{2} [(1 - \eta_1^2) \eta_1^3 + (1 - \eta_2^2) \eta_2^3] = - \left(\frac{1}{v_1} \eta_1^4 + \frac{1}{v_2} \eta_2^4 \right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man dann

$$A_0^* = \frac{\lambda}{2} (\eta_1 + \eta_2), \quad (31a)$$

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{v_1} \eta_1^{2n} + \frac{1}{v_2} \eta_2^{2n} \right), \quad (31b)$$

$$B_{2n-1}^* = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{v_1} \eta_1^{2n-1} - \frac{1}{v_2} \eta_2^{2n-1} \right). \quad (31c)$$

Aus $\eta_1/v_1 = \lambda/2 = \eta_2/v_2$ folgt auch

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{2} (\eta_1^{2n-1} + \eta_2^{2n-1}), \quad (31d)$$

$$B_{2n}^* = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{2} (\eta_1^{2n-2} - \eta_2^{2n-2}), \quad (31e)$$

insbesondere

$$B_1^* = \left(\frac{\eta_1}{v_1} - \frac{\eta_2}{v_2} \right) = \frac{\lambda}{2} (\eta_2^2 - \eta_1^2) \cdot^6 \quad (31f)$$

4.2 Sonderfälle

a) $\lambda = 0$ liefert trivial $w = 0$.

b) $\varepsilon = 0$, das heisst, die zentrische Schubkurbel liefert $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ [vgl. Gleichung (22a)] und führt auf

$$A_0^* = \lambda \cdot \eta, \quad A_{2n}^* = \frac{\lambda}{n} (-1)^{n-1} \eta^{2n},$$

alle $B = 0$.

c) Der Grenzfall $\varepsilon + \lambda = 1$ für das durchschlagende Getriebe führt jetzt aber zur Konvergenz. Zunächst lässt sich w mit

$$\sin \varphi = (1 - \lambda) + \lambda \sin \alpha = 1 - \lambda (1 - \sin \alpha) = 1 - \lambda (1 - \cos \bar{\alpha}) = 1 - \lambda \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

auf die Form

$$w = \frac{\lambda \cos^2(\bar{\alpha}/2)}{1 - \lambda \sin^2(\bar{\alpha}/2)} = \frac{\lambda (1 + \cos \bar{\alpha})}{(2 - \lambda) + \lambda \cos \bar{\alpha}} \quad (32)$$

bringen. Während i oder $w = i^2$ gemäss Gleichung (27) einen unbestimmten Ausdruck für $\alpha \rightarrow \pi/2$ liefert, zeigt jetzt w in der Form der Gleichung (32) keine Unbestimmtheit mehr; denn $\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = 0$ ergibt

$$w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda.$$

Man könnte unter Rückgriff auf die Gleichung für y_0 hieraus die Reihe entwickeln, man kann aber auch unmittelbar $\varepsilon + \lambda = 1$ in die vorstehenden Gleichungen einsetzen.

Man erhält zunächst nach den Gleichungen (11) und (16)

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \lambda}} = \eta_0 \quad \text{und} \quad \eta_2 = 1,$$

ferner

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{1 - \lambda}}, \quad v_2 = \infty,$$

also gemäss Gleichung (31):

$$A_0^* = 1 - \sqrt{1 - \lambda} = 1 - \sqrt{\varepsilon}, \quad (33a)$$

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} 2\sqrt{1 - \lambda} \eta^{2n}, \quad (33b)$$

$$B_{2n-1}^* = (-1)^{n-2} 2\sqrt{1 - \lambda} \eta^{2n-1}. \quad (33c)$$

⁶⁾ Die zweite Form ist für die rechnerische Auswertung günstiger.

Die Koeffizienten A_n^* und B_{2n-1}^* sind geometrisch abgestuft. Würde man wie in anderen Fällen [6] Kurventafeln für die Koeffizienten aufstellen, so lieferten die Gleichungen (33) die Grenzkurven.

Im übrigen reduzieren sich für $\lambda = 1$ die Werte auf $A_0^* = 1$ – alle anderen verschwinden; denn es ist dann nach Gleichung (32) $w = 1$.

5. Weitere Reihen

Der Vollständigkeit halber seien noch zwei weitere Reihen angegeben.

$$5.1 \quad u = \frac{\lambda \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} = \lambda \sin \alpha \, y$$

Multipliziert man die Reihe für y gemäss Gleichung (20) gliedweise mit $\sin \alpha$ unter Beachtung von

$$2 \sin \alpha \cos 2n \alpha = \sin (2n+1) \alpha - \sin (2n-1) \alpha,$$

$$2 \sin \alpha \sin (2n-1) \alpha = \cos (2n-2) \alpha - \cos 2n \alpha,$$

so erhält man in ähnlicher Weise wie vorstehend

$$u = \frac{\lambda \sin \alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = a_0 + \sum_{n=1,2,\dots} a_{2n} \cos 2n \alpha + \sum_{n=1,2,\dots} b_{2n} \sin 2n \alpha, \quad (34)$$

worin

$$a_0 = -\left(\frac{\eta_1^2}{1 - \eta_1^2} - \frac{\eta_2^2}{1 - \eta_2^2} \right), \quad (35a)$$

$$a_{2n} = (-1)^{n-1} (\xi_1 \eta_1^{2n} - \xi_2 \eta_2^{2n}), \quad (35b)$$

$$b_{2n-1} = (-1)^{n-1} (\xi_1 \eta_1^{2n-1} + \xi_2 \eta_2^{2n-1}) \quad (35c)$$

mit

$$\xi_i = \frac{1 + \eta_i^2}{1 - \eta_i^2} \quad \text{oder} \quad \xi_1 = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \lambda^2}}, \quad \xi_2 = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 - \lambda^2}}. \quad (35d)$$

Für den Grenzfall $\varepsilon + \lambda = 1$ konvergiert die Reihe nicht, während für $\varepsilon = 0$ doch $\eta_1 = \eta_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \xi/\sqrt{1 - \lambda^2}$ wird. Die a_{2n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) verschwinden, und es bleibt

$$b_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \eta^{2n-1}. \quad (36)$$

$$5.2 \quad v = \frac{\lambda \cos \alpha}{\cos^2 \varphi} = \lambda \cos \alpha \, y$$

Dafür folgt entsprechend

$$v = \sum_{n=1,2,\dots} \bar{a}_{2n-1} \cos (2n-1) \alpha + \sum_{n=1,2,\dots} \bar{b}_{2n} \sin 2n \alpha, \quad (37)$$

da ja

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \alpha \cos 2 n \alpha &= \cos (2 n + 1) \alpha + \cos (2 n - 1) \alpha, \\ 2 \cos \alpha \sin (2 n - 1) \alpha &= \sin 2 n \alpha + \sin (2 n - 2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

gilt. Hierbei haben die Koeffizienten die einfachen Formen

$$\bar{a}_{2n-1} = (-1)^{n-1} (\gamma_1^{2n-1} + \gamma_2^{2n-1}), \quad (39a)$$

$$\bar{b}_{2n} = (-1)^n (\gamma_1^{2n} - \gamma_2^{2n}). \quad (39b)$$

Für den anderen Grenzfall $\varepsilon + \lambda = 1$ hat man keine Konvergenz, während für $\varepsilon = 0$ nur die Koeffizienten

$$\bar{a}_{2n-1} = (-1)^{n-2} 2 \gamma^{2n-1} \quad (40)$$

nicht verschwinden.

6. Bestimmte Integrale

Da für die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(\alpha)$ doch die Formeln

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha, \quad \pi A_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad \pi B_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad (41)$$

gelten, können die bestimmten Integrale auf den rechten Seiten für die oben behandelten Funktionen $f(\alpha)$ leicht angegeben werden. So ist zum Beispiel

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = 2\pi A_0 \quad (42)$$

mit A_0 aus Gleichung (21a).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BIEZENO, C. B., und GRAMMEL, R., *Technische Dynamik*, Bd. I und II, 2. Auflage (Springer Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).
- [2] MEWES, E., *Formeln für die Massenkräfte und kinematischen Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben*, Ing.-Arch. 24, 291–298 (1956).
- [3] MEWES, E., *Einflüsse der Schränkungen von Schubkurbelgetrieben auf die Bewegungsverhältnisse der Gleitstücke*, Z. angew. Math. Mech. 37, 275–277 (1957).
- [4] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Harmonische Analyse bei der Kurbelschleife*, Z. angew. Math. Mech. 36, 151 (1956).
- [5] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Kinematik und Dynamik der Kurbelschleife*, Werkstatt und Betrieb 89, 581–584, 677–683 (1956).
- [6] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel*, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 449 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1958).

- [7] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven*, Z. angew. Math. und Mech. 39, 31–40 (1959).
- [8] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die harmonische Analyse bei Kurbelgetrieben*, I. Allgemeine Zusammenhänge, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 676 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1959).
- [9] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die geschränkte Kurbelschleife*, I. Bewegungsverhältnisse, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 718 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1959).
- [10] MEYER ZUR CAPELLEN, W., und RATH, W., *Die geschränkte Kurbelschleife*, II. Die harmonische Analyse, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 804 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen).
- [11] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die Fourierreihe für den Schleifenwinkel der zentrischen Kurbelschleife und verwandte Fourierreihen*, Buletinul Institutului Politehnic din Jasi (Rumänien) [N F] 5 (9), H. 1–2 (1959).

Summary

The rotational energy of a link in a mechanism is proportional to the square of its angular velocity. This 'square', in contrast to the angular velocity itself, can be expanded into a Fourier series, having finite values for its coefficients. The problem is solved by splitting it into partial fractions, leading to the harmonic analysis of the slotted lever mechanism. Further related series are given at the end. (Eingegangen: 21. August 1959.)

Cylindrically Orthotropic Circular Plates with Large Deflections¹⁾

By JERZY NOWINSKI, Madison, Wisc., U.S.A.²⁾

While the problem of large deflections of elastic isotropic plates has been considered in great detail, so far only three papers on large deflections of anisotropic plates have been published [1, 2, 3,]³⁾. It seems, therefore, reasonable to reconsider this interesting problem using simultaneously, for the sake of comparison, two efficient and straightforward methods such as the perturbation method of POINCARÉ and a modification of the Galerkin method based on the energy concept.

The first of these procedures was applied with success in the last decade to circular and annular isotropic plates by Chinese elasticians⁴⁾ and recently by NASH and COOLEY [5] to elliptic isotropic plates with large deflections.

¹⁾ This work has been sponsored by the United States Army under contract No. DA-11-002-ORD-2059.

²⁾ Army Mathematics Research Center, University of Wisconsin.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 227.

⁴⁾ Cf. WEI-ZANG CHIEN [4]. For an extensive biography see the same author's [5].

The modified method of GALERKIN has been extensively utilized by VOLMIR [7].

1. Consider a thin initially flat cylindrically orthotropic circular plate having the thickness h and the radius a . Let the middle plane of the plate coincide with the $r\varphi$ -plane of a cylindrical coordinate system r, φ, z and the axis of elastic symmetry with the z -axis of the system. Assume that the plate is acted upon by a central concentrated force P and a uniformly distributed load q .

With reference to this system we have throughout the plate, in the absence of body force, the equations of equilibrium

$$(r N_r)' - N_\phi = 0, \quad (1)$$

$$M_\phi - (r M_r)' = r N_r w' + \frac{q}{2} r^2 + \frac{P}{2\pi}, \quad (2)$$

and the equation of compatibility of deformations

$$[r (r N_r)]' - k^2 N_r = -\frac{E_\phi h}{2} (w')^2. \quad (3)$$

Here w denotes the deflection of the plate, N_r and N_ϕ the radial and tangential membrane forces and M_r and M_ϕ the radial and tangential bending moments. $k^2 = E_\phi/E_r = \nu_\phi/\nu_r$, while E_r, E_ϕ and ν_r, ν_ϕ designate YOUNG'S moduli and POISSON'S ratios associated with the radial and the circumferential directions, respectively. As usual a prime indicates a differentiation with respect to a single independent variable (in the case considered, with respect to r).

For future references, we first note the known relations

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D_r \left(w'' + \frac{\nu_\phi}{r} w' \right), & M_\phi &= -D_\phi \left(\nu_r w'' + \frac{1}{r} w' \right), \\ u &= \frac{r}{h E_\phi} (N_\phi - \nu_\phi N_r), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where D_r and D_ϕ denote the flexural rigidities of the plate and u the radial component of the displacement vector.

To the governing field equations (1), (2), (3) we must adjoin the boundary conditions which in a general case of elastically built-in edge and elastic resistance of the support appear as

$$w = 0, \quad (r N_r)' + \left(\frac{\kappa_1^*}{r} - \nu_\phi \right) N_r = 0, \quad w'' + \left(\frac{\nu_\phi}{r} - \kappa_2^* \right) w' = 0, \quad \text{at } r = a. \quad (5)$$

Here $\kappa_1^* = h E_\phi / \kappa_1$ and $\kappa_2^* = \kappa_2 / D_r$, while κ_1 and κ_2 designate the elastic constants for the support with respect to a radial displacement and a flexural rotation.

To economize on space, in what follows we shall confine ourselves, with no loss in generality, to a particular case of uniform load (i.e., $P = 0$) and rigid clamping ($\kappa_1 = \infty$) with edge fastened against radial slipping ($\kappa_2 = \infty$).

Assume that on account of the deformation of the plate its middle plane is deformed into a smooth surface (i.e., with continuously turning tangent plane). We assume, in addition, that the deflection as well as its first derivative are bounded functions throughout the region of the plate⁵). However, we do not postulate the boundedness of the second derivative and we shall discover in the following discussion that for $k < 1$, i.e., for $E_\phi < E_r$ the bending moments increase indefinitely with decreasing distance from the center of the plate. It follows that, in the case considered, the center of the plate becomes a singular point. Such singularities brought about by the physical nature (anisotropy) of the medium are often encountered in the theory of anisotropic bodies⁶).

At this point we find it expedient to transform the governing field equations to a dimensionless form by adopting the notation

$$x = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{w}{h}, \quad \zeta_0 = \frac{w(0)}{h}, \quad n_r = \frac{a^2}{D_r} N_r, \quad n_\phi = \frac{a^2}{D_r} N_\phi, \quad \omega = \frac{q a^4}{2 h D_r}. \quad (6)$$

2. Let us first tackle the problem under discussion by using the method of successive approximations based upon the smallness of a parameter. We choose for the parameter the ratio of the center deflection to the thickness, ζ_0 . Clearly, $\zeta_0 = \zeta_{max}$ in the case considered. By virtue of (4) and (6) the equations (1), (2), (3) reduce to

$$n_\phi = n_r + x n_r', \quad (7)$$

$$[x(x n_r)']' - k^2 n_r + \lambda^2 (\zeta')^2 = 0, \quad (8)$$

$$x(x \zeta'')' - k^2 \zeta' = x^3 \omega + x^2 n_r \zeta'. \quad (9)$$

From now on the prime denotes, unless the contrary is stated, a differentiation with respect to the variable x . Moreover, $\lambda^2 = 6(k^2 - \nu_\phi^2)$. Let us expand the quantities ω , ζ , n_r , n_ϕ in ascending powers of the parameter ζ_0 . We begin with the second powers in ζ_0 in the expansions for n_r and n_ϕ in order to obtain the classical problem of linear bending of the plate for decreasing value of the

⁵) Clearly, $w' = 0$ at $r = 0$ because of the axial symmetry of the system.

⁶) To illustrate this observation, we refer, e.g., to the book by LEKHNITSKY [8].

parameter. Hence we write

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha_1 \zeta_0 + \alpha_3 \zeta_0^3 + \dots, & n_r &= g_2(x) \zeta_0^2 + g_4(x) \zeta_0^4 + \dots, \\ \zeta &= z_1(x) \zeta_0 + z_3(x) \zeta_0^3 + \dots, & n_\phi &= h_2(x) \zeta_0^2 + h_4(x) \zeta_0^4 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Substitution of (10) into (8) and (9) and into the obvious boundary conditions

$$w = w' = u = 0 \quad \text{at} \quad r = a, \quad (11)$$

yields a sequence of linear boundary value problems associated with terms of successive order in ζ_0 . We shall designate these problems as 1st, 2nd, ... boundary value problems depending whether they relate to terms of 1st, 2nd, ... order in ζ_0 .

For the 1st boundary value problem we thus find

$$z_1^{IV} + \frac{2}{x} z_1''' - \frac{k^2}{x^3} \left(z_1'' + \frac{z_1'}{x} \right) = 2 \alpha_1, \quad (12.1)$$

$$z_1(0) = 1, \quad z_1'(0) = 0, \quad z_1(1) = z_1'(1) = 0. \quad (12.2)$$

The solution of this system becomes

$$z_1 = \frac{1}{3-k} [(3-k) - 4x^{k+1} + (k+1)x^4] \quad (13)$$

and corresponds to the well-known solution of a respective linear problem for a clamped cylindrically orthotropic plate, cf. [8].

Furthermore, we reach

$$\alpha_1 = 4(k+1)(k+3). \quad (13.1)$$

By a similar argument we can state the 2nd boundary value problem

$$[x(x g_2)']' - k^2 g_2 + \lambda^2 (z_1')^2 = 0, \quad (14.1)$$

$$(1 - \nu_\phi) g_2(1) + g_2'(1) = 0. \quad (14.2)$$

Here the boundary condition (14.2) follows from the last condition (11) by virtue of the last equation (4) and the relation

$$h_2(x) = g_2(x) + x g_2'(x), \quad (15)$$

which is derived from (7).

A simple calculation yields the solution of the foregoing system

$$g_2(x) = \lambda_1 \left[-B^* x^{k-1} + \frac{x^6}{49-k^2} - \frac{x^{k+3}}{4(k+2)} + \frac{x^{2k}}{(k+1)(3k+1)} \right], \quad (16)$$

in which the notation $\lambda_1 = -[4(1+k)\lambda/(3-k)]^2$ and

$$B^* = \frac{1}{k - \nu_\phi} \left[\frac{7 - \nu_\phi}{49 - k^2} - \frac{k + 4 - \nu_\phi}{4(k+2)} + \frac{2k + 1 - \nu_\phi}{(k+1)(3k+1)} \right] \quad (17)$$

has been adopted.

We now proceed to the next approximation associated with the third boundary value problem

$$x(x z_3'')' - k^2 z_3' = x^2 (x \alpha_3 + g_2 z_1'), \quad (18.1)$$

$$z_3(0) = 0, \quad z_3(1) = z_3'(1) = 0. \quad (18.2)$$

The solution of this problem becomes

$$z_3(x) = \frac{384(k+1)^3(k^2 - \nu_\phi^2)}{(k-3)^4} \left\{ x^{k+1} A - (k-3) x^4 \left[\left(x^{k+1} + \frac{4}{k-3} \right) B \right. \right. \\ \left. \left. + \left(x^{2k-2} + \frac{k+1}{k+3} \right) C + \left(x^8 - \frac{k-11}{k-3} \right) D + \left(x^{k+5} + \frac{8}{k-3} \right) E \right. \right. \\ \left. \left. + \left(x^{2k+2} + \frac{k+5}{k-3} \right) F + \left(x^{3k-1} + \frac{2(k+1)}{k-3} \right) G \right] \right\}, \quad (19)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A &= (k+1) B + 2(k-1) C + 8D + (k+5) E + 2(k+1) F + (3k-1) G, \\ B &= \frac{B^*}{8(k+2)(k+5)}, \quad C = -\frac{B^*}{2(k+1)(3k^2+4k+1)}, \\ D &= -\frac{1}{12(k^2-49)(k^2-121)}, \quad E = \frac{k^2-4k-57}{64(k+2)(k+4)(k+9)(k^2-49)}, \\ F &= -\frac{3k^2+8k+9}{8(k+1)(k+2)(k+3)(3k+1)(3k^2+20k+25)}, \\ G &= \frac{1}{12(k+1)^2(3k+1)(2k^2+3k+1)}. \end{aligned} \right\}$$

Furthermore, we reach

$$\alpha_3 = 4(9-k^2) A^* \quad (20)$$

with

$$A^* = \frac{384(k+1)^3(\nu_\phi^2 - k^2)}{(k-3)^4} \times [4B + (k+1)C - (k-11)D + 8E + (k+5)F + 2(k+1)G]. \quad (20.1)$$

We confine ourselves to the approximation reached up to the present stage, which by virtue of (10) reduces to the cubic relation between the load

and the relative center deflection

$$\frac{q}{D_r} \frac{a^4}{h} = 2 (\alpha_1 \zeta_0 + \alpha_3 \zeta_0^3). \quad (21)$$

Here α_i , $i = 1, 2$, are determined by equations (13.1) and (20). Relative to the convergence of the procedure utilized in the foregoing discussion this problem has not yet been fully clarified from a systematic point of view, cf. [9]. On the other hand, it seems too much to require the convergence in the classical sense of the formal expansions supplied by the method of small parameter. In fact, in practical applications only the first few terms of these expansions are utilized and they may ultimately be even divergent without being inefficient, cf. [10]. Thus we are led to regard the expansions concerned not as the power series but as series asymptotic in nature and this dispenses with an investigation of the convergence of the procedure.

We remark that in the perturbation method the equations for the stresses may be inferred directly from the basic equations [cf. the last two equations (10)] without any recourse to the operation of differentiation. This fact greatly increases the accuracy of the results obtained by this method as compared with some other methods in which a differentiation of approximate expressions of the components of the displacement may occasionally lead to inadequate results.

It may be now of interest to deduce a conclusion which will support our observation anticipated at the end of the first section relative to the singular properties of the center of the plate. To this purpose assume that $k < 1$. Then, in view of the appearance of terms of the $(k + 1)$ order in x in (13), (19) and (24) the second derivative of the deflection with respect to x increases infinitely with x tending to zero. It follows that for $k < 1$ the bending moments at the center of the plate increase infinitely, cf. the first two equations (4). Moreover, the presence of terms of the $(k - 1)$ order in x in equations (15) and (16) and of the $(k + 1)$ order in x in equation (26) makes it evident that at the point $x = 0$ also the membrane stresses increase infinitely.

On the other hand, for $k > 1$, it may be concluded by a similar argument that at the center of the plate both the components of the bending moment and the membrane stress vanish. This completes our observation concerning the existence of a point singularity at $x = 0$.

3. We turn now to attack the problem under consideration by means of a modification of GALERKIN's method.

To this purpose, it is convenient to recall the equation of virtual work for a plate with large deflections,

$$2\pi \int_0^a (N_r \delta \varepsilon_r + N_\phi \vartheta \varepsilon_\phi + M_r \vartheta \kappa_r + M_\phi \delta \kappa_\phi - q \delta w) r dr = 0, \quad (22)$$

in which

$$\varepsilon_r = u'(r) + \frac{1}{2} [w'(r)]^2, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u(r)}{r}, \quad \kappa_r = -w''(r), \quad \kappa_\phi = -\frac{w'(r)}{r}, \quad (22.1)$$

designate, respectively, the unit elongations and the curvatures associated with the radial and circumferential direction. Clearly, in equations (22.1) as well as in the succeeding equations (23) the primes denote the differentiation with respect to the variable r .

Let us now represent the membrane forces in terms of a stress function $F = F(r)$,

$$N_r = \frac{h}{r} F'(r), \quad N_\phi = h F''(r). \quad (23)$$

This representation permits us to satisfy identically the equation of internal equilibrium (1). We change now back to dimensionless variables and represent the large deflections of the plate in the form established in the linear theory of cylindrically orthotropic uniformly loaded and rigidly fixed circular plates

$$\zeta = [(3 - k) - 4 x^{k+1} + (k + 1) x^4] \zeta_0. \quad (24)$$

By virtue of the foregoing three equations the compatibility equation (3) leads to the differential equation for the stress function

$$x^2 F''' + x F'' - k^2 F' = -8 (k + 1)^2 E_\phi h^2 x (x^3 - x^k) \zeta_0, \quad (25)$$

from which, by neglecting an unimportant constant, one readily obtains

$$F = (x^{k+1} C^* + x^8 A_0 + x^{k+5} B_0 + x^{2k+2} C_0) E_\phi h^2 \zeta_0^2, \quad (26)$$

with

$$A_0 = \frac{(k + 1)^2}{k^2 - 49}, \quad B_0 = \frac{2 (k + 1)^2}{(k + 2) (k + 5)}, \quad C_0 = -\frac{4 (k + 1)}{3 k^2 + 4 k + 1}, \quad (26.1)$$

and

$$C^* = \frac{1}{(k + 1) (k - \nu_\phi)} \times [(8 \nu_\phi - 56) A_0 + (k + 5) (\nu_\phi - k - 5) B_0 + 2 (k + 1) (\nu_\phi - 2k - 1) C_0], \quad (26.2)$$

the last equation being deduced from the last boundary condition (11).

We now return to the basic equation (22). In view of (4) and (22.1) this equation admits the representation

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \left[D_r \left(x \zeta''' + \zeta'' - \frac{k^2}{x} \zeta' \right) - h F' \zeta' - \frac{q a^4}{2 h} \right] (\delta \zeta)' dx \\ + \frac{a^3}{h^2} \int_0^1 [(x N_r)' - N_\phi] \delta u dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

We identify the second integrand in brackets in the equation above as the equation of equilibrium (1) satisfied identically throughout the region of the plate in view of equations (23). We shall annihilate the remaining function and, simultaneously, derive an approximate value of the center deflection by substitution of (24) into (27). This process yields finally the important relation

$$\frac{q a^4}{D_r h} = 2 (\alpha_1^* \zeta_0 + \alpha_3^* \zeta_0^3), \quad (28)$$

with

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^* &= 4 (k+1) (9 - k^2), \\ \alpha_3^* &= 288 (k+1) (k+3) (v_\phi^2 - k^2) \left[\frac{k+1}{(k+2)(k+7)(3k+1)} C^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{7(k+4)(k+11)} A_0 + \frac{k+5}{(k+4)(k+11)(3k+5)} B_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{k+1}{(k+4)(2k+1)(3k+5)} C_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Apparently, the foregoing equation (28) corresponds to the equation (21) derived by the perturbation method and it may be established by inspection that $\alpha_1 = \alpha_1^*$ in view of (13.1) and the first equation (28.1).

4. The developments of the preceding sections permit us to solve an illustrative example assuming, for definiteness, that $k = 2$ and $v_\phi = 1/4$. By utilizing the relations (21) and (28) in combination with (13.1), (20) and (28.1), respectively, one reaches the following numerical relations between the dimensionless pressure and center deflection:

$$\text{perturbation method, } \frac{q a^4}{D_r h} = 120 \zeta_0 + 48.61 \zeta_0^3, \quad (29.1)$$

$$\text{variational method, } \frac{q a^4}{D_r h} = 120 \zeta_0 + 45.11 \zeta_0^3. \quad (29.2)$$

The results are shown graphically in Figure 1 and exhibit good agreement. The difference, e.g., for $q^* = q_0 a^4 / D_r h = 350$ is less than 2%.

The stresses in the plate are readily obtained by both methods once the deflection is known as well as the functions g_2 , h_2 and F . The peak stresses occur on the circumference of the plate and the corresponding bending moments and membrane stresses in dimensionless form are shown in Figure 2 *versus* q^* . With reference to this figure, we note that the membrane stresses indicated by the Galerkin method are in perfect agreement with the first approximation given by the perturbation method. A similar conclusion may be drawn with regard to the bending stresses. However, the second approximation of these stresses given by the perturbation method considerably changes the preliminary

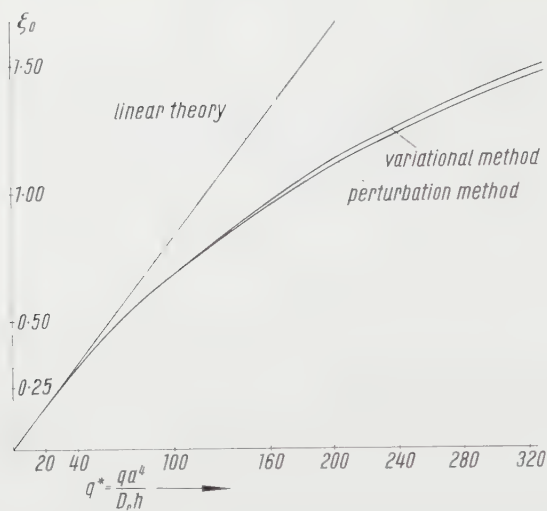


Figure 1
Deflection *versus* relative load q^* .
 $k = 2$; $\nu_\phi = 1/4$.

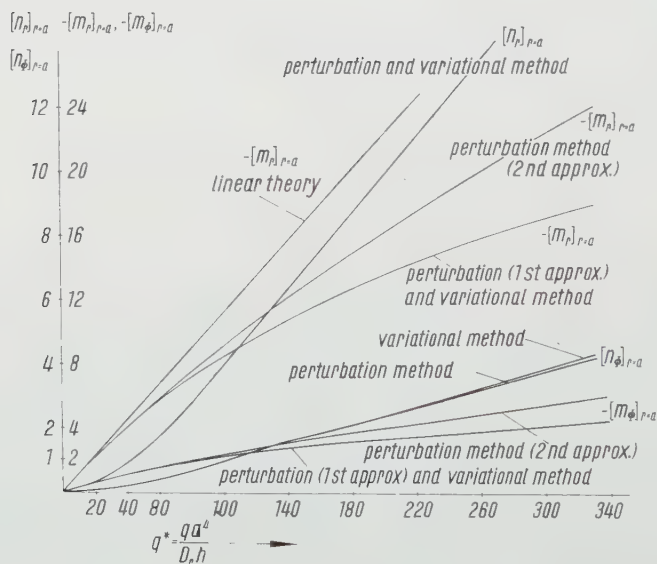


Figure 2
Moments and membrane stresses *versus* q^* .

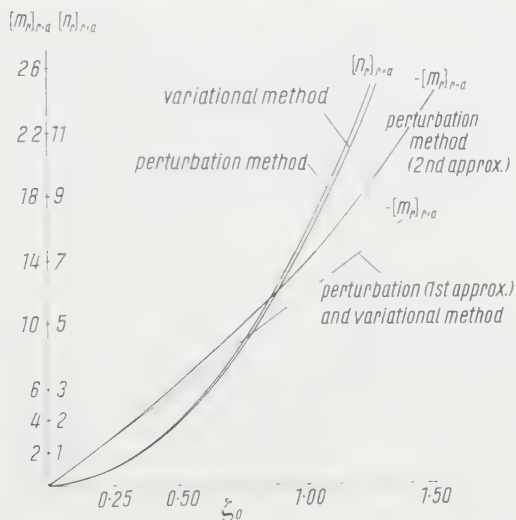


Figure 3
Radial moment and membrane stress versus relative deflection ξ_0 .

results. For the sake of completeness, we also show the variation of the radial membrane stress and the radial bending moment with regard to the center deflection in Figure 3.

REFERENCES

- [1] J. NOWINSKI, *Application of Some Familiar Approximate Methods to Problems Concerning Orthotropic Plates with Large Deflections* (in Polish), Rozpr. Inz. 9, 331-354 (1957).
- [2] T. IWINSKI and J. NOWINSKI, *The Problem of Large Deflections of Orthotropic Plates*, Bull. Acad. Polon. Sci. [cl. 4] 6, 335-339 (1957).
- [3] W. G. SOPER, *Large Deflections of Stiffened Plates*, J. appl. Mech., 25, 444-448 (1958). Cf. also Appl. Mech. Rev., 12 (1959), rev. 4391.
- [4] WEI-ZANG CHIEN, *Large Deflection of a Circular Clamped Plate Under Uniform Pressure*, Chin. J. Phys. 7, 102-113 (1947).
- [5] WEI-ZANG CHIEN, *Problem of Large Deflection of Circular Plate*, Arch. Mech. Stos. 8, 1-12 (1957).
- [6] W. A. NASH and I. D. COOLEY, *Large Deflections of a Clamped Elliptical Plate Subjected to Uniform Pressure*, J. appl. Mech. 26, 291-293 (1959).
- [7] A. S. VOLMIR, *Flexible Plates and Shells* (in Russian) (GITTL, Moscow 1956).
- [8] S. G. LEKHNITSKY, *Anisotropic Plates* (in Russian) (GITTL, Moscow 1957).
- [9] T. KATO, *On the Convergence of the Perturbation Method*, Progr. Theor. Phys. 4, 514-523 (1949).
- [10] T. KATO, *On the Convergence of the Perturbation Method*, Progr. Theor. Phys. 5, 95-101 (1950).

Zusammenfassung

Es werden die Verschiebungs- und Spannungszustände in einer Kreisplatte mit grossen Durchbiegungen und zylindrischer Orthotropie mit Hilfe zweier Methoden untersucht, nämlich der Methode des kleinen Parameters von POINCARÉ und einer modifizierten Methode von GALERKIN.

Ein numerisches Beispiel für gleichmässige Belastung der Platte, die Poissonsche Zahl $\nu_\phi = 1/4$ und die Beziehung $\nu_\phi : \nu_r = 4$ wird gegeben.

(Received: December 19, 1959.)

Optimal Coordinates for a Simple Shear Flow over a Flat Plate¹⁾

By KUO-TAI YEN, Troy, New York, U.S.A.²⁾

Symbols

- X, Y = Cartesian coordinates
 $x = (U_0 X/\nu), \quad y = (U_0 Y/\nu)$
 U, V = velocity components in X and Y directions, respectively
 $u = (U/U_0), \quad v = (V/U_0)$
 U_0 = a constant velocity
 Ψ = stream function ($\Psi = \nu \psi$)
 ξ, η = parabolic coordinates
 2ω = vorticity
 $2\omega_0$ = free stream vorticity
 ν = kinematic viscosity ($\mu = \rho \nu$).

Introduction

In Reference [1]³⁾, KAPLUN introduced the concept of optimal coordinates for the boundary layer problems. The purpose was to obtain the boundary layer solutions in these coordinates 'valid in the whole flow field'. Consequently, a smooth transition from the boundary layer flow to the external flow can be achieved.

In this paper, it is proposed to show that for a simple viscous shear of an incompressible fluid over a semi-infinite plate, parabolic coordinates can be used as the optimal coordinates.

¹⁾ This research was supported in whole by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under Contract No. AF 49(638)-23. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

²⁾ Rensselaer Polytechnic Institute.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 236.

The approach used in this paper is somewhat different from that of [1]. First, it will be decided as to what are the necessary 'conditions' constituting a smooth transition from the viscous flow to the external free stream. A coordinate system will be called 'optimal' if a solution of the problem can be found to satisfy the necessary conditions for the smooth transition as boundary conditions. It is implied that this solution of the Navier-Stokes equations, which are not invariant with respect to a (conformal) transformation of coordinates, will not necessarily be exact, and different solutions may be obtained when the method of the approximation used in obtaining the solution is applied to the Navier-Stokes equations in different coordinate systems.

For example, for the boundary layer flow of a uniform stream over a flat plate the solution in parabolic coordinates obtained by CARRIER and LIN [2] can be shown to satisfy the condition that the transverse velocity component vanishes at infinity and may be called 'optimal'. For a more detailed discussion of this problem reference may be made to [3].

This consideration can be extended to a shear viscous flow over a flat plate. When the shear flow is of the boundary layer type, the displacement effect of the boundary layer may be important because it appears to influence the boundary conditions at the edge of the boundary layer. The question arises as to what are the proper boundary conditions to use. Thus, a study of the optimal coordinates appears to be desirable.

Coordinate Transformation and Basic Equations

Let X and Y be the Cartesian coordinates with the leading edge of the flat plate as the origin and the plane of the flat plate as the X -axis. The plate is supposed to be situated in a simple shear flow with constant vorticity. For the present problem, it is convenient to reduce the physical quantities to non-dimensional form in the following manner. Let

$$x = \frac{U_0 X}{\nu}, \quad y = \frac{U_0 Y}{\nu}, \quad (1)$$

and

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\nu} \Psi(x, y), \quad (2)$$

where Ψ is a stream function defined such that

$$U = \Psi_Y, \quad V = -\Psi_X. \quad (3)$$

The non-dimensional velocity components are

$$u = \frac{U}{U_0} = \psi_y, \quad v = \frac{V}{U_0} = -\psi_x. \quad (4)$$

The Navier-Stokes equations can be expressed by

$$\psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y = \nabla^4 \psi. \quad (5)$$

Away from the plate, the free stream conditions are

$$u = 1 + 2\omega_0 y, \quad (6)$$

$$v = 0, \quad (7)$$

$$\omega = \omega_0, \quad (8)$$

where ω_0 is a non-dimensional vorticity number. The conditions for smooth transition of the flow may be taken as (6), (7) and (8). However, it will be seen later that the condition (7) has to be relaxed. The boundary conditions at the plate are

$$u = v = 0, \quad y = 0. \quad (9)$$

Let the coordinate transformation be given by

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \quad (10)$$

The velocity components u and v in the Cartesian coordinates can be expressed as [4]:

$$u = \frac{1}{J} (-x_\eta \psi_\xi + x_\xi \psi_\eta), \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{J} (-y_\eta \psi_\xi + y_\xi \psi_\eta), \quad (12)$$

where $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$. The differential equation for the stream function ψ in the new variables ξ and η can be obtained from equation (5).

Parabolic coordinates are defined by

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta. \quad (13)$$

Equation (5) becomes

$$\psi_\eta \omega_\xi - \psi_\xi \omega_\eta = \omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}, \quad (14)$$

where ω is

$$\omega = -\frac{1}{8(\xi^2 + \eta^2)} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}). \quad (15)$$

In the parabolic coordinates, the flat plate is at $\eta = 0$. The free stream conditions and boundary conditions can be expressed in terms of the parabolic coordinates by the above relations.

Construction of Solutions in Parabolic Coordinates

Consider first the behavior of the solution at large η . In view of (6), the solution at large η may be written in the following form

$$\psi = 2\omega_0 \xi^2 f_2(\eta) + \xi f_1(\eta) + f_0(\eta) + \dots, \quad (16)$$

and, as $\eta \rightarrow \infty$, the functions f_2 and f_1 become

$$f_2(\eta) \rightarrow 2\eta^2 - \beta_3\eta - \beta_2, \quad f_1(\eta) \rightarrow 2\eta - \beta_1,$$

where β_1 , β_2 and β_3 represent the displacement effects. Since the above form of the solution does not predicate to be the general one valid over the whole field, it is not expected that β_1 , β_2 and β_3 are constant over the whole field. In fact, their values may change from region to region for which different methods are used to find the solutions f_1 and f_2 .

From equations (11) and (12), it is found that, for large η

$$u \rightarrow 1 + 4\omega_0 \xi \eta - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1 \eta + 2\beta_2 \omega_0 \xi \eta + \beta_3 \omega_0 \xi (\xi^2 + 2\eta^2) \right\}, \quad (17)$$

$$v \rightarrow \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1 \xi + 2\beta_2 \omega_0 \xi^2 + \beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta \right\}. \quad (18)$$

Thus, for $\xi \ll \eta$, the velocity component u approaches $1 + 4\omega_0 \xi \eta - 2\beta_3 \omega_0 \xi$ as η approaches infinity. If the parabolic coordinates are the optimal ones, the solution obtained in these coordinates should yield $\beta_3 = 0$, because the displacement effects should vanish far upstream of the plate. This can be shown as follows. For $\xi \ll \eta$, the stream function ψ can be expressed in the following form

$$\psi = \xi f_1(\eta) + 2\omega_0 \xi^2 \eta F_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \dots, \quad (19)$$

where, as η approaches infinity,

$$f_1(\eta) \rightarrow 2\eta - \beta_1, \quad (20)$$

$$F_2(\eta) \rightarrow 2\eta - \beta_3. \quad (21)$$

Substitution of ψ into equation (14) yields, when all higher order terms in ξ are omitted,

$$f_1(F_2 - \eta F_2') - 2\eta F_2'' = 0. \quad (22)$$

When η approaches infinity, $F_2'' \rightarrow 0$. It follows that $\beta_3 = 0$. Hence, far upstream, the smooth transition of the flow is achieved.

For large ξ , the smooth transition is possible only when $\beta_2 = \beta_3 = 0$. As will be seen later, this is found to be true. Since v approaches zero and ω

approaches ω_0 as η approaches infinity, it might be concluded that all the conditions (6), (7) and (8) are satisfied. However, for $\xi \sim \eta$, the expression for v contains the term $\beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta / (\xi^2 + \eta^2)$ which is singular as $\eta \rightarrow \infty$ and hence is incompatible with smooth transition. This point will be analyzed later in this paper.

From the above consideration, similar solutions can be constructed in the following manner. Let the similarity variable ζ be defined by

$$\zeta = \frac{\eta}{\xi^k}$$

and the solution be of the form

$$\psi = 2 \omega_0 \xi^{2+2k} f_2(\zeta) + \xi^{1+k} f_1(\zeta) + \dots, \quad (23)$$

where f_2 and f_1 are required to behave as $f_2'' \rightarrow 4$, $f_1' \rightarrow 2$, when ζ approaches infinity. Then, for large η , the above solution for ψ agrees with that given in equation (16). The index k is to be determined from the condition that the viscous terms and inertia terms in the Navier-Stokes equations have the same order of magnitude.

Now two forms of asymptotic solutions for large ξ can be obtained according to the stipulation whether the first or the second term in equation (23) is considered as the dominating term. For small values of $\omega_0 \xi$ the second term in equation (23) may be taken as the first approximation of the series expansion solution. Thus

$$\psi = \xi f_1(\eta) + 2 \omega_0 \xi^2 f_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \dots, \quad (24)$$

since it is found that $k = 0$. Substitution of (24) into equation (14) and equating equal powers of ξ yield the following equations

$$f_1'''' + f_1 f_1''' + f_1' f_1'' = 0, \quad (25)$$

$$f_2''' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2 f_1'' f_2 = 0, \quad (26)$$

etc. The boundary conditions are

$$f_1' \rightarrow 2, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$f_1 = f_1' = 0, \quad \eta = 0. \quad (28)$$

$$f_2'' \rightarrow 4, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (29)$$

$$f_2 = f_2' = 0, \quad \eta = 0, \quad (30)$$

etc. Equation (25) under the boundary conditions (27) and (28) yields the known boundary layer solution in parabolic coordinates for a uniform flow over a flat plate [2].

On the other hand, for large values of ξ , an asymptotic series solution may be attempted. It is found that, for this case, $k = -1/3$, and the solution is of the form

$$\psi = 2\omega_0 \xi^{4/3} g_2(\zeta) + \xi^{2/3} g_1(\zeta) + g_0(\zeta) + \dots \quad (31)$$

The function g_2 satisfies

$$-\frac{8}{3}\omega_0 g_2''' + g_2'''' = 0, \quad (32)$$

and the boundary conditions

$$g_2'' \rightarrow 4, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$g_2 = g_2' = 0, \quad \zeta = 0. \quad (34)$$

The solution for g_2 is $2\zeta^2$, which represents a simple shear flow. Thus, since $\beta_2 = \beta_3 = 0$, smooth transition of the flow is also achieved at large ξ . The function g_1 satisfies

$$\frac{3}{4}\omega_0 g_1'''' + 2g_2 g_1''' + g_2' g_1'' + \zeta g_2''' g_1' + g_2'' g_1 = 0, \quad (35)$$

and

$$g_1' \rightarrow 2, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$g_1 = g_1' = 0, \quad \zeta = 0. \quad (37)$$

Detailed analysis of the above solutions will not be given here, because the solutions of equations (26) and (35) under respective boundary conditions can be expressed in terms of the known ones in the Cartesian coordinates [5] [6]. By the transformation $\eta = \eta^*/2$, equation (26) becomes

$$2f_2''' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2f_1'' f_2 = 0, \quad (38)$$

with the boundary conditions $f_2'' \rightarrow 1$, $\eta^* \rightarrow \infty$; $f_2 = f_2' = 0$, $\eta^* = 0$. The solution for f_2 satisfying the above conditions has been obtained by GLAUERT [5]. The value of β_1 is 1.73, while that of β_3 as estimated from GLAUERT's results is about 3.4 (GLAUERT argued that $\beta_3 = 2\beta_1 = 3.46$ in our notation).

In an analogous manner, let

$$g_1 = \left(\frac{3}{2\omega_0}\right)^{1/3} G_1(\zeta^*), \quad (39)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2\omega_0}\right)^{1/3} \zeta^*. \quad (40)$$

Equation (35) becomes, in view of the fact that $g_2 = 2\zeta^2$,

$$G_1'''' + \zeta^{*2} G_1''' + \zeta^* G_1'' = 0,$$

or

$$G_1''' + \zeta^{*2} G_1'' - \zeta^* G_1' + G_1 = 0. \quad (41)$$

The boundary conditions for G_1 are $G_1' \rightarrow 1$, $\zeta^* \rightarrow \infty$, and $G_1 = G_1' = 0$ at $\zeta^* = 0$. The solution for G_1 has been analyzed in [6]. It may be added, however, that the asymptotic series solution does not appear to be valid near the leading edge of the plate, while the series expansion solution becomes inadequate far downstream. Thus, to obtain a complete solution of the problem, a matching or correlating process is used in [6].

A Modified Coordinate System

As shown above, the parabolic coordinates can be used to obtain solutions of the shear flow such that a smooth transition of the shear flow to the free stream flow is achieved. However, for the region near the leading edge of the plate, the displacement effects introduce the contribution $\beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta / (\xi^2 + \eta^2)$ in the velocity component v . This term becomes singular as $\eta \rightarrow \infty$, when $\xi \sim \eta$, since β_3 is expected to be close to the value of 3.4 as obtained from GLAUERT's work. Therefore, it appears that a modification of the coordinate system should be made for $\xi \sim \eta$, but not at large ξ or η , to remove this singular behavior of v . For simplicity, consideration will be limited to $\xi > \eta$. A coordinate system which meets these conditions and, in addition, yields $y = 0$ when $\eta = 0$ is

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad (42)$$

$$y = 2\xi\eta + \frac{1}{2}\beta_3\eta. \quad (43)$$

For large x , ξ is essentially $x^{1/2}$ and η is essentially $y/(x^{1/2} + \beta_3/2)$. It is noted that this coordinate system is no longer orthogonal as a simple orthogonal coordinate system satisfying the necessary conditions has not been found. The functions f_1 and f_2 in the expression (24) for the stream function ψ are found to satisfy the same respective differential equations and boundary conditions (25)–(30). Hence in equation (43), β_3 is 3.4. As η approaches infinity, the velocity components u and v are

$$\left. \begin{aligned} u &\rightarrow 1 + 4\omega_0\xi\eta - \frac{1}{4(\xi^2 + \eta^2) + \beta_3\xi} \\ &\quad \times \{2\beta_1\eta + 8\beta_2\omega_0\xi\eta + \beta_3\xi + 4\beta_3\omega_0\xi(\xi^2 + \xi\eta + 2\eta^2) + \dots\}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} v &\rightarrow \frac{1}{4(\xi^2 + \eta^2) + \beta_3\xi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_1\xi + 8\beta_2\omega_0\xi^2 - \beta_3\eta + 2\beta_3\omega_0\xi(\beta_2 + \beta_3\eta) + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

The skin friction distribution on the plate can be obtained from equations (11) and (24), and is given by

$$\tau = \frac{\varrho U_0^2 x^{1/2}}{4 \left(x^{1/2} + \frac{1}{2} \beta_3 \right)^2} \{ f_1''(0) + 2 \omega_0 x^{1/2} f_2''(0) + \dots \}. \quad (46)$$

As seen from equation (43), the new y coordinate is stretched compared to that given by the parabolic coordinates. Thus, the skin friction on the plate is reduced accordingly.

It is evident that the 'free stream conditions' for the region near the leading edge of the plate has direct bearing on the skin friction distribution on the plate. It is also noted that near the leading edge of the plate, v approaches approximately the value of $\beta_2 \omega_0 - (\beta_3^2 \omega_0/4)$. Therefore, the condition (7) for smooth transition is actually not satisfied. It may be possible to modify further the coordinate system in order to satisfy this condition, but the skin friction distribution on the plate will certainly be changed. Thus, it appears reasonable that different conditions for smooth transition for the region near the leading edge of the plate may be associated with physically different problems. Therefore, for the region near the leading edge of the plate the condition for smooth transition for v may be modified so that v approaches a constant value as η approaches infinity.

Some General Remarks

The problem of the boundary layer on a flat plate in a stream of constant vorticity has been analyzed by GLAUERT [5] and LI [7] by employing the Cartesian coordinates. In particular, GLAUERT proposed to use the boundary condition

$$u = 1 + 2 \omega_0 y, \quad x = 0, \quad (47)$$

instead of

$$u \rightarrow 1 + 2 \omega_0 y, \quad y \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Of course, when the solution of the problem is expressed in the variable $\eta = Y (U_0/\nu X)^{1/2}$, there is no difference between the two conditions (47) and (48). The solution would be defined only for positive x .

By using the parabolic coordinates, it has been shown that the solution can be extended upstream of the leading edge of the plate such that the free stream condition $u = 1 + 2 \omega_0 y$ is satisfied far upstream. By the analysis given earlier for the differential equations (26) and (35), it is seen that the solution in Cartesian coordinates obtained by GLAUERT and that in parabolic

coordinates yield the same skin friction distribution on the plate:

$$\tau = \rho \left(\frac{\nu U_0^3}{X} \right)^{1/2} \left\{ .332 + 1.59 \omega_0 \left(\frac{U_0 X}{\nu} \right)^{1/2} + \dots \right\}.$$

According to equations (17) and (18), the condition (47), although mathematically convenient, may not be quite realistic physically. In fact, (48) appears to be more satisfactory, provided displacement effects are to be admitted and one does not interpret equation (48) to mean that u shall be constant at fixed y . The fact that the skin friction distribution on the plate depends intimately on the free stream conditions for the region near the leading edge of the plate demonstrates the difficulty of imposing proper boundary or initial conditions at $x = 0$.

REFERENCES

- [1] S. KAPLUN, *The Role of Coordinate Systems in Boundary Layer Theory*, Z. Angew. Math. Phys., 5, 111-135 (1954).
- [2] G. F. GARRIER and C. C. LIN, *On the Nature of the Boundary Layer near the Leading Edge of a Flat Plate*, Quarterly of Applied Mathematics, 6, 63-68 (1948).
- [3] K. T. YEN, *A Study of the Use of Optimal Coordinates for Some Viscous Flow Problems*, TR AE5805, Rensselaer Polytechnic Institute, AFOSR TN-59-11, AD 208 592, April 1958.
- [4] H. SCHMIDT and K. SCHROEDER, *Laminare Grenzschichten*, Luftforschung, 19, 65-97 (1942).
- [5] M. B. GLAUERT, *The Boundary Layer in Simple Shear Flow Past a Flat Plate*, Readers' Forum, Journal of the Aeronautical Sciences, 24, No. 11, 848-49 (1957).
- [6] K. T. YEN, *The Boundary Layer on a Flat Plate in a Shear Flow* (to be published).
- [7] T. Y. LI, *Simple Shear Flow Past a Flat Plate in an Incompressible Fluid of Small Viscosity*, Readers' Forum, Journal of the Aeronautical Sciences, 22, No. 9, 651-652 (1957).

Zusammenfassung

In eine ebene inkompressible Strömung mit konstantem Geschwindigkeitsgradienten quer zur Strömung sei eine ebene Platte parallel gelegt. Als günstiges Koordinatensystem werden parabolische Koordinaten betrachtet und damit ähnliche Lösungen gefunden. Der Übergang von der Grenzschicht zur äusseren Strömung vollzieht sich glatt, und es können Wandschubspannungen und Verdrängungseffekte bestimmt werden. Vergleiche mit anderen Lösungen, die mit kartesischen Koordinaten gefunden wurden, werden angestellt.

(Received: October 26, 1959.)

Zur Eiskeimbildungsfähigkeit von Kupferoxyden und Kupfersulfiden

VON ULRICH KATZ, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Im Zuge der systematischen Ermittlung der Aktivität der verschiedensten Substanzen als Eiskeimbildungskerne gilt den Kupferoxyden und Kupfersulfiden spezielles Interesse, da sich schon bei früheren Messungen der Einsatztemperatur der Wirksamkeit von Cu_2O und CuS (PRUPPACHER und SÄNGER [8]²⁾, FUKUTA [4]) die verhältnismässig hohen Werte von -4 bis -5°C ergaben. Ferner bestanden Zweifel an der oberflächlichen Reinheit einiger dabei verwendeter, auf nassem Wege erzeugter Substanzen; bei Cu_2O wäre vor allem damit zu rechnen, dass die Oberfläche schon zu CuO oxydiert ist und eine Aktivität von Cu_2O als Eiskeimbildungskern nicht oder nur teilweise erfasst wird³⁾; ebenso könnte an Stelle von CuS bei Herstellung auf chemischem Wege ein Gemisch von beispielsweise CuS , Cu_2S und S entstehen. Deshalb schien es angezeigt, die erwähnten Stoffe direkt in Form reiner makroskopischer Kristallite herzustellen.

Während bis anhin im allgemeinen als Mass der Eiskeimbildungsaktivität einer Substanz nur deren Einsatztemperatur gemessen wurde, ist es vor allem auch im Hinblick auf eine Anwendung zum Zwecke der Wetterbeeinflussung wesentlich, den Anteil eines künstlichen Aerosols, welcher zur Eiskristallbildung Anlass gibt, als Funktion der Temperatur zu kennen; auch über den Mechanismus der Eiskeimbildung können auf diese Weise eher Aufschlüsse gewonnen werden als mit blossen Schwellentemperatur-Angaben. Allerdings wird für AgI schon seit längerer Zeit meist die Anzahl aktiver Teilchen pro Gramm Substanz in Funktion der Temperatur angegeben [9, 11, 12]; neustens findet man auch bei SERPOLAY [10] für einige Oxyde das Verhältnis wirksamer Teilchen zu deren Gesamtzahl.

2. Eigenschaften und Herstellung der Substanzen⁴⁾

2.1 Cu_2O und CuO

Das rote Kupferoxydul, das dem Mineral Cuprit entspricht, bildet einen eigenen kubischen Gittertyp, während CuO , das schwarze Kupferoxyd (Tenorit) in einem triklin deformierten Steinsalzgitter kristallisiert. Die Cu_2O -Oberfläche adsorbiert zuerst O_2 aus der Luft, später tritt eine sehr langsame oberflächliche Umwandlung in das CuO -Gitter ein [5]. Aber auch sehr lange an Luft gelagertes Cu_2O liess nach den Beobachtungen von BRÜESCH [2] mittels Elektronenbeugung (noch feststellbare Schichtdicke: etwa 70 \AA) keine Oxydation erkennen.

¹⁾ Laboratorium für Atmosphärenphysik an der ETH.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 244.

³⁾ Dieser Gedanke wurde auch in einer privaten Mitteilung von J. H. SCHULMAN (Columbia University) gegenüber dem Leiter des Laboratoriums für Atmosphärenphysik vertreten.

⁴⁾ Unter Mitwirkung von M. BAUD (im Rahmen seiner Diplomarbeit).

Da CuO oberhalb 1110°C an der Luft zu Cu_2O dissoziiert, wäre es möglich, massives Cu_2O durch Schmelzen (1230°C) des im Handel erhältlichen Pulvers zu bilden, wenn nicht alle Tiegelmaterien dabei zerstört würden. Das Cu-O-Zustandsdiagramm [5] zeigt, dass aus metallischem Kupfer direkt durch Erhitzen an der Luft im Temperaturintervall von 1026 bis 1065°C das Oxydul entsteht; als günstiger Wert erwies sich 1030°C , wobei $0,8$ mm Kupferblech in 5 Stunden gänzlich durchoxydiert war. Beim Erkalten bildete sich an der Oberfläche CuO, weshalb die Abkühlung im Vakuum zu erfolgen hat. Die Prüfung dieser Cu_2O -Proben mittels Schliff, Röntgen- und Elektronendiffraktographie zeigte absolut homogene, bis 1 mm grosse Kristallite ohne Spuren von CuO.

Die Eigenschaften des im Handel erhältlichen Kupferoxyds (pro anal., Merck & Co.) gaben keine Veranlassung, dieses selbst herzustellen, da eine weitere Veränderung an der Luft nicht eintritt.

2.2 Cu_2S , Cu_9S_5 und CuS

Diese unter Normalbedingungen stabilen Verbindungen entsprechen den folgenden natürlichen Mineralien:

$\beta\text{-Cu}_2\text{S}$	Chalkosin, orthorhombisch
Cu_9S_5	Digenit, kubisch
CuS	Covellin, hexagonal

Weitere, nur auf nassem Wege erhältliche Polysulfide sollen hier nicht zur Diskussion stehen.

Bei allen drei Substanzen weist die Löslichkeit den sehr geringen Wert von ungefähr 10^{-14} Mol/l auf. Während CuS an der Luft äusserst langsam zu Sulfat oxydiert, sind Cu_2S und Cu_9S_5 in der Atmosphäre sehr stabil [5].

Zur Herstellung wurden als Ausgangsmaterialien Elektrolytkupfer-Pulver und Schwefelblüten verwendet; das Kupfer reduzierte man im H_2 -Strom bei 400°C und der Schwefel wurde bei 100°C im Vakuum getrocknet und von SO_2 und H_2S befreit. Für Cu_2S und Cu_9S_5 erwies es sich als notwendig, die beiden Edukte im stöchiometrischem Verhältnis innig zu mischen und bei einem Druck von 1000 at zu Pillen zu pressen, um diese sodann in einem Quarzrohr unter Vorvakuum einzuschmelzen. Anschliessend erfolgte die Behandlung im Ofen: in 60 Minuten aufheizen auf 1200°C , welche Temperatur während 20 Minuten beibehalten wird, hierauf abkühlen in einer Stunde. Die Röntgenanalysen ergaben gute Übereinstimmung mit den zuverlässigsten Literaturwerten [13].

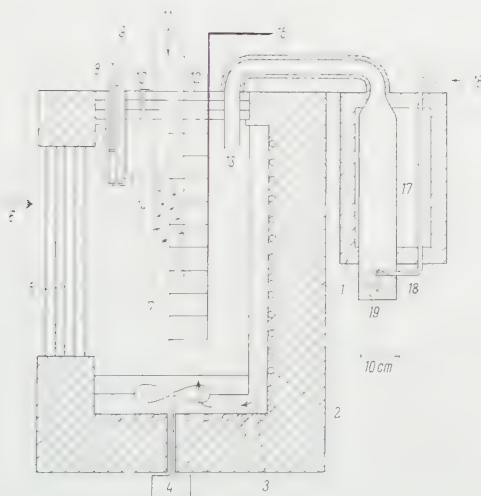
Zur Darstellung von CuS genügte es, Kupfer und Schwefel im Überschuss je in ein Quarzschiffchen zu bringen und diese hintereinander in ein Quarzrohr zu legen, welches nach Evakuieren auf 10^{-3} Torr zugeschmolzen und während 12 Stunden bei 450°C belassen wurde. Wie auf Grund des Zustandsdiagramms erwartet, war das Cu-Pulver vollständig durchschwefelt worden und das tiefblaue Pulver ergab die röntgenographischen CuS-Werte [1].

3. Messmethode und Apparatur

Die Güte eines gewissen Aerosols als Eiskeimbildungskern bei einer Temperatur T sei $q(T)$ und bedeute den Quotienten aus der Anzahl Kernteilchen, die zur Bildung eines Eiskriställchens Anlass geben, und der Gesamtzahl der Partikeln, welche in einem unterkühlten Wassernebel der Temperatur T eingimpft werden.

In der vorliegenden Arbeit ermittelt man $q(T)$ für die oben beschriebenen Substanzen direkt in der Definition entsprechenden Weise, indem in einer Kühlkammer eine Wolke erzeugt, eine bekannte Anzahl Teilchen in diese hineingespritzt und hierauf die Zahl der sich bildenden Eisteilchen bestimmt wird.

Der zentrale Teil der hiezu benützten Apparatur (Figur 1) ist die Wolkenkühlkammer, die ursprünglich lediglich zur Messung von Schwellentemperaturen



Figur 1

Schema der Wolkenkammer. 1 Isolation; 2 Verdampferrohr; 3 zirkulierende Kühlluft; 4 Ventilator für 3; 5 isolierende Verglasung; 6 Beobachtungsrichtung; 7 Thermoelemente; 8 Sedimentationszelle; 9 Impfrohr; 10 Luftauslass; 11 Beleuchtung; 12 Plexiglasdeckel; 13 Nebelreinlass; 14 Aerosoleinspritzung; 15 zum Kompensationsschreiber; 16 Pressluft; 17 Eiswasser; 18 Verneblerdüse; 19 destilliertes Wasser.

gebaut worden war; der eigentliche Versuchsraum (Volumen 100 l) wird auf drei Seiten und am Boden von gekühlter Luft umspült, was einen kleinen, aber nicht verschwindenden vertikalen Temperaturgradienten ergibt (0,02 bis 0,1°C/cm je nach Temperatur). Zur visuellen Beobachtung der Vorgänge im Innern ist die vierte Seite isolierend verglast. Ein dreifacher abnehmbarer Plexiglasdeckel ermöglicht die Beleuchtung senkrecht zur Beobachtungsrichtung durch ein 8 cm breites Strahlenbündel einer horizontal verschiebbaren Hg-Hochdrucklampe.

Die Erzeugung der unterkühlten Wolke erfolgt durch mechanisches Zerstäuben destillierten Wassers an einer mit gekühlter und elektrostatisch sehr wirksam gefilterter (vgl. Liss [7]) Pressluft beschickten Düse; in einem vertikalen Zylinder wird der Nebel auf 0°C gekühlt und von zu grossen Tropfen befreit, worauf er in die Kammer gelangt, aus der er die vom vorhergehenden Versuch verunreinigte Luft verdrängt. Nach der Einführung des Nebels verstreichen etwa 90 Sekunden, bis sich die Turbulenz gelegt hat und die normale Temperaturverteilung wiederhergestellt ist; da die Tröpfchen teils absinken, teils verdampfen, bleibt die Wassersättigung nur noch während rund vier Minuten erhalten, in welcher Zeit die Messung durchgeführt werden muss.

Ein Kompensationsschreiber registriert die von zehn in der Kammer verteilten Thermoelementen gemessenen Temperaturen.

Die dosierte Eingabe von Kernpartikeln in die Wolke geschieht am besten in Luft suspendiert. Bei vielen Substanzen in Pulverform neigen die Partikelchen zu Konglomeratbildung, was die Dispersion in Luft erschwert. Mit der hier verwendeten Vorrichtung (Figur 2) konnten dennoch gute Resultate erzielt werden. Zwei



Figur 2

Schema der Impfvorrichtung. 1 Zufuhr reiner Luft; 2 Kühlfalle zur Trocknung; 3 Durchflussmesser; 4 Hähnen; 5 Dosiereinrichtung; 6 Zerstäubergehäuse; 7 rotierende Bürsten; 8 Weg der Staubteilchen; 9 Luftstrom; 10 Glaszylinder; 11 Filter; 12 Zuführungsrohr in die Kammer; 13 Plexiglasdeckel; 14 Sedimentationszelle; 15 Öffnung zum Impfen; 16 Luftabfuhr; 17 Zapfen, der in die Kammer hineinragt.

zylindrische Nylonbürsten rotieren um ihre horizontale Achse in einem entsprechenden Gehäuse, das nur gegen oben geöffnet ist und auch das zu dispergierende Pulver enthält; wenn die Borsten in horizontaler Lage sind, treffen sie auf ein Hindernis, worauf ihre Enden stark beschleunigt und die daran haftenden Partikeln in den vertikalen Luftstrom geschleudert werden, der seiner Geschwindigkeit gemäss nur Teilchen unterhalb eines bestimmten Grenzdurchmessers mitnimmt. Die hier zur Verwendung gelangende Luft wurde bereits elektrostatisch gefiltert und in Kühlfällen getrocknet. Aus dem Aerosolvorrat in Zylinder über dem Pulverzerstäuber wird ein vertikales Rohr (Durchmesser 16 mm) gefüllt, das von oben ins Innere der Kammer führt. Mit einer Dosiereinrichtung kann nun wahlweise aus diesem Rohr ein bestimmtes Volumen in die Wolke gespritzt oder in eine Sedimentationszelle abgefüllt werden. Letztere besteht aus einem Metallzylinder (\varnothing 14 mm)

mit verschiebbarem Kolben; ein Objektträger (Glasplättchen oder Formvar-Haut) am Boden der Zelle fängt die darin ausfallenden Partikeln auf. Um die Konzentration des in die Wolke geblasenen Aerosols zu kennen, muss ein repräsentatives Luftvolumen aus dem Rohr in die Sedimentationszelle gefüllt werden; in praxi wird vor und nach dem Impfen der Wolke je eine Probe entnommen und dann geeignet interpoliert. Die Einführung des Aerosols in den Nebel erfolgt im oberen Drittel der Kammer durch horizontales Einblasen von 10^4 bis 10^7 Partikeln in $0,5$ bis 20 cm^3 Luft; da diese schon im vertikalen Rohr ungefähr Kammertemperatur angenommen hat, wandert das eingespritzte Volumen in Form eines Wirbelringes horizontal gegen die Mitte der Kammer, wobei dieser und die daraus herausfallenden Eiskriställchen im parallelen Licht gut beobachtet und gezählt (bzw. geschätzt) werden können.

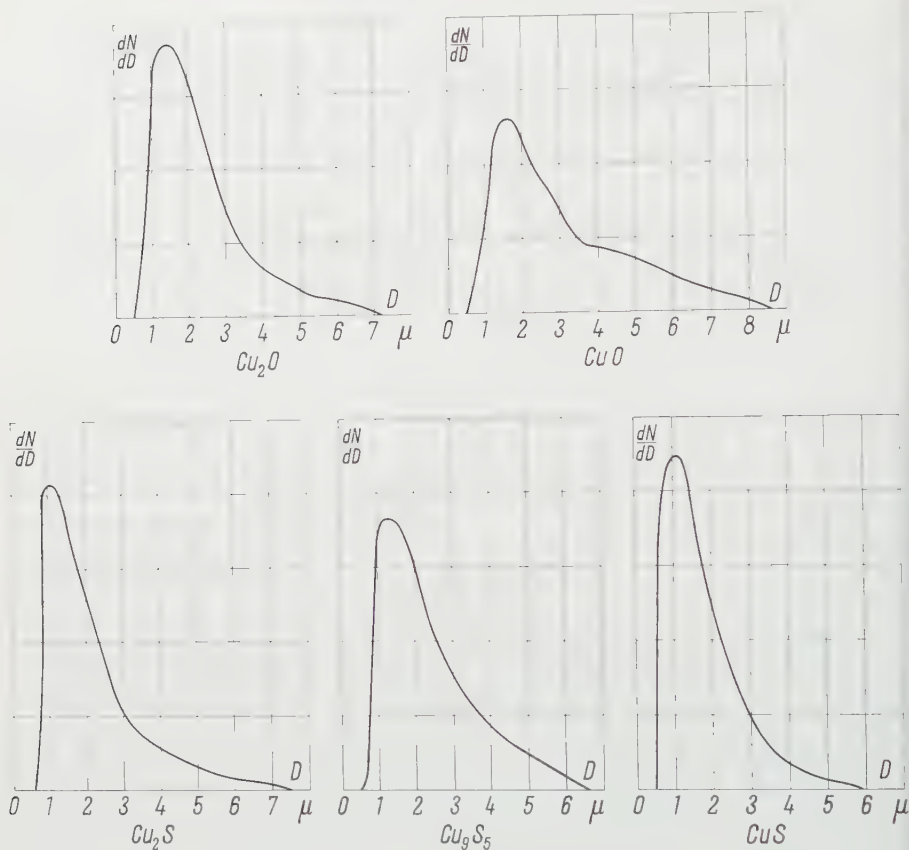
4. Messungen und Diskussion der Resultate

Die Substanzen wurden in der Achatschale von Hand zu Pulver zerrieben; da die Messung an einem Stoff etwa 3 Tage beanspruchte, erfolgte das Zerkleinern 10 Tage vor Messbeginn, damit sich eventuell an der Oberfläche abspielende Veränderungen nicht im Laufe der Messung störend auswirkten.

Bei der mikroskopischen Auszählung der Sedimentationsproben wurden die Grössenverteilungen ermittelt, die in Figur 3 dargestellt sind; kleinere Schwankungen waren dabei nicht zu vermeiden, doch ergab die stichprobenweise elektronenmikroskopische Untersuchung keine Teilchen mit Durchmessern unterhalb etwa $0,5 \mu$. Diese Begrenzung erschien uns sehr wünschenswert, da einerseits die Sedimentationsproben rasch hergestellt sind, und andererseits, weil auf Grund theoretischer Überlegungen (z. B. FLETCHER [3]) unterhalb des erwähnten Grenzdurchmessers eine immer stärker werdende Abhängigkeit der Aktivität von der Partikelgrösse zu erwarten ist.

Beim Einblasen der Impfstoffe in die Tröpfchenwolke zeigte es sich, dass nach 2 bis 5 Sekunden die Eiskristallbildung am intensivsten und nach etwa 10 Sekunden bereits auf ein vernachlässigbares Mass abgesunken war. Ferner konnte keine wesentliche Abhängigkeit der Aktivität von Radius und Konzentration der Nebeltröpfchen beobachtet werden, solange deren Vorhandensein 100% relative Feuchtigkeit gewährleistete; nach der Auflösung der Wolke jedoch traten Eiskristalle nur noch in sehr reduziertem und verzögertem Masse auf. Die vorliegenden Resultate beziehen sich aber ausschliesslich auf den Fall der Wasserdampfsättigung.

Figur 4 und 5 zeigen $q(T)$ logarithmisch aufgetragen; die starke Streuung der einzelnen Messpunkte rührt vor allem von der visuellen Abschätzung der Anzahl sich bildender Eiskristalle her. Infolge nicht zu vermeidender Turbulenz in der Kammer muss mit einer Unsicherheit der Temperaturmessung von $\pm 0,5^\circ \text{C}$ gerechnet werden. Aus apparativen Gründen konnten q -Werte unterhalb 10^{-6} nicht mehr gemessen werden, doch lassen die Kurven das Erreichen einer oberen Grenztemperatur (Schwellentemperatur) erkennen und abschätzen. Für Cu_2O und CuO (Figur 4) ergaben sich praktisch die gleichen Schwellentemperaturen, wie sie schon PRUPPACHER und SÄNGER [8] fanden, während FUKUTA [4] für beide Stoffe etwa -4°C angibt. Ausser bei -35°C , wo beide Substanzen die gleiche Aktivität zeigen, lässt der deutliche Unterschied den Schluss zu, dass bei Cu_2O die Partikeloberfläche noch nicht wesentlich oxydiert war. Bei den Kupfersulfiden (Figur 5) fällt die nahezu gleiche Schwellentemperatur auf, während sich die q -Werte zum Beispiel bei -10°C um Grössenordnungen unterscheiden. Die Grenztemperatur von CuS differiert mit -5°C nur leicht von den Werten anderer Autoren (-4°C [8], $-7,3^\circ \text{C}$ [4]).

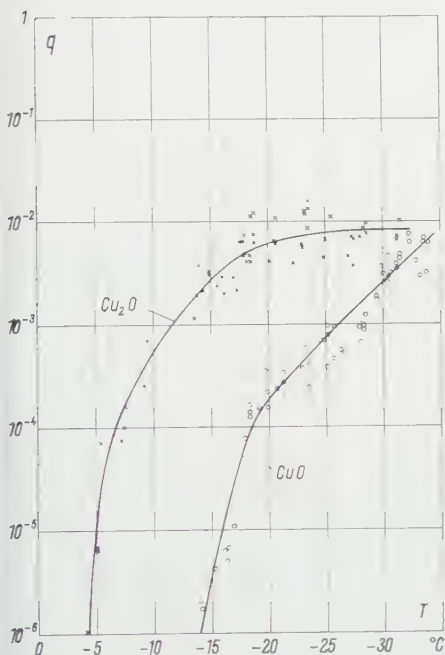


Figur 3

Relative Häufigkeit der Teilchen in Funktion ihres Durchmessers D . (Die Ordinate ist in willkürliche Einheiten geteilt.)

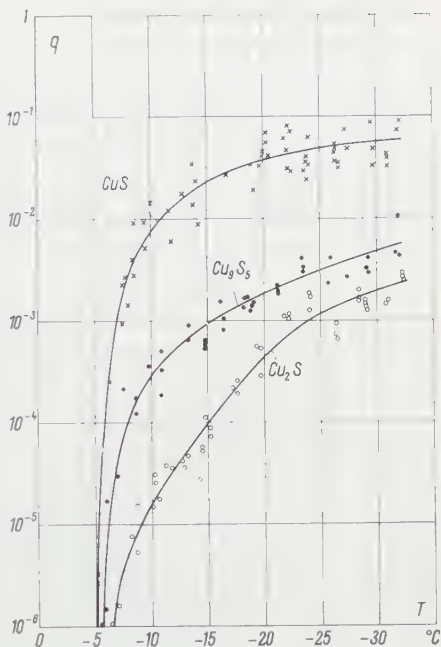
Infolge des einsetzenden spontanen Gefrierens von Nebeltröpfchen unterhalb von etwa -33°C konnten die Kurven nicht bis -40°C ermittelt werden, womit auch über den Anstieg der Wirksamkeit unterhalb -30°C keine Aussagen zu machen sind, insbesondere nicht über die interessante Frage, ob bei CuS und Cu_2O ein Grenzwert der Aktivität bei etwa -30°C erreicht wird.

Für AgI -Rauch haben verschiedene Autoren, wie SANO [9], SMITH und HEFFERNAN [11] und SOULAGE [12], eine zur unseren analoge Kurve angegeben, und FLETCHER [3] interpretiert den Anstieg der Aktivität mit sinkender Temperatur als Folge der Grössenverteilung der Teilchen; wenn auch eine starke Temperaturabhängigkeit der Aktivität bei Teilchengrössen unterhalb $0,1\ \mu$ durchaus verständlich ist und experimentell von HOSLER [6] und SANO [9] bestätigt wurde, so können doch FLETCHERS Berechnungen in unserem Falle keine hinreichende Erklärung für den Anstieg über ein Intervall von mehr als 15°C liefern, sondern es wäre danach nur



Figur 4

Eiskeimbildungsaktivität q von Cu_2O und CuO in Funktion der Temperatur T .



Figur 5

Eiskeimbildungsaktivität q von Cu_2S , Cu_9S_5 und CuS in Funktion der Temperatur T .

ein solches von etwa 4°C zu erwarten; dies um so mehr, als hier kristalline, eckige Partikeln mit ebenen Flächen zur Verwendung gelangten, während FLETCHER kugelförmige Teilchen voraussetzte.

Bei seiner jüngsten Untersuchung der Eiskeimbildung an verschiedenen Metalloxyden hat SERPOLAY [10] für ein Kupferoxyd einen ähnlichen Verlauf von $q(T)$ erhalten, doch erreicht die Kurve schon bei -20°C Werte von $q \approx 0,5$. Für diese Diskrepanz könnte einerseits die unterschiedliche Messmethode verantwortlich sein, liegen doch die Partikeln bei SERPOLAY auf einer gekühlten Unterlage, die den Eiskeimbildungsmechanismus eventuell auch beeinflusst; der zweite Grund aber ist in der verschiedenen Herstellungsmethode zu suchen, womit SERPOLAY auf eigentliche Katalysatoren abzielt, die durchwegs sehr porös sind und damit eine ausserordentlich grosse spezifische Oberfläche aufweisen.

Bemerkenswert an unseren Messungen ist, dass Stoffe, die auf Grund ihrer Schwellentemperatur als gute Eiskeimbildungskerne anzusprechen sind, auch bei relativ tiefen Temperaturen eine sehr kleine Aktivität von nur einigen Promille oder Prozent aufweisen. Dies liesse sich damit erklären, dass die Dichte der für die Eiskeimbildung günstigen Stellen auf der Oberfläche der Impfsubstanzen recht gering ist. Um eine befriedigende theoretische Interpretation des Verlaufs von $q(T)$ finden zu können, bedarf es jedoch vorgängig noch weiterer experimenteller Untersuchungen.

Abschliessend sei dem Leiter des Laboratoriums für Atmosphärenphysik, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER, für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an deren Fortgang gedankt. Des Dankes versichert seien auch Herr M. BAUD für die erwähnte Mitwirkung sowie die Herren Prof. Dr. G. BUSCH, Prof. Dr. W. EPPRECHT, Prof. Dr. F. LAVES, Prof. Dr. B. MARINCEK und deren Mitarbeiter, die für die Herstellung und kristallographischen Untersuchungen der Substanzen ihre Apparaturen zur Verfügung stellten und mit Ratschlägen zur Seite standen. Die finanziellen Mittel für die Durchführung der Untersuchungen sind in verdankenswerter Weise von der Schweizerischen Forschungskommission zugesprochen worden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Amer. Soc. test. Mat. (ASTM-Kartei Nr. 6-0464).
- [2] BRÜESCH, P., Z. angew. Math. Phys. 10, 519 (1959).
- [3] FLETCHER, N. H., J. Met. 16, 173 (1959).
- [4] FUKUTA, N., J. Met. 15, 17 (1958).
- [5] GMELIN, *Handb. d. anorg. Chemie*, Bd. Kupfer (1955).
- [6] HOSLER, C. L., and SPALDING, G. R., in: H. WEICKMANN and W. SMITH, *Artificial Stimulation of Rain* (Pergamon Press, London 1957).
- [7] LIST, R., Helv. Phys. Acta 29, 424 (1956).
- [8] PRUPPACHER, H. R., und SÄNGER, R., Z. angew. Math. Phys. 6, 407 (1956).
- [9] SANO, I. et al., J. met. Soc. Japan, Ser. II 34, 104 (1956).
- [10] SERPOLAY, R., Bull. Obs. Puy de Dôme 1959, 81.
- [11] SMITH, E. J., and HEFFERNAN, K. J., Quart. J. Roy. Met. Soc. 80, 182 (1954).
- [12] SOULAGE, G., Bull. Obs. Puy de Dôme 1955, 1.
- [13] *Tables pour la détermination des minéraux au moyen des rayons X* (Lisbonne 1953).

Summary

The icing nucleability of Cu_2O , CuO , Cu_2S , Cu_9S_5 , and CuS has been measured as a function of the temperature. After a short description of the way in which the substances were prepared, the measuring apparatus is explained. *Figure 1* shows the cloud chamber with a particularly small temperature gradient and the apparatus with which a supercooled cloud is first produced in the chamber, before the seeding substance from the disperser (*Figure 2*) is injected into the cloud by means of the dosing instrument. The fall-out of ice crystals is observed visually and their number estimated. The concentration of the seeding particles is obtained through a sedimentation tube (*Figure 2*). The size distribution of the particles is represented in *Figure 3*, and it should be noted that no diameter of less than 0.5μ occurs. *Figures 4* and *5* show the activity in terms of icing nucleability q , which is defined as the ratio of observed ice crystals to the number of nuclei injected into the cloud. A brief comparison is made of these measurements with the theory of FLETCHER [3] concerning the dependence of particle size on the threshold temperature, and with the experiments of other authors. The only explanation attempted of the differences which have been established here has been for the time being in qualitative terms. The threshold temperatures of the substances in question are ($\pm 0.5^\circ\text{C}$), Cu_2O : -4.2°C , CuO : -13.5°C , CuS : -5.1°C , Cu_9S_5 : -5.7°C , Cu_2S : -6.4°C .

(Eingegangen: 21. Dezember 1959.)

Über die Trennung von Gasgemischen in laminarer Strömung

VON JANEZ STRNAD, Ljubljana, Jugoslawien¹⁾

Es wird eine nur vom theoretischen Standpunkte aus interessante Möglichkeit für die Trennung von Komponenten eines Gasgemisches betrachtet.

Für ein laminar (Reynoldssche Zahl $Re < 2000$) durch ein langes Rohr mit dem Durchmesser $2r_0$ strömendes Gas ist die Geschwindigkeit mit

$$v(r) = v(0) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

gegeben.

Als Folge der inneren Reibung wird in der Strömung pro Zeiteinheit und Volumeneinheit [1]²⁾

$$\dot{p} = \mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 + \mu v^2(0) \frac{r^2}{r_0^4}$$

kinetische Energie in Wärme umgewandelt (μ Zähigkeit). Wenn die Wärmeleitung in der Strömungsrichtung vernachlässigt wird, folgt aus der Wärmeleitungsgleichung für den stationären Fall

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{p}}{\lambda} = -4 \mu v^2(0) \frac{r^2}{\lambda r_0^4}$$

(λ Wärmeleitfähigkeit). Daraus ergibt sich für den Verlauf der absoluten Temperatur

$$T(r) = T(r_0) + \frac{\mu v^2(0)}{4 \lambda} \left(1 - \frac{r^4}{r_0^4}\right),$$

wobei die Rohrwandtemperatur $T(r_0)$ als durchwegs konstant angenommen wurde.

Wenn die Strömung hydrodynamisch (Knudsen'sche Zahl $Kn < 0,1$) ist, bringt die mit $T(r)$ bedingte Thermodiffusion ein Konzentrationsgefälle zustande. In einem binären Gasgemisch, in dem $n(r)$ der Molenbruch der schwereren Komponente ist, ergibt sich [2] im stationären Zustand die Gleichung

$$\frac{n(r)}{1-n(r)} = \frac{n(r_0)}{1-n(r_0)} \left[1 + \frac{\mu v^2(0)}{4 \lambda T(r_0)} \left(1 - \frac{r^4}{r_0^4}\right) \right]^{-\sigma},$$

wobei σ der Thermodiffusionsfaktor ist. Da im allgemeinen das zweite Glied in der grossen Klammer sehr klein ist, kann der Ausdruck in eine Potenzreihe entwickelt werden. Wenn man nur die ersten zwei Glieder beibehält und noch die Konstante $c = (\kappa \mu R)/(4 \lambda M)$ und die Mach'sche Zahl $Ma = v(0) [M/\kappa R T(r_0)]^{1/2}$ einführt, hat man

$$n(r) = n(r_0) - n(r_0) [1 - n(r_0)] c \sigma Ma^2 \left(1 - \frac{r^4}{r_0^4}\right)$$

(κ Adiabatenexponent, M mittleres Molekulargewicht). In den meisten Gemischen

¹⁾ Physikalisches Institut der Universität.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 246.

($\sigma > 0$) wird die schwere Komponente am Rande der Strömung angereichert. Der Elementareffekt der Trennung $\varepsilon_A = n(r_0) [1 - n(0)] \{n(0) [1 - n(r_0)]\}^{-1}$ beträgt

$$\varepsilon_A = c \sigma Ma^2.$$

Beim Gemisch zweier Isotope mit den Molekulargewichten M_2 und M_1 [3] ist σ von der Grössenordnung $0,89 (M_2 - M_1)/(M_2 + M_1)$ und hat ε_A somit die Grössenordnung $0,1 (M_2 - M_1) Ma^2/(M_2 + M_1)$. Es wäre nicht zweckmässig, diesen Effekt praktisch auszunützen, da andere Trennverfahren³⁾ weit grössere Trenneffekte aufweisen.

Einen Trenneffekt in laminarer Strömung hat TOLLERT [4] experimentell nachgewiesen. Seine Experimentalbedingungen unterscheiden sich aber von unseren Annahmen.

Tafel von c [5]

Gas	He	A	H ₂	N ₂	O ₂	CO ₂	NH ₃
c	0,112	0,114	0,070	0,075	0,073	0,059	0,068

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] N. J. KOTSCHIN, I. A. KIBEL und N. W. ROSE, *Theoretische Hydromechanik* II. Teil (Akademie-Verlag, Berlin 1954), S. 271.
- [2] S. CHAPMAN and T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge 1939), S. 244, Gl. (14, 1, 1).
- [3] R. C. JONES and W. N. FURRY, *Rev. Mod. Phys.* 18, 151 (1946).
- [4] H. TOLLERT, *Z. Elektrochem.* 61, 1224 (1957).
- [5] E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases* (McGraw-Hill, New York 1938), S. 180, 252.

Summary

The separation effect in a gas mixture laminary and hydrodynamically flowing through a cylindrical pipe with constant wall temperature is calculated.

(Eingegangen: 30. November 1959).

³⁾ Bei der Diffusion durch poröse Membranen hat zum Beispiel der Elementareffekt der Trennung maximal den Wert $(M_2 - M_1)/(M_2 + M_1)$.

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 52: *Astrophysik*, III: *Das Sonnensystem* (Springer-Verlag, Berlin 1959). 601 S., 225 Abb.; DM 148.—

Von den 600 Seiten des vorliegenden, die Körper des Sonnensystems behandelnden Bandes sind 362 der Sonne gewidmet. Der einleitende, 79 Seiten umfassende Abschnitt von GOLDBERG und PIERCE über die Photosphäre gibt eine erschöpfende Darstellung des kontinuierlichen und des Linienspektrums der Sonne, wobei das Schwergewicht auf den Beobachtungen liegt; theoretische Untersuchungen, die schon in einem früheren Band ihre Darstellung gefunden haben, werden nur so weit beigezogen, als es für die Interpretation und insbesondere für die Erschliessung des Aufbaues der Photosphäre notwendig ist. Das Kernstück des Bandes bildet der von DE JAGER verfasste 283 Seiten starke Beitrag über die Struktur und Dynamik der Sonnenatmosphäre. Das Gebiet ist so weit gespannt, dass ein einzelner Forscher nur einen kleinen Teil desselben aus eigener Tätigkeit kennen kann, im übrigen auf das Literaturstudium angewiesen ist. Trotzdem zeichnet sich der Artikel durch bemerkenswerte Vollständigkeit und Homogenität aus. Der Autor hat, auch auf ihm ferner liegenden Gebieten, mit sicherem Instinkt stets die wesentlichen Punkte hervorgehoben und auch russische Arbeiten nicht übersehen. Wenn man auch dafür Verständnis haben kann, dass der Autor im wesentlichen nur die Literatur ab 1953 zitiert, so hätte man doch die diesbezügliche Bemerkung lieber am Anfang gesehen, denn es gibt auch heute noch Leute, welche einen Artikel vorne zu lesen beginnen; auch hätte dadurch manchem Missverständnis, wo der Leser statt des Namens eines Pioniers denjenigen seiner Epigonen findet, vorgebeugt werden können. Abbildung 47 ist voll innerer Widersprüche, und in der unglücklichen Abbildung 92 ist durch Umkopieren nach Belieben Schwarz zu Weiss und Weiss zu Schwarz gemacht. Trotzdem: alles in allem ein ausgezeichnete Beitrag, der durch seine einfache Sprache auch den Lesern nichtenglischer Zunge leicht zugänglich ist. Die nachfolgenden kurzen Kapitel behandeln die Atmosphären der Planeten (H. C. UREY), den inneren Bau der Planeten (W. C. DE MARCUS), die Radioechos vom Mond (F. J. KERR), die Kometen (K. WURM) und die Meteore (F. L. WHIPPLE).

Bedauerlich ist, dass der Mond aus dem schön ausgestatteten Band verbannt ist, erfreulich, dass derselbe mit nur wenigen Monaten Verspätung auf die neuesten darin zitierten Arbeiten erscheinen konnte.

M. WALDMEIER

Atlas of Gamma-Ray Spectra from Radiative Capture of Thermal Neutrons. Von L. D. GROSHEV, N. LUTSENKO, A. M. DEMODOV und V. I. PELEKHOV. Aus dem Russischen übersetzt von J. B. SYKES (Pergamon Press, London 1959). 198 S., 142 Abb.; \$20.—

Die russischen Autoren haben keine Mühe gescheut, sämtliche bekannten Gammaspektren, die durch Einfang thermischer Neutronen entstanden sind, nach Elementen zu ordnen. Für dieses Vorhaben sind sie besonders ausgezeichnet, da gerade aus dieser Forschungsgruppe viele wertvolle Beiträge herrühren, die aus Messungen mit einem Compton-Spektrometer stammen. Das Einfangs-Gammastrahlenspektrum ist in der Regel sehr komplex. Die magischen Kerne mit abgeschlossenen Schalen und einige leichte Kerne bilden eine Ausnahme. Die Kenntnis der Spektren und besonders der Intensitätsverhältnisse sind für viele Arbeiten an

einem Reaktor ausschlaggebend. Dieser Atlas ist daher an jedem Reaktor ein unentbehrlicher Ratgeber. Der Kernphysiker findet darin viele Zerfallsschemas, die er sonst mühselig in den verschiedensten Handbüchern herausuchen müsste. Im Anhang sind einige Spektren von Konversionselektronen aufgeführt, die ebenfalls nach Einfang thermischer Neutronen entstehen. Eine sorgfältige Zusammenstellung der Literatur auf diesem Arbeitsgebiet bietet auch dem Spezialisten viel Anregung. Als wertvolles Nachschlagewerk dürfte dieser Atlas seine Aufgabe voll und ganz erfüllen.

P. STOLL

Handbook of Probability and Statistics with Tables. Von R. S. BURINGTON und D. C. MAY, Jr. (McGraw-Hill Book Company, New York 1959). 332 S., 53 Fig.; \$ 6.-.

Dieses schon 1953 durch die Handbook Publishers (Sandusky, Ohio) herausgegebene kleine Handbuch wurde kürzlich von der McGraw-Hill Book Company übernommen. Da es sich auf die Beschreibung der gebräuchlichsten Methoden der mathematischen Statistik beschränkt, hat es seit seinem ersten Erscheinen kaum an Bedeutung verloren. Die Verfasser wenden sich sowohl an den Studierenden der mathematischen Statistik als auch an den praktisch tätigen Statistiker. Indem sie uns einen Überblick über die wichtigsten Zusammenhänge geben, berichten sie zugleich alles, was man zur korrekten Anwendung der besprochenen Methoden wissen muss. Theorie und Anwendung sind dabei geschickt verknüpft, und die mathematischen Begriffe und Beziehungen sind elegant erklärt. Sehr wertvoll wäre ein ausführlicher Literaturnachweis gewesen.

Einige Kapitelüberschriften mögen den Inhalt andeuten: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verteilungsfunktionen, Prüfverfahren und Vertrauensgrenzen, Korrelationsrechnung, Zeitserien, Streuungszerlegung, Fortschreitende Probenahme, Qualitätskontrolle*. Neben den üblichen Tafeln für t -, F - und χ^2 -Test finden wir eine Anzahl nützlicher Tabellen. Spezielle Erwähnung verdienen die ausführlichen Tafeln für Binomial-, Poisson- und Normalverteilung.

P. SCHMID

Basic Physics of Atoms and Molecules. Von U. FANO und Mrs. L. FANO (John Wiley & Sons, New York 1959). 414 S., 86 Fig.; \$ 10.-.

Das vorliegende Buch postuliert in der Einleitung eine Lücke im vorhandenen Schrifttum, die es nun ausfüllen will. Die Lücke besteht im Mangel an Werken, welche eine Einführung und ein *Verständnis* für die Mikrophysik und ihren Zusammenhang mit den gewohnten Eigenschaften makroskopischer Objekte geben.

Das Haupthindernis für das Eindringen in das Gebiet der Quantentheorie sehen die Autoren wohl mit Recht in dem dazu erforderlichen mathematischen Apparat.

Unter diesen Voraussetzungen gehen die Autoren zum Teil eigenwillige Wege. So werden wichtige quantenmechanische Tatsachen zunächst für diskrete Situationen (Quantisierung des Drehmomentes) illustriert. Nun ist das Diskrete allerdings begrifflich einfacher als das Kontinuierliche, doch folgt daraus nicht notwendig, dass es zur Einführung besser geeignet ist.

Die Autoren machen sich ihre Aufgabe nicht leicht, indem sie ihre eigenen Wege gehen. Das Buch ist durchaus sorgfältig geschrieben und behandelt neben dem üblichen Stoff der Atomphysik zur Hauptsache noch die chemische Bindung. Eine Reihe von Anhängen sind der Ergänzung der mathematischen Hilfsmittel gewidmet.

Das Werk richtet sich in erster Linie an Fachleute aus den Nachbarwissenschaften zur Physik, ausgenommen an Mathematiker, also etwa an Chemiker und Biologen.

R. JOST

On the Scattering of Waves by a Disk

By ALBERT E. HEINS, Ann Arbor, Mich., U.S.A.¹⁾
and RICHARD C. MACCAMY, Pittsburgh, Pa., U.S.A.²⁾

1. Introduction

This paper is concerned with the scattering of sound waves by a circular disk of so-called 'soft' material. The appropriate boundary value problem is the determination of a function $U(r, \theta, z)$ satisfying the equation

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} + U_{zz} + k^2 U = 0 \quad (1.1)$$

with the condition

$$U(r, \theta, 0) = 0 \quad \text{for } r < 1. \quad (1.2)$$

In addition $U(r, \theta, z)$ is to be made up of an incident field $U_0(r, \theta, z)$, which is prescribed, and a term $U^s(r, \theta, z)$ satisfying a radiation condition at infinity.

An explicit solution of this problem is possible by means of spheroidal harmonics [1]³⁾ but the resulting formulae are exceedingly complicated. An alternative method is to formulate the problem as an integral equation. Using GREEN'S formula one can derive the so-called 'Helmholtz representation' for the solution namely,

$$U(r, \theta, z) = U_0(r, \theta, z) + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \phi) \frac{e^{i k R}}{R} \varrho d\phi d\varrho \quad (1.3)$$

with $R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\theta - \phi) + z^2$ and where $f(\varrho, \phi)$ denotes the discontinuity of U_z on the disk, $z = 0$, $r < 1$. From (1.2) and (1.3) one obtains the integral equation,

$$0 = U_0(r, \theta, 0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta) \frac{e^{i k R}}{R} \varrho d\varrho d\theta, \quad z = 0, r < 1. \quad (1.4)$$

Unfortunately a solution of (1.4) is not known and one is led to the question of approximations.

¹⁾ The University of Michigan, Department of Mathematics

²⁾ The Carnegie Institute of Technology, Department of Mathematics.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 264.

When k is set equal to zero the above problem becomes that of an electrified disk in electrostatics, simple solutions of which have long been known. It was observed by COPSON [2] that in the case $k = 0$ the equation (1.4) itself can be solved explicitly. COPSON's procedure calls for the expansion of all quantities in a Fourier series of the angle θ and then carrying out the angular integrations in (1.4) to obtain simpler integral equations which can be solved. For the case of axially symmetric problems, that is, when U does not depend on θ the method of COPSON was extended by JONES [3]⁴ to equation (1.4) for arbitrary k . In this case an explicit solution is no longer possible but rather JONES was able to derive from (1.4) a regular Fredholm integral equation of second kind which is well adapted to an iteration scheme for small k .

It is rather an involved procedure to carry out the angular integration in (1.4) for $k \neq 0$. It proved necessary to use some rather complicated relations involving Bessel functions. Curiously enough, these complications vanished at the end and the resulting equation involved only elementary functions. The authors were led to believe that there should be also a simpler method for deriving this equation and this, in fact, proves to be true. The central feature of the problem appears to be the fact that an axially-symmetric solution of (1.1) is determined uniquely by its values on the axis of symmetry, $r = 0$. Such a determination was observed by HENRICI [4] and further investigated by the authors in [5]. In this paper we show that an integral equation analogous to that of Jones may be derived without the intermediate step of rewriting the ϕ integration in (1.4). Further, the analysis is simple enough to be easily carried over to the case of non-symmetry about $r = 0$.

In section 2 we indicate how the general situation without symmetry can be reduced to a series of problems similar to the axially symmetric case. In section 3 the necessary material from [4] is presented. In the next two sections we outline our method of solution and in the last section we carry out some simple calculations for the case in which $U_0(r, \theta, z)$ represents a plane wave of arbitrary angle of incidence. We include an approximate formula for the discontinuity of the z derivative of U on the disk, as a function of angle of incidence, when the wave number k is small.

2. Preliminary Remarks

Solutions of (1.1) which are of class $C^{(2)}$ in a region are known to be analytic functions of z and $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. The particular function U satisfying (1.2) will accordingly be analytic except on the ring $r = 1$, $z = 0$, so that the apparent singularity at $r = 0$ does not in reality appear. In this connection we shall have frequent use of the following lemma:

⁴ JONES studied the problem with the condition $\partial U / \partial z = 0$, $z = 0$ but the changes to the present problem are not difficult.

Lemma 1. Let $G(x, y, z)$ be an analytic function for $x^2 + y^2 < R^2$. Then with $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(r, z) \cos n \theta + B_n(r, z) \sin n \theta],$$

where

$$A_n(r, z) = r^n a_n(r, z), \quad B_n(r, z) = r^n b_n(r, z),$$

a_n and b_n being continuous at $r = 0$.

That G can be expanded in a Fourier series is immediate. Further since G is analytic,

$$G = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{jmn} x^j y^m z^n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{jmn} r^{j+m} \cos^j \theta \sin^m \theta z^n.$$

Now the Fourier series for G can be obtained by expanding $\cos^j \theta$ and $\sin^m \theta$ in multiple angles. However $\cos^j \theta \sin^m \theta$ will contribute to $\cos n \theta$ or $\sin n \theta$ only if $j + m \geq n$. It follows that the coefficients of $\cos n \theta$ and $\sin n \theta$ involve only terms in r^n or higher powers of r .

On the basis of lemma 1 we can write for the function U ,

$$\left. \begin{aligned} U(r, \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [U^n(r, z) \cos n \theta + V^n(r, z) \sin n \theta]; \quad U^n = r^n u^n, V^n = r^n v^n, \\ U_0(r, \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [U_0^n(r, z) \cos n \theta + V_0^n(r, z) \sin n \theta]; \quad U_0^n = r^n u_0^n, V_0^n = r^n v_0^n. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

We write also,

$$f(\varrho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varrho) \cos n \phi + s_n(\varrho) \sin n \phi. \quad (2.2)$$

Since the function U is to be a solution of (1.1) the functions U^n and V^n are solutions of the equations,

$$W_{rr} + \frac{1}{r} W_r + W_{zz} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) W = 0 \quad (2.3)_n$$

from which it follows that the functions u^n and v^n are solutions of

$$w_{rr} + \frac{2n+1}{r} w_r + w_{zz} + k^2 w = 0. \quad (2.4)_n$$

If the series (2.1) and (2.2) are substituted in the Helmholtz formula (1.4) one finds easily that the terms corresponding to the various Fourier coefficients

separate. In fact if we introduce the operators

$$M_n(r, z; g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\varrho) \varrho \cos n\phi \frac{e^{ikR}}{R} d\phi d\varrho,$$

$$N_n(r, z; g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\varrho) \varrho \sin n\phi \frac{e^{ikR}}{R} d\phi d\varrho,$$

with $R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos\phi + z^2$, formula (1.3) becomes,

$$U^n(r, z) = U_0^n(r, z) + M_n(r, z; c_n), \quad V^n(r, z) = V_0^n(r, z) + M_n(r, z; s_n). \quad (2.5)$$

We now proceed to derive one of the two key formulae in our work. We prove

$$n! u^n(0, z) = n! u_0^n(0, z) + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial(z^2)^n} \int_0^1 c_n(\varrho) \frac{\varrho^{n+1} e^{ik\mu}}{\mu} d\varrho, \quad n \neq 0, \quad (I)$$

where $\mu^2 = \varrho^2 + z^2$. The same relation exists between v^n , v_0^n and s_n . In order to verify (I) we start with the observation that $U^n = r^n u^n$ implies,

$$n! u^n(0, z) = \left. \frac{\partial^n U^n}{\partial r^n} \right|_{r=0}, \quad n! u_0^n(0, z) = \left. \frac{\partial U_0^n}{\partial r^n} \right|_{r=0}.$$

Thus we are required to compute first the successive derivatives with respect to r of $M_n(r, z; c_n)$. In order to carry out these differentiations we write,

$$\frac{e^{ikR}}{R} = F(\beta + z^2), \quad \beta = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos\phi.$$

We have then

$$\beta_r = 2r - 2\varrho \cos\phi, \quad \beta_{rr} = 2 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^m \beta}{\partial r^m} = 0 \quad \text{for } m \geq 3.$$

Then we assert,

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^n F^{(n-j)} \beta_r^{n-2j} \beta_{rr}^j, \quad c_0^n = 1. \quad (2.6)$$

We prove (2.6) by the method of induction. It is clearly true for $n = 1$. Let us assume now that it is true for any $n > 1$. Then

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial r^{n+1}} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} = \sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^n F^{n-j+1} \beta_r^{n-2j+1} \beta_{rr}^j + \sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^n F^{n-j} \beta_r^{n-2j-1} \beta_{rr}^{j+1} (n-2j)$$

since $\partial^3 \beta / \partial r^3 = 0$. Each term in the second sum has the same form as a term

in the first sum except the last one. This one is

$$c_{[n/2]}^n F^{n-[n/2]} \beta_r^{n-2[n/2]-1} \beta_{rr}^{[n/2]+1} (n-2[n/2]).$$

Now if n is even, $[n/2] = (n+1)/2$ and $n-2[n/2] = 0$ so that (2.6) holds for $n+1$. If n is odd, $n-2[n/2] = 1$ and $[(n+1)/2] = [n/2] + 1$ so that the last term becomes

$$c_{[n/2]}^n F^{n+1-[(n+1)/2]} \beta_r^{n+1-2[(n+1)/2]} \beta_{rr}^{[(n+1)/2]},$$

which is the last term of (2.6) for $n+1$. We note that the coefficient of c_0^n remains unchanged and hence always has the value unity.

Inserting (2.6) into (2.5), we have

$$\frac{\partial^n U^n(r, z)}{\partial r^n} = \frac{\partial^n U_0^n(r, z)}{\partial r^n} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^n \int_0^1 \int_0^{2\pi} c^n(\varrho) \varrho \cos n\phi F^{(n-j)} (2r - 2\varrho \cos\phi)^{n-2j} 2^j d\phi d\varrho]$$

or

$$n! u^n(0, z) = n! u_0^n(0, z) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^n (-1)^n 2^{(n-j)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} c^n(\varrho) \varrho^{n-2j+1} \cos^{n-2j}\phi \cos n\phi F^{n-2j} d\phi d\varrho.$$

But

$$\cos^\alpha \phi = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \cos \alpha \phi + a_1 \cos(\alpha-2)\phi + \dots$$

so that the only term which will survive integration with respect to ϕ is the term $j=0$. We have then

$$n! u^n(0, z) = n! u_0^n(0, z) + \frac{(-1)^n}{4} \int_0^1 c^n(\varrho) \varrho^{n+1} F^n d\varrho, \quad n \neq 0$$

and

$$U^0(0, z) = U_0^0(0, z) + \frac{1}{2} \int_0^1 c^0(\varrho) \varrho F^0 d\varrho.$$

But F is a function of $\beta + z^2$ and so the result (I) follows.

We remark that the apparent difficulty in (I) for $z=0$ is only illusory. For by lemma 1

$$C^n(\varrho) = \varrho^n c^n(\varrho) \quad \text{so that} \quad c^n(\varrho) \varrho^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial (z^2)^n} \cdot \frac{e^{ik\mu}}{\mu}$$

remains bounded for $z=0$. This remark is important for our later results.

3. Axially Symmetric Solutions

For $n = 0$ and $k = 0$ equation (2.4) becomes the equation for axially symmetric potential functions. It is well known that such functions are uniquely determined by their values on the axis of symmetry, provided those functions are analytic. In fact in terms of those functions the solution can be written down explicitly in the form,

$$u(r, z) = \int_{-r}^r \frac{w(0, z + i \varrho)}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} d\varrho. \quad (3.1)$$

These facts can be extended to the general equation (2.4) $_n$, as discussed by HENRICI [4]. Again a solution is determined by its values on $r = 0$, provided these functions are analytic. Further, the solution can again be written down in the form,

$$w(r, z) = \left. \begin{aligned} & \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{k}{2} \right)^{-n+1/2} \frac{1}{r^{2n}} \int_{-r}^r (r^2 - \varrho^2)^{n/2-1/4} J_{n-1/2}(k\sqrt{r^2 - \varrho^2}) \\ & \times w(0, z + i \varrho) d\varrho. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Equation (3.2) shows that actually a complete knowledge of $w(0, \varrho)$ is not necessary, but rather that only $w(0, z + i \varrho) + w(0, z - i \varrho)$ need be known.

We obtain our second fundamental relation by setting $z = 0$ in (3.2), thus obtaining

$$w(r, 0) = \left. \begin{aligned} & \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{k}{2} \right)^{-n+1/2} \frac{1}{r^{2n}} \int_0^r (r^2 - \varrho^2)^{n/2-1/4} J_{n-1/2}(k\sqrt{r^2 - \varrho^2}) \\ & \times [w(0, i \varrho) + w(0, -i \varrho)] d\varrho. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Formula (II) is a Volterra integral equation for the quantity $w(0, i \varrho) + w(0, -i \varrho)$. Its exact solution is not of concern to us as we shall encounter only the case in which the left hand side is zero, and then $w(0, i \varrho) + w(0, -i \varrho)$ will be identically zero.

4. Solution for Small Wave Number

In this section we shall derive integral equations of second kind analogous to those of JONES [3]. These are particularly well suited to approximations for small k . We first derive the equations formally and then show that they do indeed yield solutions of the problems. We content ourselves with the determination of the cosine terms, that is, the functions $U^n(r, z)$, the extension to sine terms being clear.

We begin with the formula (I) and write $z^2 = -\alpha$. Upon integrating (I) n times with respect to α , we obtain

$$\left. \begin{aligned} n! \int_0^z \cdots \int_0^{\tau_1} [U^n(0, i\sqrt{\tau}) - U_0^n(0, i\sqrt{\tau})] d\tau \cdots d\tau_{n-1} \\ - A_0 - A_1 \alpha + \cdots + A_{n-1} \alpha^{n-1} = \frac{(-1)^n}{s} \int_0^1 K_n(\beta) \frac{e^{ik\sqrt{\beta-\alpha}}}{\sqrt{\beta-\alpha}} d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

where the A 's are constants and $K_n(\beta) = Q^n c^n(Q)$, $Q^2 = \beta$. This expression was derived under the assumption that α was real and negative. We observe, however, that all of the quantities which occur in (4.1) are analytic functions of the complex variable α , as long as α is not real and positive. If we choose the branch of $\sqrt{\beta-\alpha}$ which is positive for $\arg \alpha = 0$, $\alpha < \beta$, the integral on the right side of (4.1) is analytic in the complex α -plane cut along the real axis from 0 to 1. Thus $u^n(0, i\sqrt{\alpha})$ will suffer a discontinuity on approach to the real axis, $0 < \alpha < 1$ from above or below. Indeed from (4.1) we have for $\arg \alpha = 0$,

$$\left. \begin{aligned} n! \int_0^z \cdots \int_0^{\tau_1} [u^n(0, i\sqrt{\tau}) + u^n(0, i\sqrt{\tau^-}) - u_0^n(0, i\sqrt{\tau}) - u_0^n(0, i\sqrt{\tau^-})] d\tau \cdots d\tau_{n-1} \\ + 2 \sum_{m=0}^{n-1} A_m \alpha^m = T^n(\alpha; K_n). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Here $u^n(0, i\sqrt{\tau^-})$ denotes the value which $u^n(0, i\sqrt{\tau})$ assumes, when $\arg \tau = 0$, after a clockwise circuit of the origin and $T^n(\alpha; g)$ denotes the operator,

$$\left. \begin{aligned} T^n(\alpha; g) = \frac{(-1)^n}{4} \left\{ i \int_0^\alpha g(\beta) \frac{\sinh k \sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}} d\beta + \int_\alpha^1 g(\beta) \frac{e^{ik\sqrt{\beta-\alpha}}}{\sqrt{\beta-\alpha}} d\beta \right\} \\ - \frac{(-1)^n}{4} \left\{ i \int_0^1 g(\beta) \frac{\sinh k \sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}} d\beta + \int_\alpha^1 g(\beta) \frac{\cosh k \sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\beta-\alpha}} d\beta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Our next observation is based on formula (II). Since $U = 0$ on $z = 0$, $r < 1$ we have also $u^n(r, 0) = 0$ on $r < 1$. Applying (II) to the functions u^n we have accordingly,

$$u^n(0, ir) + u^n(0, -ir) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

since these quantities will be solutions of a homogeneous Volterra equation, but this means that for $\arg \tau = 0$

$$u^n(0, i\sqrt{\tau}) + u^n(0, i\sqrt{\tau^-}) = 0,$$

so that the first iterated integral on the left side of (4.2) is zero. The iterated

integrals of u_0^n are known functions, so that except for the values of the constants A_m the left side of (4.2) may be considered as known. For simplicity we write,

$$n! \int_0^\alpha \cdots \int_0^{\tau_1} u_0^n(0, i\sqrt{\tau}) + u_0^n(0, i\sqrt{\tau^-}) d\tau \cdots d\tau_{n-1} = H^n(\alpha).$$

Now let us denote the two integrals on the right side of (4.3) by $T_1^n(\alpha; g)$ and $T_2^n(\alpha; g)$ respectively so that (4.2) becomes

$$H^n(\alpha) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m \alpha^m = i T_1^n(\alpha; K_n) + T_2^n(\alpha; K_n). \quad (4.4)$$

Essentially the equation (4.4) for $n = 0$ was obtained by JONES [3]. He made the observation that if one finds the inverse of the operator $T_2^n(\alpha; M_n)$ and applies it to (4.4) the product $(T_2^n)^{-1} T_1^n$ is an operator which is simple. It is not essential that one works out the exact details of this process but for completeness we outline the details. If we write $\beta = 1 - \sigma$ and $\alpha = 1 - \gamma$, equation (4.4) becomes

$$H(1 - \gamma) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m (1 - \gamma)^m = \frac{(-1)^n}{2} \left\{ i \int_0^1 K_n(1 - \sigma) \frac{\sinh k \sqrt{\sigma - \gamma}}{\sqrt{\sigma - \gamma}} d\sigma + \int_0^\sigma K_n(1 - \sigma) \frac{\cosh k \sqrt{\gamma - \sigma}}{\sqrt{\gamma - \sigma}} d\sigma \right\}.$$

Now we recognize that the last integral may be inverted with the aid of the Laplace transform to give us

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{2} \left\{ K_n(1 - \sigma) + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 K_n(1 - \gamma) \left[\frac{\sinh k(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\sigma})}{(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\sigma})} + \frac{\sinh k(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\sigma})}{(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\sigma})} \right] d\gamma \right\} \\ - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{\cosh k \sqrt{\sigma - \gamma}}{\sqrt{\sigma - \gamma}} d\gamma \left\{ H^n(1 - \gamma) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m (1 - \gamma)^m \right\}. \end{aligned}$$

Upon writing $\sigma = y^2$, $\gamma = x^2$, we obtain

$$\left. \begin{aligned} & y K_n(1 - y^2) + \frac{i}{\pi} \int_{-1}^{+1} x K_n(1 - x^2) \frac{\sinh k(x + y)}{(x + y)} dx \\ & = (-1)^n \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\cosh k \sqrt{y^2 - x^2}}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left\{ x H^n(1 - x^2) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m (1 - x^2) x \right\} dx, \end{aligned} \right\}$$

The essential fact to observe about (4.5) is that it is a Fredholm integral equation of second kind with a regular kernel which is small when k is small. The method of successive approximations will certainly apply and yield the solution as a power series in k for k sufficiently small. We remark that in the actual mechanical process of computing the successive terms one need not make the transformation to (4.5). Since the operator T_1 involves

$$\frac{\sinh k \sqrt{\alpha - \beta}}{\sqrt{\alpha - \beta}}$$

it will produce terms of one higher degree in k than T_2 . Clearly an iteration process may be based directly on (4.4). That is, if we assume

$$K_n = \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} k^m$$

then it is easily seen that the K_{nm} will be determined by recursion in the form,

$$\int_{\alpha}^1 \frac{K_{nm}(\beta)}{\sqrt{\beta - \alpha}} d\beta = F(K_{n,m-1} \cdots K_{n,0})$$

or inverting this simple integral equation⁵⁾

$$K_{nm}(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\alpha} F(K_{n,m-1} \cdots K_{n,0}) d\beta.$$

In the developments so far there has been no apparent difference between the various values of n . The complication which arises is, of course, contained in the determination of the constants A_m . For this we use the remark made in connection with formula (I) that the quantities $c^n(\rho)$ must vanish like ρ^n when $\rho \rightarrow 0$. Recalling that

$$M_n(\beta) = \beta^{n/2} c^n(\sqrt{\beta})$$

this means we must have $K_n(\beta)$ vanishing as β^n when $\beta \rightarrow 0$, that is,

$$\frac{d^n}{d\beta^n} K_n(\beta) = 0 \quad \text{at} \quad \beta = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

Thus we attack (4.4) as follows. Define functions $P^n(\alpha)$, $Q^{nm}(\alpha)$ as solutions of

$$H^n(\alpha) = T^n(\alpha; P^n), \quad \alpha^m = T^n(\alpha; Q^{nm}), \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

Then choose constants A_0, A_1, \dots, A_{n-1} so that,

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \left[P^n(\alpha) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m Q^{nm}(\alpha) \right] = 0 \quad \text{at} \quad \alpha = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.8)$$

⁵⁾ This is easily done with Laplace transforms.

It would follow then that

$$K_n(\alpha) = P^n(\alpha) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m Q^{nm}(\alpha)$$

would be a solution of (4.4) satisfying the condition (4.6).

The equations (4.8) constitute a system of linear equations for the A_m 's which will have a solution unless the determinant should happen to be zero. If this were so then the homogeneous system corresponding to (4.8) would have a nontrivial solution A_0^0, \dots, A_m^0 . Following the general verification procedure which we present shortly, one would find that if

$$c_n^0(\varrho) = \varrho^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} A_m^0 Q^{nm}(\varrho^2),$$

then

$$U(r, 0, z) = M_n(r, z; c_n^0) \cos n \theta$$

is a solution of equation (1.1), satisfying a radiation condition and vanishing on $z = 0, r < 1$. The uniqueness theorem for the problem of section (1) then states that $\tilde{U}(r, 0, z) = 0$ hence $c_n^0(\varrho)$ is identically zero and finally all the constants A_m^0 must be zero. The contradiction shows that the determinant of system (4.8) cannot vanish.

We turn now to the verification of the formal solution which we have derived. First we observe that the equations (4.7) do indeed have solutions at least for sufficiently small k . Now consider the function,

$$K_n(\alpha) = P^n(\alpha) + \sum_{m=0}^{n-1} A_m Q^{nm}(\alpha)$$

with the constants A_m chosen so as to satisfy equations (4.8). We put $c_n(\varrho) = \varrho^{-n} K_n(\varrho^2)$ and consider the function,

$$U(r, \theta, z) = [U_0^n(r, z) + M_n(r, z; c_n)] \cos n \theta.$$

$U(r, \theta, z)$ will then be a solution of (1.1). Hence it will be an analytic function and lemma 1 applies to yield,

$$U_0^n(r, z) + M_n(r, z; c_n) = r^n u^n(r, z),$$

$u^n(r, z)$ being a solution of equation (2.4). But now u_0^n, u^n , and c_n will be connected by the formula (I). Thus we find corresponding to (4.2)

$$\left. \begin{aligned} n! u^n(0, i\sqrt{\alpha}) + u^n(0, i\sqrt{\alpha^-}) &= n! u_0^n(0, i\sqrt{\alpha}) + u_0^n(0, i\sqrt{\alpha^-}) \\ &+ \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} T^n(\alpha; K_n). \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Note that the n derivatives of $T^n(\alpha; K_n)$ may be formed even at $\alpha = 0$ because we have constructed $K_n(z)$ to vanish like α^n as $\alpha \rightarrow 0$. Now $P^n(\alpha)$ and $Q^{nm}(\alpha)$ are solutions of the integral equations (4.7) with $H^n(\alpha)$ representing the n -fold iterated integral of $-[u_0^n(0, i\sqrt{\alpha}) + u_0^n(0, i\sqrt{\alpha^-})]$. Thus differentiating (4.7) n -times and comparing with (4.9) we deduce,

$$u^n(0, i\sqrt{\alpha}) + u^n(0, i\sqrt{\alpha^-}) = 0. \quad (4.10)$$

We have only to enter the result (4.10) in formula (II) to conclude that $u^n(r, 0) = 0$ for $r < 1$. Thus $U(r, \theta, z)$ is the (unique) n -th Fourier cosine coefficient of the solution to the problem of section 1.

We have thus exhibited a method for calculating approximately any finite number of terms in the expansion of the function $U(r, \theta, z)$ of section 1. The degree to which an actual solution is approximated will depend of course on the ease with which the incident field, $U_0(r, \theta, z)$, may be approximated by a finite number of terms of its Fourier series.

It would perhaps be well to insert here a few remarks concerning the small k approximation. Let us suppose that the function $H^n(\alpha)$ has the form

$$H^n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^n k^m.$$

Then we write

$$H_N^n(\alpha) = \sum_{m=0}^N H_m^n k^m.$$

What the iteration procedure for small k yields then are functions $P_N^n(\alpha)$, $Q_N^{nm}(\alpha)$ such that

$$H_N^n - T^n(\alpha; P_N^n) = O(k^{N+1}); \quad \alpha^n - T^n(\alpha; Q_N^{nm}) = O(k^{N+1}). \quad (4.11)$$

We choose constants A_m^N so that equations (4.8) are satisfied for the approximating functions P_N^n and Q_N^{nm} . Then set

$$c_n^N(\varrho) = \varrho^{-n} P_N^n(\varrho^2) + \sum_{m=0}^n A_m^N Q_N^{mn}(\alpha)$$

and consider

$$U^N(r, \theta, z) = [U_0^n(r, z) + M_n(r, z; c_n^N)] \cos n\theta.$$

Again U^N will be a solution of (1.1) so we can write,

$$U_0^n(r, z) + M_n(r, z; c_n^N) = r^n u_N^n(r, z).$$

Then following our previous procedure we deduce that

$$u_N^n(0, i\sqrt{\alpha}) + u_N^n(0, i\sqrt{\alpha^-}) = O(k^{N+1})$$

which again by formula (II) yields

$$U^N(r, \theta, 0) = 0(k^{N+1}) \quad \text{for } r < 1.$$

Thus solution of equation (4.7) to terms in k^N yields the Fourier coefficients of the function $U(r, \theta, z)$ of section (1) to the same degree of approximation.

5. Diffraction by a Hard Disk

The problem considered by JONES [3] was the diffraction of a sound wave by a hard disk, that is, the condition (1.2) is now replaced by the vanishing of the z -derivative on the disk. In this section we indicate briefly how our methods need to be modified to handle that case. We shall maintain the same notation as in the previous sections, with $U(r, \theta, z)$ to satisfy

$$U_z(r, \theta, 0) = 0 \quad \text{for } r < 1, \quad (5.1)$$

instead of (1.2). Replacing (1.3) we have

$$U(r, \theta, z) = U_0(r, \theta, z) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \phi) \frac{e^{ikR}}{R} \varrho \, d\phi \, d\varrho, \quad (5.2)$$

where $f(\varrho, \phi)$ this time represents the discontinuity of U itself on the disk. If we require that the solution be continuous it follows that

$$f(\varrho, \phi) \rightarrow 0 \quad \text{as } \varrho \rightarrow 1. \quad (5.3)$$

The functions U , U_0 and f can be decomposed into Fourier coefficients as we have done in section 3. In place of (5.2) we get by an integration over z

$$\int_0^z [U(r, \theta, t) - U_0(r, \theta, t)] \, dt + c = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \phi) \frac{e^{ikR}}{R} \varrho \, d\phi \, d\varrho,$$

where c is an arbitrary constant. The results of section 3 now carry over with minor modification. For example, when $r = 0$

$$\int_0^z [U(0, \theta, t) - U_0(0, \theta, t)] \, dt + c = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \phi) \frac{e^{ik\mu}}{\mu} \varrho \, d\phi \, d\varrho,$$

where $\mu^2 = \varrho^2 + z^2$. If we write

$$\int_0^{2\pi} U(0, \theta, t) \, d\theta = u^0(t), \quad \int_0^{2\pi} U_0(0, \theta, t) \, d\theta = u_0^0(t) \quad \text{and} \quad \int_0^{2\pi} f(\varrho, \phi) \, d\phi = c_0.$$

This last equation becomes

$$\int_0^z [u^0(t) - u_0^0(t)] dt + c = \frac{1}{2} \int_0^1 c_0(\varrho) \frac{e^{ik\mu}}{\mu} d\varrho. \quad (5.4)$$

We now continue equation (5.4) into the domain of complex variables and we find that if $z \rightarrow iy$ ($0 < y < 1$) we get

$$\int_0^y [u^0(t) - u_0^0(t)] dt + c = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 c_0(\varrho) \varrho \frac{e^{ik\sqrt{y^2 - \varrho^2}}}{i\sqrt{y^2 - \varrho^2}} d\varrho + \int_y^1 c_0(\varrho) \frac{e^{ik\sqrt{\varrho^2 - y^2}}}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} \varrho d\varrho \right],$$

while if $z \rightarrow -iy$ ($0 < y < 1$) we get

$$\int_0^{-iy} [u^0(t) - u_0^0(t)] dt + c = \frac{1}{2} \left[\int_0^y c_0(\varrho) \frac{\varrho e^{ik\sqrt{y^2 - \varrho^2}}}{i\sqrt{y^2 - \varrho^2}} d\varrho + \int_y^1 c_0(\varrho) \frac{e^{ik\sqrt{\varrho^2 - y^2}}}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} \varrho d\varrho \right].$$

Upon adding these two equations and making some trivial changes of variables, we get

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^y [u^0(it) - u^0(-it) - u_0^0(it) + u_0^0(-it)] i dt + 2c \\ & \quad - \left[\int_0^1 \frac{i \sinh k \sqrt{y^2 - \varrho^2}}{\sqrt{y^2 - \varrho^2}} \varrho c_0(\varrho) d\varrho + \int_y^1 \frac{\cos k \sqrt{\varrho^2 - y^2}}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} c_0(\varrho) \varrho d\varrho \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Now the boundary condition (5.1) implies, according to the representation (3.2), that $u^0(it) - u^0(-it)$ is a constant c_1 . Hence equation (5.4) assumes the form

$$\begin{aligned} c_1 y + 2c + \int_0^y [u_0^0(-it) - u_0^0(it)] i dt \\ = \left[\int_0^1 \frac{i \sinh k \sqrt{y^2 - \varrho^2}}{\sqrt{y^2 - \varrho^2}} \varrho c_0(\varrho) d\varrho + \int_y^1 \frac{\cos k \sqrt{\varrho^2 - y^2}}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} \varrho c_0(\varrho) d\varrho \right]. \end{aligned}$$

The constants c and c_1 are evaluated from the requirements that $c_0(\varrho) \rightarrow 0$, $\varrho \rightarrow 1$ and $c_0(\varrho)$ is finite at $\varrho = 0$. The equations involving the higher angular harmonics may be derived in much the same manner and indeed involve only further integration with respect to the variable $z^2 - (-y^2)$ but we shall not pursue this matter further.

6. Incident Plane Wave

We include here some numerical results for the case of an incident plane wave for Dirichlet boundary conditions on the disk. There is clearly no loss

of generality in assuming that the plane wave is incident upon the disk from the side $z < 0$ and that its propagation normal lies in the $x - z$ plane. Let γ denote the angle which this normal makes with the positive z axis. The incident field in rectangular coordinates is then

$$e^{ik(x \sin \gamma + z \cos \gamma)}$$

and in cylindrical coordinates it has the form $e^{ik(r \sin \gamma \cos \theta + z \cos \gamma)}$. Hence

$$U(r, \theta, z) = e^{ik(r \sin \gamma \cos \theta + z \cos \gamma)} + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta') \frac{e^{ikR}}{R} \varrho d\theta' d\varrho.$$

On the axis $r = 0$, this representation assumes the form

$$U(0, \theta, z) = e^{ikz \cos \gamma} + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta') \frac{e^{ik\mu}}{\mu} \varrho d\theta' d\varrho.$$

Or, upon integrating over θ and θ' , we get

$$u_0^0(0, z) = e^{ikz \cos \gamma} + \frac{1}{2} \int_0^1 c^0(\varrho) \frac{e^{ik\mu}}{\mu} \varrho d\varrho.$$

If we continue z into the domain of complex variables and use the fact that

$$u^0(0, i\gamma) + u^0(-i\gamma) = 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

we get

$$\left. \begin{aligned} \cosh(ky \cos \gamma) + \frac{1}{2} \int_y^1 \frac{\cos k \sqrt{t^2 - y^2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} t c^0(t) dt \\ + \frac{i}{2} \int_0^1 \frac{\sinh k \sqrt{y^2 - t^2}}{\sqrt{y^2 - t^2}} t c^0(t) dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Upon rewriting equation (6.1) in the form which we described in section 4, we obtain

$$\left. \begin{aligned} G^0(\sigma) + \frac{i}{\pi} \int_0^1 G^0(\beta) \left[\frac{\sinh k(\beta + \sigma)}{\beta + \sigma} + \frac{\sinh k(\beta - \sigma)}{\beta - \sigma} \right] d\beta \\ = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \varrho d\varrho \cos(k \sqrt{1 - \varrho^2} \cos \gamma) \frac{\cosh(k \sqrt{\sigma^2 - \varrho^2})}{\sqrt{\sigma^2 - \varrho^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Here $G^0(\sigma) = \sqrt{1 - y^2} c^0(y)$ and $\sigma = \sqrt{1 - y^2}$. Upon applying the Neumann

iteration procedure we find for small k

$$\begin{aligned} c^0(\varrho) = & -\frac{4}{\pi \sqrt{1-\varrho^2}} \left\{ 1 - \frac{2i k}{\pi} + k^2 \left[\frac{\sin^2 \gamma}{2} + \varrho^2 \cos^2 \gamma - \frac{\varrho^2}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right] \right. \\ & - i k^3 \left[\frac{\cos^2 \gamma}{3\pi} + \frac{7}{9\pi} - \frac{\varrho^2}{3\pi} - \frac{8}{\pi^3} \right] \\ & + k^4 \left[\frac{\cos^4 \gamma}{72} (8\varrho^4 - 4\varrho^2 - 1) + \frac{\cos^2 \gamma}{12} (1 + \varrho^2 - 2\varrho^4) \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} (1 - 2\varrho^2 + \varrho^4) - \frac{1}{3\pi^2} (6 - 2\varrho^2 + 2\cos^2 \gamma) \right. \\ & \left. \left. + \frac{16}{\pi^4} \right] \right\} + O(k^5). \end{aligned}$$

In the limit $k_z = k$ (normal incidence) this result coincides with the one which BOUWKAMP [1] obtained.

For the first harmonic, we obtain the equation

$$\left. \begin{aligned} & -4i k \sin \gamma \left[y \frac{\sinh k_z y}{k_z} - \frac{\cosh k_z y}{k_z^2} \right] + A_1^1 \\ & - \int_y^1 \frac{\cos k \sqrt{t^2 - y^2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} t^2 c^1(t) dt - i \int_0^1 \frac{\sinh k \sqrt{y^2 - t^2}}{\sqrt{y^2 - t^2}} t^2 c^1(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

while for the second harmonic, we get

$$\left. \begin{aligned} & \int_y^1 \frac{\cos k \sqrt{t^2 - y^2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} t^2 c^2(t) dt + i \int_0^1 \frac{\sinh k \sqrt{y^2 - t^2}}{\sqrt{y^2 - t^2}} t^2 c^2(t) dt \\ & = 4 k_z^2 \left[\frac{y^2 \cosh k_z y}{k_z^2} - \frac{3 y \sinh k_z y}{k_z^3} + \frac{3 \cosh k_z y}{k_z^4} \right] + A_1^2 A_2^2 y^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Here the A 's are constants of integration. We observe that for all three cases which we consider here, that is, the zeroth, the first and the second harmonics, we are always solving the same type of integral equation, the only change being in the form of the non-homogeneous term. Equations (6.2) and (6.3) are solved in the same manner which we solved (6.2) save for the fact that we have to evaluate the constants of integration. These are evaluated by the requirement that $c^1(t)$ and $c^2(t)$ are finite at $t = 0$. We omit the details and merely give the results. We have

$$c^1(\varrho) = -\frac{8i k \varrho \sin \gamma}{\pi \sqrt{1-\varrho^2}} \left\{ 1 + \frac{k^2}{6} [(2\varrho^2 - 1) \cos^2 \gamma - (1 + \varrho^2)] \right\} + O(k^4),$$

$$c^2(\varrho) = -\frac{8 k^2 \varrho^2 \sin^2 \gamma}{3 \pi \sqrt{1-\varrho^2}} + O(k^3).$$

The terms are calculated to different orders of k so that it may be possible to calculate the scattering cross section to terms correct to the order k^4 if need be.

The work on this paper was sponsored by the Office of Ordnance Research, US Army and the US Air Force Office of Scientific Research.

REFERENCES

- [1] BOUWKAMP, C. J., *Diffraction Theory*, Rep. Progr. Physics, 17, 35-100 (1954).
- [2] COPSON, E. T., *On the Problem of the Electrified Disk*, Proc. Edinburgh math. Soc. 3, 14-19 (1947).
- [3] JONES, D. S., *A New Method for Calculating Scattering, with Particular Reference to the Circular Disk*, Comm. pure and appl. Math. 9, 713-746 (1956).
- [4] HENRICI, P., *Zur Funktionentheorie der Wellengleichung*, Comm. math. Helv. 22, 235-296 (1953).
- [5] HEINS, A. E., and MACCAMY, R. C., *Axially Symmetric Solutions of Elliptic Differential Equations*, Tech. Rep. No. 24, AFOSR Contract No. AF 49(638)-22 (Carnegie Institute of Technology).

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass das Problem, die Beugung einer ebenen Welle an einer kreisförmigen Öffnung oder Scheibe zu bestimmen, auf die Lösung von regulären Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art zurückgeführt werden kann. Die Lösungen dieser Integralgleichungen liefern uns für die Scheibe im Falle der Neumannschen Bedingung die radiale Variation der Unstetigkeiten der Wellenfunktion und im Dirichletschen Falle die Unstetigkeiten ihrer normalen Ableitung. Ist das Produkt von Öffnungsradius und Wellenzahl klein, so können die Integralgleichungen gelöst werden. Für die Ableitung der Integralgleichungen verwenden wir einerseits die Poissonsche Darstellung für die Wellenfunktion und andererseits die Fortsetzung der Helmholtzschen Darstellung in die komplexe Ebene.

(Received: July 25, 1959.)

Solution of the Poisson Equation Related to a Boundary-Value Problem for the Sphere

By EVAN E. JONES, Nottingham, England¹⁾

Introduction

There are three boundary-value problems associated with singly-connected regions fundamental to the theory of potential ([1], p. 213)²⁾. The interior-type problems associated with the region V bounded externally by a closed surface S having continuous curvature are (i) the Dirichlet problem, in which a function, harmonic in V , is required, having prescribed continuous boundary values on S , (ii) the Neumann problem, in which a function, harmonic in V , is required, having prescribed continuous boundary values for its normal derivative on S , (iii) the problem usually referred to as 'the heat conduction problem', where a function, harmonic in V , is required, having continuous boundary values for itself and its normal derivative on S , which satisfy a given linear relation. In conjunction with these interior-type problems are the exterior-type problems where functions, harmonic in the infinite region external to S , are required, satisfying similar boundary conditions, with prescribed forms at infinity. A more general type of boundary-value problem is the exterior-interior type, usually referred to as 'the electrostatic dielectric problem' ([2], p. 194), in which harmonic functions are required in regions external and internal to a surface S , satisfying two boundary conditions involving the continuity of the functions and a prescribed discontinuity in the normal derivatives on S .

A solution to the last mentioned problem has been determined by YEH et al. [3], when S is the surface of a sphere, in terms of harmonic functions having prescribed singularities in the regions external and internal to S . The solution is stated in the form of a sphere theorem, which is the culmination of less general theorems by various authors. The solutions of the first three boundary-value problems for the sphere appear as particular cases of the general result.

It is proposed in this paper to present a solution to a similar type of problem with controlling differential equations of the Poisson type. The range of physical problems which can be solved is thus considerably extended.

¹⁾ University of Nottingham, Dept. of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 272.

The Solution of the Problem

It is required to determine the functions $\varphi_e(r, \theta, \omega)$, $\varphi_i(r, \theta, \omega)$, having prescribed singularities, and satisfying the Poisson differential equations

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_e &= f_e(r, \theta, \omega), \\ \nabla^2 \varphi_i &= f_i(r, \theta, \omega), \end{aligned} \quad (2)$$

in the regions V_e , V_i , respectively external and internal to S , the spherical surface of radius a , with centre at the pole of spherical polar coordinates (r, θ, ω) . The functions $\varphi_e(r, \theta, \omega)$, $\varphi_i(r, \theta, \omega)$ and their derivatives $\partial\varphi_e/\partial r$, $\partial\varphi_i/\partial r$, normal to S , are required to satisfy the boundary conditions

$$\varphi_e = \varphi_i, \quad (3)$$

$$\alpha_e \frac{\partial\varphi_e}{\partial r} + \beta_e \varphi_e = \alpha_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial r} + \beta_i \varphi_i + \psi. \quad (4)$$

In (1) and (2) the functions $f_e(r, \theta, \omega)$, $f_i(r, \theta, \omega)$ are together with their first partial derivatives assumed to be continuous in the regions V_e , V_i respectively. Also, in (4), the coefficients α_e , β_e , α_i , β_i are given real constants, and $\psi(\theta, \omega)$ is a prescribed continuous function on S .

The solutions are developed in the forms $\varphi_e = \varphi_{oe} + \Phi_e$, $\varphi_i = \varphi_{oi} + \Phi_i$. Here $\varphi_{oe}(r, \theta, \omega)$ {or $\varphi_{oi}(r, \theta, \omega)$ } is a particular integral of (1) {or (2)}, which together with its first partial derivatives are continuous in $V_e + S$ {or $V_i + S$ } except at a finite number of singularities prescribed in V_e {or V_i }, and $\Phi_e(r, \theta, \omega)$ {or $\Phi_i(r, \theta, \omega)$ } is a harmonic function, being single-valued and continuous in $V_e + S$ {or $V_i + S$ }. The particular integrals φ_{oe} and φ_{oi} are either prescribed functions, or in general can be determined as the sum of two types of functions. Thus

$$\varphi_{oe} = \varphi_{oe}^* + \varphi_{oe}^{**}, \quad \varphi_{oi} = \varphi_{oi}^* + \varphi_{oi}^{**}, \quad \text{where} \quad \varphi_{oe}^*(r, \theta, \omega), \quad \varphi_{oi}^*(r, \theta, \omega)$$

are Newtonian potentials due to volume distributions of density $-f_e/4\pi$, $-f_i/4\pi$ in V_e , V_i respectively ([1], p. 150) of the form

$$\varphi_{oe}^* = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \frac{f_e}{R} dV, \quad \varphi_{oi}^* = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_i} \frac{f_i}{R} dV,$$

and $\varphi_{oe}^{**}(r, \theta, \omega)$ is a harmonic function having the prescribed singularities in V_e (including infinity), and $\varphi_{oi}^{**}(r, \theta, \omega)$ is a harmonic function having the prescribed singularities in V_i . It is noticed that the functions φ_{oe} , φ_{oi} and their normal derivatives $\partial\varphi_{oe}/\partial r$, $\partial\varphi_{oi}/\partial r$ are continuous on to S .

The functions $\varphi_{oe}^*(r, \theta, \omega)$, $\varphi_{oi}^*(r, \theta, \omega)$ are readily determined in certain special cases. Thus if $f_e(r, \theta, \omega)$ and $f_i(r, \theta, \omega)$ are functions of one space coor-

dinate only the differential equations (1) and (2) can be integrated directly to yield particular integrals, e.g. when f_e and f_i are functions of the radial coordinate r only, then

$$\varphi_{oe}^* = -\frac{1}{r} \int_a^r f_e(r) r^2 dr - \int_r^\infty f_e(r) r dr,$$

and

$$\varphi_{oi}^* = -\frac{1}{r} \int_0^r f_i(r) r^2 dr - \int_r^a f_i(r) r dr.$$

On substituting for $\varphi_{oe}(r, \theta, \omega)$ and $\varphi_{oi}(r, \theta, \omega)$, and their normal derivatives on S into the boundary conditions of (3) and (4), it is possible to write

$$(\Phi_e - \Phi_i)_S = g(\theta, \omega), \tag{5}$$

$$\left(\alpha_e \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + \beta_e \Phi_e - \alpha_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \beta_i \Phi_i\right)_S = h(\theta, \omega), \tag{6}$$

where by definition

$$(\varphi_{oi} - \varphi_{oe})_S = g(\theta, \omega), \tag{7}$$

$$\left(\alpha_i \frac{\partial \varphi_{oi}}{\partial r} + \beta_i \varphi_{oi} + \psi - \alpha_e \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial r} - \beta_e \varphi_{oe}\right)_S = h(\theta, \omega). \tag{8}$$

The functions $g(\theta, \omega)$, $h(\theta, \omega)$ are continuous on S , hence by use of a known solution of the Dirichlet problem it is possible to form two unique functions $g_i(r, \theta, \omega)$, $h_i(r, \theta, \omega)$, which are continuous in $V_i + S$ and harmonic V_i , having $g(\theta, \omega)$, $h(\theta, \omega)$ respectively as boundary values on S . The functions are determined in the form of Poisson integrals ([1], p. 240), such that

$$g_i(r, \theta, \omega) = \frac{a^2 - r^2}{4 \pi a} \int_S \frac{g(\theta', \omega')}{R^3} dS, \tag{9}$$

and

$$h_i(r, \theta, \omega) = \frac{a^2 - r^2}{4 \pi a} \int_S \frac{h(\theta', \omega')}{R^3} dS, \tag{10}$$

where R is the distance from the point (r, θ, ω) in V_i to the point (a, θ', ω') on S .

The harmonic functions $\Phi_e(r, \theta, \omega)$ and $\Phi_i(r, \theta, \omega)$ occurring in the complete solutions for φ_e and φ_i respectively are determined by the equations

$$(\alpha_i + \alpha_e) \Phi_e(r) = \frac{a \alpha_i}{r} g_i\left(\frac{a^2}{r}\right) - \frac{a}{r} I_i\left(\frac{a^2}{r}\right), \tag{11}$$

$$(\alpha_i + \alpha_e) \Phi_i(r) = -\alpha_e g_i(r) - I_i(r), \tag{12}$$

where

$$I_i(r) = \int_0^1 \{a h_i(r t) + v g_i(r t)\} t^{\mu-1} dt, \quad (13)$$

in which

$$\mu = \frac{\alpha_e + a(\beta_i - \beta_e)}{\alpha_i + \alpha_e}, \quad (14)$$

$$v = \frac{\alpha_i \alpha_e - a(\beta_i \alpha_e + \beta_e \alpha_i)}{\alpha_i + \alpha_e}, \quad (15)$$

and for simplicity of expression $g_i(r) \equiv g_i(r, \theta, \omega)$, etc. If $g_e(r, \theta, \omega)$ and $h_e(r, \theta, \omega)$ are harmonic functions defined in V_e with boundary values $g(\theta, \omega)$ and $h(\theta, \omega)$ on S , then by the Kelvin inversion transformation ([1], p. 231), it is seen that

$$g_e(r, \theta, \omega) = \frac{a}{r} g_i\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \omega\right), \quad (16)$$

$$h_e(r, \theta, \omega) = \frac{a}{r} h_i\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \omega\right). \quad (17)$$

In general if $g_i(r) \simeq 0(1)$ for $r \rightarrow 0$, then $g_e(r) \simeq 0(1/r)$ for $r \rightarrow \infty$. Similarly for the function pair $h_i(r)$ and $h_e(r)$. Alternative forms for the solutions of (11) and (12) exist as

$$(\alpha_i + \alpha_e) \Phi_e(r) = \alpha_i g_e(r) - I_e(r), \quad (18)$$

$$(\alpha_i + \alpha_e) \Phi_i(r) = -\frac{a \alpha_e}{r} g_e\left(\frac{a^2}{r}\right) - \frac{a}{r} I_e\left(\frac{a^2}{r}\right), \quad (19)$$

where

$$I_e(r) = \int_1^\infty \{a h_e(r t) + v g_e(r t)\} t^{-\mu} dt, \quad (20)$$

and thus $I_e(r) = a/r I_i(a^2/r)$ by comparison of (13) and (20).

These results hold in the given forms in general when $\mu > 0$, and in particular for $\mu = 0$, providing

$$\int_S \{a h(\theta, \omega) + v g(\theta, \omega)\} dS = 0. \quad (21)$$

On integration by parts it is possible to extend the range of existence of the solutions to negative values of μ , with the exception of the negative integers $\mu = -1, -2, \dots$. Thus, for example, considering the integral

$$\int_0^1 h_i(r t) t^{\mu-1} dt$$

of (13) defined for $\mu > 0$, it is possible to integrate by parts leading to the expression

$$\frac{1}{\mu} h_i(r) - \frac{r}{\mu} \int_0^1 h'_i(r t) t^\mu dt,$$

and consider this as the continuation of the original integral to the range $-1 < \mu < 0$. Repeated integration by parts will further extend the range of application.

The Verification of the Solution

In the first instance it is necessary to prove that $\Phi_i(r)$ is a harmonic function without singularities in V_i , and that $\Phi_e(r)$ is a harmonic function without singularities in V_e , being regular at infinity.

The Poisson integral $g_i(r)$ of (9) is continuous in $V_i + S$ and harmonic in V_i , having the development $g_i(r) = g_i(0) + O(r)$ for $r \leq b < a$. Thus $(1/r) g_i(a^2/r)$ is continuous in $V_e + S$ and harmonic in V_e , decreasing to zero at infinity to the order $O(r^{-1})$. Similarly for $h_i(r)$ and $(1/r) h_i(a^2/r)$.

The integrand of $I_i(r)$ of (13) is harmonic in V_i and continuous in $V_i + S$ for $0 < t \leq 1$. The integral exists and is uniformly convergent for $r \leq a$ if $\mu \geq 0$, with the restriction that $a h_i(0) + r g_i(0) = 0$ when $\mu = 0$, which is consistent with (21). By application of a modified form of Harnack's first theorem ([1], p. 248) it follows that $I_i(r)$ is harmonic in V_i , continuous in $V_i + S$. Similarly $I_i(a^2/r)$ is harmonic in V_e , continuous in $V_e + S$, and decreases to zero at infinity to the order $O(r^{-1})$.

From (11) and (12) it is thus seen that $\Phi_e(r)$ and $\Phi_i(r)$ have the required harmonicity properties in V_e and V_i respectively.

Secondly it is required to prove that $\Phi_e(r)$ and $\Phi_i(r)$, and their normal derivatives on S , satisfy the boundary conditions of (5) and (6). In this connection it is required firstly to establish that these functions and derivatives are continuous on to the boundary S attaining finite limiting values there.

Since $g_i(r)$ can be written as the sum of the potentials of a simple layer and double layer distribution with continuous density proportional to $g(\theta, \omega)$, then $g_i(r)$ is continuous on to S with a limiting values $g(\theta, \omega)$ ([4], p. 245). Also the normal derivative $g'_i(r)$ attains a limit on S as $r \rightarrow a$ in the region V_i , if the limits of the normal derivatives of the above-mentioned potentials exist. A sufficient condition for this is that the function $g(\theta, \omega)$ is not merely continuous, but has continuous first and second derivatives with respect to the space coordinates ([4], p. 151). Similarly for the function $h_i(r)$ and normal derivative $h'_i(r)$.

Since $I_i(r)$ is uniformly convergent in $V_i + S$ for $\mu \geq 0$ it follows that $I_i(r)$ is continuous in this closed region, and in fact attains the limiting value $I_i(a)$

on S . Again as a consequence of Harnack's first theorem it is possible to form $I'_i(r)$ by differentiating $I_i(r)$ with respect to r under the integral sign. On integration by parts it can readily be shown that

$$I'_i(r) = \frac{1}{r} \{a h_i(r) + r g_i(r)\} - \frac{\mu}{r} I_i(r)$$

for $r < a$, $\mu \geq 0$. Since all functions on the right hand side of this equation are continuous on to S , then so is $I'_i(r)$.

A similar argument shows that $g_i(a^2/r)$, $h_i(a^2/r)$, $I_i(a^2/r)$, and their radial derivatives, are continuous on to S as $r \rightarrow a$ in the region V_e .

On substitution for $\Phi_e(r)$, $\Phi_i(r)$, and their radial derivatives, from (11) and (12) into (5) and (6), and allowing $r \rightarrow a$, it can be verified that the boundary conditions of (5) and (6) are satisfied.

It has thus been shown that the expressions (11) and (12), or (18) and (19), lead to solutions of the boundary-value problem.

Arbitrariness in the Choice of Particular Integrals

The particular integrals $\varphi_{oe}(r)$ and $\varphi_{oi}(r)$ of the differential equations (1) and (2) consist partly of harmonic functions $\varphi_{oe}^{**}(r)$, $\varphi_{oi}^{**}(r)$ having prescribed singularities in V_e and V_i respectively. It is required to consider the case with $\varphi_{oe}^{**}(r)$, $\varphi_{oi}^{**}(r)$ replaced by $\varphi_{oe}^{**}(r) + \Omega_e(r)$, $\varphi_{oi}^{**}(r) + \Omega_i(r)$, where $\Omega_e(r)$, $\Omega_i(r)$ are harmonic functions without singularities in V_e , V_i respectively. On forming the altered values of $g(\theta, \omega)$ and $h(\theta, \omega)$ from (7) and (8), it is possible to form the functions

$$G_i(r) = g_i(r) + \Omega_i(r) - \frac{a}{r} \Omega_e\left(\frac{a^2}{r}\right),$$

$$H_i(r) = h_i(r) + \alpha_e \frac{\partial}{\partial r} \Omega_e\left(\frac{a^2}{r}\right) - \frac{\beta_e a}{r} \Omega_e\left(\frac{a^2}{r}\right) + \frac{\alpha_i r}{a} \frac{\partial \Omega_i(r)}{\partial r} + \beta_i \Omega_i(r),$$

where $G_i(r)$, $H_i(r)$ are the altered values of $g_i(r)$, $h_i(r)$ respectively. These functions are harmonic without singularities in V_i having the required prescribed boundary values on S . They are thus uniquely determined.

If the altered values of $\Phi_e(r)$, $\Phi_i(r)$ are $\Phi_e^*(r)$ and $\Phi_i^*(r)$ respectively, then from (11) and (12) it can be shown that

$$\Phi_e^*(r) = \Phi_e(r) - \Omega_e(r), \quad \Phi_i^*(r) = \Phi_i(r) - \Omega_i(r).$$

Since the altered values of $\varphi_e(r)$ and $\varphi_i(r)$ are $\varphi_{oe}(r) + \Omega_e(r) + \Phi_e^*(r)$ and $\varphi_{oi}(r) + \Omega_i(r) + \Phi_i^*(r)$ respectively, then the addition of a function harmonic without singularities in V_e {or V_i } to the particular integral $\varphi_{oe}(r)$ {or $\varphi_{oi}(r)$ } will not affect the value of the solution $\varphi_e(r)$ {or $\varphi_i(r)$ }. The choice of particular integral is arbitrary to this extent – a suitable choice may however simplify the analysis leading to the solution of the problem.

Solution in Terms of Prescribed Singularities

The prescribed singularities are included entirely in the parts $q_{oe}^{**}(r)$ and $q_{oi}^{**}(r)$ of the particular integrals $q_{oe}(r)$ and $q_{oi}(r)$. Using the symbol $(*)$ for all functions corresponding to the parts $q_{oe}^{*}(r)$ and $q_{oi}^{*}(r)$ of the particular integrals it is possible to form

$$g_i(r) = g_i^{*}(r) + \frac{a}{r} q_{oi}^{**}\left(\frac{a^2}{r}\right) - q_{oe}^{**}(r),$$

$$h_i(r) = h_i^{*}(r) - \frac{\alpha_e r}{a} \cdot \frac{\partial q_{oe}^{**}(r)}{\partial r} - \beta_e q_{oe}^{**}(r) - \alpha_i \frac{\partial}{\partial r} q_{oi}^{**}\left(\frac{a^2}{r}\right) + \frac{\beta_i a}{r} q_{oi}^{**}\left(\frac{a^2}{r}\right).$$

The functions $g_i(r)$, $h_i(r)$ are harmonic without singularities in V_i , and on S are consistent with the boundary conditions of (7) and (8) respectively. They are thus uniquely determined, and on substitution into (11) and (12) yield the results

$$\Phi_e(r) = \Phi_e^{*}(r) + \psi_e(r), \quad \Phi_i(r) = \Phi_i^{*}(r) + \psi_i(r),$$

where $\psi_e(r)$ and $\psi_i(r)$ are functions identical (but for a change in notation) with the perturbation potentials of YEH et al. [3].

Some Particular Cases

The examples listed in this section refer to problems controlled by differential equations of the Poisson type. For the internal-type problems it is assumed that (3) and $q_e(r)$ are redundant, and for external-type problems (3) and $q_i(r)$ are redundant.

$[\alpha_e = \beta_e = \alpha_i = 0, \beta_i = 1]$ Internal Dirichlet problem with $\Phi_i(r) = -h_i(r)$, and $(\varphi_i)_S = -\psi(\theta, \omega)$.

$[\alpha_i = \beta_i = \alpha_e = 0, \beta_e = 1]$ External Dirichlet problem, with $\Phi_e(r) = h_e(r)$, and $(\varphi_e)_S = \psi(\theta, \omega)$.

The solutions of the Dirichlet problem are uniquely determined ([4, pp. 183, 186]). They have application to the electrostatic field theory for conductors in the presence of volume charge distributions, and heat conduction with distributed heat generation and prescribed surface temperature on S .

$[\alpha_e = \beta_e = \beta_i = 0, \alpha_i = 1]$ Internal Neumann problem, with $\mu = \nu = 0$. The function $\Phi_i(r)$ is given by (12) with the restriction

$$\int_S h(\theta, \omega) dS = 0, \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_S = -\psi(\theta, \omega).$$

$[\alpha_i = \beta_e = \beta_i = 0, \alpha_e = 1]$ External Neumann problem, with $\nu = 0, \mu = 1$. The function $\Phi_e(r)$ is given by (11), with $(\partial \varphi_e / \partial r)_S = \psi(\theta, \omega)$.

The solution of the internal Neumann problem is uniquely determined to within an additive arbitrary constant, and the external problem has an unique solution ([4], pp. 183, 186). Application is possible to heat conduction problems involving distributed heat generation with prescribed surface temperature flux on S .

$[\alpha_e - \beta_e = 0, \alpha_i = 1, \beta_i = h]$ Internal third boundary-value problem, with $v = 0, \mu = a h$. The boundary condition is $\partial \varphi_i / \partial r + h \varphi_i = -\psi(\theta, \omega)$, and $\Phi_i(r)$ is given by (12).

$[\alpha_i - \beta_i = 0, \alpha_e = 1, \beta_e = -h]$ External third boundary-value problem, with $v = 0, \mu = 1 + a h$. The boundary condition is $\partial \varphi_e / \partial r - h \varphi_e = \psi(\theta, \omega)$, and $\Phi_e(r)$ is given by (11).

The third boundary-value problems have unique solutions if $h > 0$. The problems apply to heat conduction with distributed heat generation under a surface condition with temperature determined by Newton's Law of Cooling. The constant h is the radiation coefficient.

$[\beta_i = \beta_e = 0]$ These problems are of the internal-external types, and apply to dielectric potential problems with distributed volume charge, magnetic problems with distributed permanent and induced magnetism, and heat conduction problems involving two media of different conductivities in intimate contact over the spherical surface S ([5], p. 17). Here $v = \alpha_i \mu, \mu = \alpha_e / (\alpha_i + \alpha_e)$, and since in practice $\mu > 0$ the uniqueness of the solutions is secured. If $\alpha_i = \alpha_e = 1$, solutions are obtained for gravitational problems involving distributed mass.

REFERENCES

- [1] O. D. KELLOGG, *Foundations of Potential Theory* (Springer, Berlin 1929).
- [2] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York N.Y. 1941).
- [3] G. C. K. YEH, J. MARTINEK, and G. S. S. LUDFORD, *ZAMM* 36, 111-116 (1956).
- [4] W. J. STERNBERG and T. L. SMITH, *The Theory of Potential and Spherical Harmonics*, Math. Expos. No. 3 (Univ. Toronto Press, 1944).
- [5] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford Univ. Press, 1950).

Zusammenfassung

Es werden Lösungen der Poissonschen Differentialgleichungen in den Bereichen innerhalb und ausserhalb einer Sphäre, die gewisse Grenzbedingungen an der Fläche der Sphäre erfüllen, gesucht. Solche Lösungen werden schliesslich als Funktion partikulärer Integrale der Differentialgleichungen ausgedrückt. Ihre Anwendung auf die theoretische Physik wird anschliessend behandelt.

(Received: October 19, 1959.)

Zur Thermodynamik teilweise wässriger Hagelkörner

VON ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos¹⁾

1. Einleitung

Erste Experimente im Hagelversuchskanal [1]²⁾ deckten ein Phänomen auf, das scheinbar nie eingehender beobachtet und bei allen bekannten Hagel- oder Vereisungstheorien nicht in Rechnung gestellt wurde: das an bestimmte atmosphärische Bedingungen gebundene Auftreten von Eiswassergemischen als Anlagerungen an bereits vorhandene Eispartikeln oder an künstliche Objekte [2].

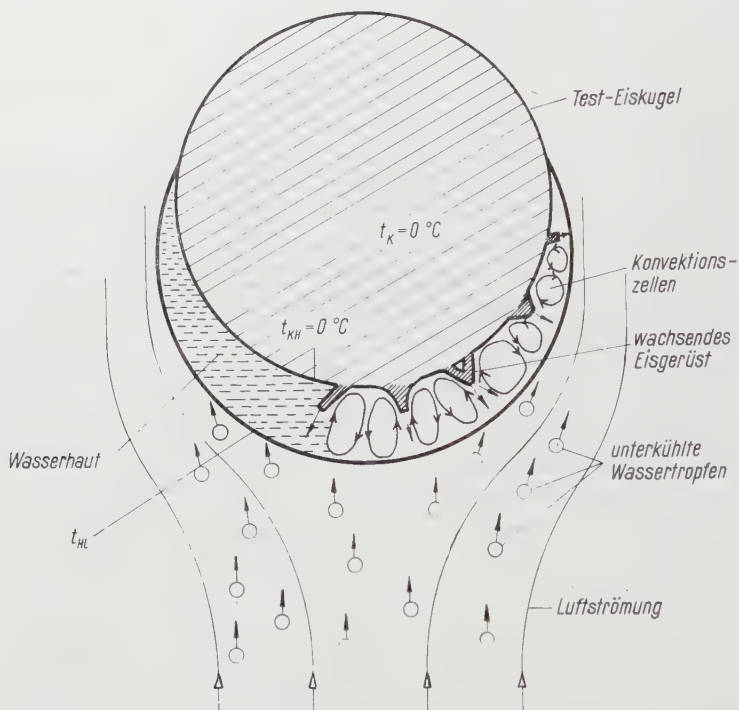
Dieser Effekt ist an einen ungenügenden Wärmeaustausch vom vereisenden Objekt an eine umgebende, kühle Atmosphäre (Temperatur unter 0°C) gebunden, der es nicht gestattet, durch Abtransport der Gefrierwärme alles anfallende, unterkühlte Wasser zu verfestigen. Die Folge davon ist, dass jeweils überschüssiges Wasser auftritt, welches unter Umständen durch den Luftstrom mitgerissen wird oder sonstwie abtropft. Dies kann manchmal auch beobachtet werden, der Schluss jedoch, dass es sich dabei um alles nichtgefrierende Wasser handle (LUDLAM [3]), ist irrig.

Die Tatsache, dass sich bei gewissen Verhältnissen auf einem vereisenden Objekt eine Wasserhaut bilden kann, die von innen her so weit gefriert, bis die Objekttemperatur 0°C erreicht, führt zu einem ganz speziellen, im folgenden näher erläuterten Gefriermechanismus. Die Temperatur an der innern Grenzfläche der Wasserschicht ist im stationären Fall aus thermodynamischen Gründen auf 0°C (siehe Figur 1). An der Grenzfläche Wasserhaut – umgebende Luft wird das Wasser jedoch unterkühlt. Das Gefrieren kann von aussen her nicht stattfinden, da normalerweise entsprechende Eisbildungskerne fehlen. Zusätzlich zum Temperaturgradienten, beeinflusst durch die Luftströmung, treten nun wirbelartige Zirkulationen in der Wasserhaut selber auf – vielleicht kann man sogar von Konvektionszellen sprechen – die das unterkühlte Wasser örtlich zur Eis-Wasser-Grenzfläche transportieren. Dies ermöglicht ein schlagartiges Wachstum von Eislamellen von innen nach aussen. In diesem Momente wäre auch ein Gefrieren der äussern Begrenzung der Wasserhaut möglich – es kommt jedoch nicht dazu, wenn sich der Nachschub unterkühlter Tropfen als Anlagerung an die Wasserhaut stetig fortsetzt. So können wir uns vorstellen, dass ein Wachstum eines Eiswasseransatzes möglich ist, indem sich die Wasserhaut jeweils vom Zentrum unseres Objektes weg fortpflanzt und dabei vom

¹⁾ Forschungsstelle der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 305.

bestehenden Eis oder Eisgerüst her durch Eislamellen oder Eiswände stabilisiert wird. Die Dicke derselben hängt ab vom Betrag der Wärmeabfuhr nach aussen sowie den durch die Wasserhaut eingefangenen, unterkühlten Tropfen, das heisst vom totalen Wärmeaustausch Objekt – Umgebung, der den maxi

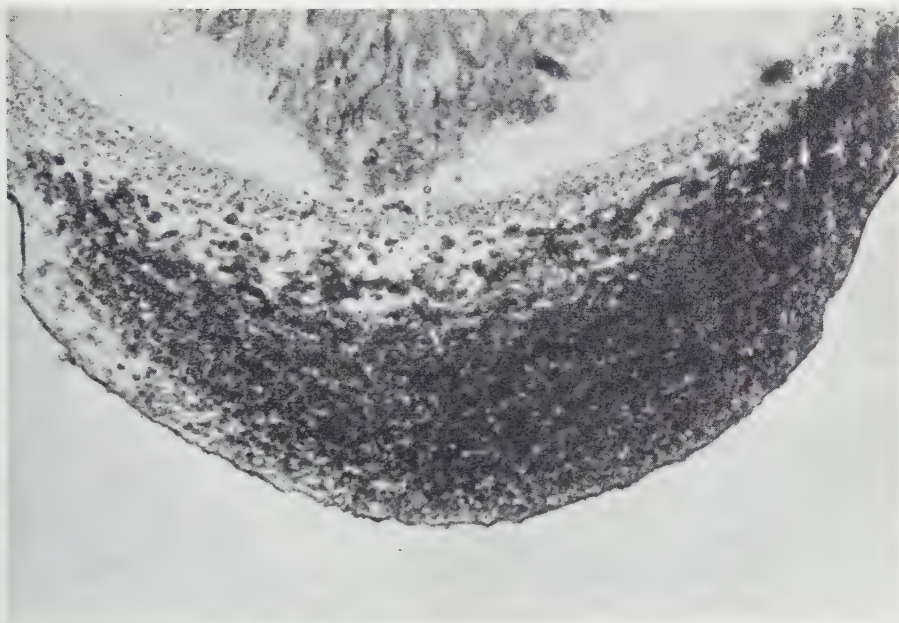


Figur 1

Modell der Entstehung eines Eiswassergemenges als Ansatz an eine Eiskugel. t_K Temperatur der Eiskugel, t_{KH} Temperatur der Grenzfläche Wasserhaut/Eiskugel, t_{HL} Temperatur an der Grenzfläche der Wasserhaut gegen die Luftströmung.

malen Betrag gefrierbaren Wassers bestimmt. Auf diese Art entsteht ein meiss zusammenhängendes Kavernensystem, das mit Wasser aufgefüllt ist. Schleudern wir die flüssige Phase in einer Zentrifuge bei 0°C heraus, so bleibt nur das Eisgerüst übrig. Dessen Struktur ist abhängig von den Entstehungsbedingungen und ist für einen bestimmten Fall in Figur 2 dargestellt. Die hellen Zonen bedeuten dabei durchsichtiges Eis, währenddem die eingebauten Luft einschlüsse durch ihre Randzonen dunkle Schattierungen ergeben, die einander überschneiden und überlagern können.

Die Entdeckung der Eiswassergemenge überholt somit alle Annahmen und Berechnungen über maximalste Vereisungen (SCHUMANN [4] und LUDLA



Figur 2

Eisstruktur eines Eiswasseransatzes an eine Testkugel ($d = 2$ cm) nach dem Herausschleudern des die Zwischenräume des Eisgerüsts ausfüllenden Wassers. Entstehungsbedingungen: Lufttemperatur $t_L = -30^\circ\text{C}$, Luftgeschwindigkeit $v = 24$ m/s, freier Wassergehalt $w_f = 8,1$ g/cm³, resultierender Wasseranteil $W_m = 19\%$ des totalen Ansatzes (M 1: 0,13).

[3], [5]), die auf der Basis einzig möglich errichteter «reiner» Vereisungen ohne Einbau von flüssigem Wasser beruhten.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, für das Zustandekommen von Eiswassergemengen verantwortliche atmosphärische Verhältnisse auszumessen und sie in Zusammenhang zu bringen mit dem resultierenden Wasseranteil des totalen Ansatzes. Es sollen auch Formeln entwickelt werden, die diese Relationen beschreiben. Die Resultate werden zeigen, welche enorme Bedeutung dieser speziellen, neu entdeckten Form atmosphärischen Eiwachstums bei der Bildung von Hydrometeoren und auch bei der Erfassung des realen Geschehens bei Flugzeugvereisungen zukommt.

2. Theoretische Betrachtung des Wärme- und Stoffaustausches bei Eiskugeln

Zum besseren Verständnis der thermodynamischen Grundlagen, die zu Eiswassergemengen führen, seien die in Betracht zu ziehenden Vorgänge erläutert und versucht, sie durch entsprechende Formeln zu beschreiben.

Gegeben sei eine Atmosphäre mit der Temperatur t_L ($t_L < 0^\circ\text{C}!$), dem Druck p , dem Wasserdampfgehalt w_D , dem freien Wassergehalt in Form unterkühlter Tropfen w_f sowie deren Grössen und Grössenverteilung. Die Wassertropfen sollen dabei die gleiche Temperatur haben wie die Umgebungs-
luft! In dieser Atmosphäre werde zur Zeit $\tau = 0$ eine Eiskugel eingeführt mit dem Durchmesser d , der Dichte ρ_K und der Relativgeschwindigkeit v gegenüber der Umgebung. Die Testkugeltemperatur t_K sei 0°C . Diese letzte Annahme sei deshalb eingeführt, um von allem Anfang an eine Aufnahme von Gefrierwärme durch die Ursprungspartikeln zu verhindern.

Mit der Zeit vergrössert sich unsere primäre Eiskugel, der Ansatz kann unter Vernachlässigung einer möglichen Verdampfung durch folgende Gleichung charakterisiert werden:

$$dm = E F_K v w_f d\tau - dm' . \quad (1)$$

Dabei bedeuten

dm	Menge des an die Testkugel angelagerten Wassers [kg]
E	Einfangswahrscheinlichkeit für die an die Testkugel angeschwebten Tropfen [—]
F_K	Querschnittsfläche der Testkugel senkrecht zur Bewegungsrichtung [m ²]
v	Relativgeschwindigkeit Kugel – Umgebung [m/h]
w_f	freier Wassergehalt der Atmosphäre [kg/m ³]
$d\tau$	Zeitintervall [h]
dm'	im Zeitintervall $d\tau$ von der Testkugel wieder an die Umgebung abgegebene Tropfenmenge [kg]

Die Leistungssumme lautet für den gleichen Fall

$$Q_{tot}^{\rightarrow} = Q_{KL} + Q_V + Q_w , \quad (2)$$

wobei

Q_{tot}^{\rightarrow}	total weggeführte Leistung [kcal/h]
Q_{KL}	durch Konvektion und Wärmeleitung weggeführte Leistung [kcal/h]
Q_V	durch Verdampfung von H ₂ O an der Oberfläche des Testobjektes weggeführte Leistung [kcal/h]
Q_w	durch die angeschwebten, unterkühlten Wassertropfen zugeführte, gegenüber der 0°C -warmen Testkugel überschüssige Kälteleistung [kcal/h]

Diese total weggeführte Leistung Q_{tot}^{\rightarrow} kann unter der Voraussetzung, dass der Ansatz $dm/d\tau$ gross genug sei, dazudienen, das angelagerte Wasser ganz oder teilweise zu gefrieren. Dabei ergibt sich die folgende Gleichheit:

$$Q_{mE} = Q_{tot}^{\rightarrow} , \quad (3)$$

wobei

Q_{mE} Gefrierleistung der Menge des pro Zeiteinheit angelagerten Wassers, das effektiv gefrieren kann [kcal/h]

Könnte alles angelagerte Wasser gefrieren, so würde dies die Leistung $Q_{m, tot}$ benötigen, die sich ausdrücken lässt durch

$$Q_{m, tot} = (E F_K v w_f - dm'/d\tau) S \quad (4)$$

mit

S Gefrierwärme von Wasser [kcal/kg].

Der Wasseranteil W_m [%] des Eiswasseransatzes beträgt damit

$$W_m = 100 \left(1 - \frac{Q_{mE}}{Q_{m, tot}} \right) = 100 \left(1 - \frac{Q_{tot}^{\rightarrow}}{Q_{m, tot}} \right). \quad (5)$$

Es gilt nun noch, die weggeführten Leistungen Q_{KL} , $Q_{I\cdot}$ und Q_w zu berechnen und deren Summe Q_{tot}^{\rightarrow} in Gleichung (5) einzusetzen.

Die vorteilhaftesten und vollständigsten empirischen Gleichungen, die sowohl den Wärme- wie den Stoffaustausch von Kugeln beschreiben, dürften diejenigen von RANZ und MARSHALL [6, 7] sein. Sie sind auch wesentlich allgemeiner als die von KRAMERS [8], die jeweils in der Meteorologie verwendet werden (siehe MASON [9] und LUDLAM [3]), da sie den «Ventilations»-Koeffizienten genau charakterisieren und dadurch die Berechnungsmöglichkeiten für andere Drucke und Temperaturen geben. Die Gleichungen lauten (gemäss Formeln 21 und 22 der zitierten Arbeit [6, 7]) für den in den nachfolgend beschriebenen Experimenten durchlaufenen Bereich der Reynolds-Zahl $5 \cdot 10^3 < Re < 5 \cdot 10^4$, unter Vernachlässigung der hier unbedeutenden additiven Konstanten

$$Nu = 0,60 Pr^{1/3} Re^{1/2}, \quad (6)$$

$$Nu' = 0,60 Sc^{1/3} Re^{1/2}. \quad (7)$$

Dabei sind

Nu	Nusselt-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
Re	Reynolds-Zahl
Nu'	Analog-Nusselt-Zahl
Sc	Schmidt-Zahl

In der Strömungs- und Wärmelehre wird der Wärmeübergang durch Konvektion und Leitung mit Hilfe der Nusselt-Zahl Nu charakterisiert, währenddem die Analog-Nusselt-Zahl Nu' den Stoffübergang kennzeichnet. Die Definitions-

gleichungen für die beiden Kennzahlen lauten

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}, \quad (8)$$

$$Nu' = \frac{\beta d}{k}. \quad (9)$$

Hierbei gelten

α	Wärmeübergangszahl [kcal/m ² h °]
d	Kugeldurchmesser [m]
λ	Wärmeleitzahl [kcal/m h °]
β	Stoffübergangszahl [m/h]
k	Diffusionszahl von Wasserdampf in Luft [m ² /h]

Meist ist es jedoch vorteilhafter, den Stoffübergang anstatt über den Konzentrationsunterschied Δc über den Dampfdruckunterschied des übergehenden Stoffes zu definieren.

Daraus resultiert die Gleichheit

$$\beta \Delta c = k_m \Delta p \quad (10)$$

mit

Δc	Konzentrationsunterschied des übergehenden Stoffes längs des Transferweges [kg/m ³]
k_m	Massenübergangszahl [kg/m ² h mbar]
Δp	Dampfdruckgefälle des übergehenden Stoffes längs des Transferweges [mbar]

Unter Benützung der Zustandsgleichung für ideale Gase können wir die Konzentrationsdifferenz Δc auch wie folgt ausdrücken:

$$\Delta c = \frac{M \Delta p}{R T}. \quad (11)$$

Dabei gelten

R	allgemeine Gaskonstante
T	mittlere, absolute Temperatur im Transferweg des übergehenden Stoffes [°K]
M	Molekulargewicht des übergehenden Stoffes [kg]

Gleichung (9) geht damit unter Berücksichtigung von (10) über in

$$Nu' = \frac{k_m R T d}{M k}. \quad (12)$$

RANZ und MARSHALL [6, 7] gingen noch einen Schritt weiter und drückten das Produkt (R, T) wiederum nach der Zustandsgleichung für ideale Gase durch die Eigenschaften der Luft im Transferweg aus und erhielten so ihren endgültigen Ausdruck für die Analog-Nusselt-Zahl Nu' :

$$Nu' = \frac{k_m \bar{M} \bar{p} d}{k_{QL} M} \quad (13)$$

mit

\bar{M}	Molekulargewicht der Luft [kg]
\bar{p}	Mittelwert aus der Differenz Totaldruck minus Partialdruck des diffundierenden Stoffes im Transferweg [mbar]
$\bar{\rho}_L$	mittlere Dichte der Luft im Transferweg [kg/m ³]

(In der Definitionsgleichung von RANZ und MARSHALL fehlt die Grösse M im Nenner von (13), ihre Rechnungen sind jedoch korrekt durchgeführt.)

Auf Grund der Gleichungen (6) und (8) lässt sich die Wärmeübergangszahl (durch Konvektion und Leitung) α_{KL} wie folgt ausdrücken:

$$\alpha_{KL} = 0,60 \frac{\lambda}{d} Pr^{1/3} Re^{1/2}. \quad (14)$$

Die durch Wärmeleitung und Konvektion weggeführte Leistung wird damit

$$Q_{KL} = 0,60 O_K \frac{\lambda}{d} \Delta t Pr^{1/3} Re^{1/2}. \quad (15)$$

Δt sei dabei die Differenz aus der Kugeltemperatur und derjenigen der Umgebung, das heisst $\Delta t = t_L$. Wenn wir die Oberfläche der Kugel O_K [m²] ersetzen über deren Durchmesser d , die Prandtl-Zahl Pr durch den im betrachteten Druckvariationsgebiet (1000 bis 200 mbar) praktisch konstanten Wert 0,71 und die Reynolds-Zahl Re durch die übliche Definitionsgleichung, so gelangt man zu folgendem Ausdruck:

$$Q_{KL} = 1,68 \lambda \nu^{-1/2} (-t_L) d^{3/2} \nu^{1/2}. \quad (16)$$

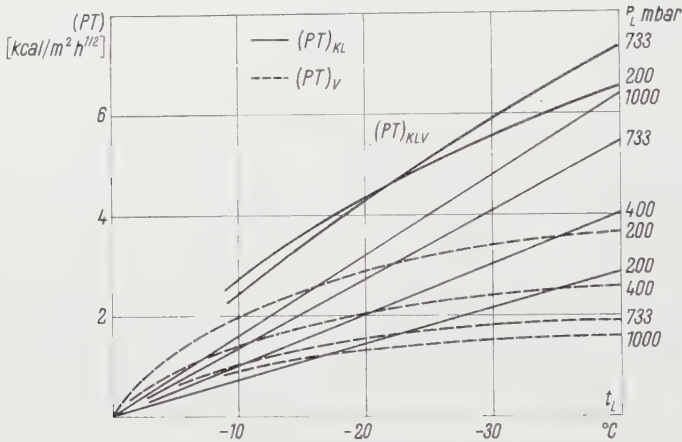
Die kinematische Zähigkeit ν [m²/h] kann dabei auch ausgedrückt werden durch η/ρ_L , wobei η die dynamische Zähigkeit in [kg/m h] bedeutet. Letztere Grösse ist druckunabhängig bis zu freien Weglängen, die vergleichbar werden mit den vorkommenden geometrischen Dimensionen. Die kinematische Zähigkeit ν hängt somit vom Druck so ab wie der reziproke Wert der Luftdichte ρ_L . Ebenso wie η ist auch die Wärmeleitzahl λ druckunabhängig in dem in der Wolkenphysik zu beachtenden Druckvariationsgebiet. Es scheint nun vorteilhaft, alle Grössen bis auf den Partikeldurchmesser d und die Geschwindigkeit v in eine einzige Druck-Temperatur-Funktion $(PT)_{KL}$ zusammenzufassen gemäss

folgendem Ausdruck:

$$(PT)_{KL} = 1,68 \lambda v^{-1/2} (-t_L) .$$

(17)

Diese Funktion ist in Figur 3 dargestellt.



Figur 3

Druck-Temperatur-Funktion $(PT)_{KL}$, $(PT)_V$ und $(PT)_{KLV}$ in Abhängigkeit der Lufttemperatur t_L , bei verschiedenen Luftdrücken p_L .

Aus Gleichung (16) wird damit endgültig für den Wärmeübergang durch Konvektion und Leitung

$$Q_{KL} = (PT)_{KL} d^{3/2} v^{1/2} .$$

(18)

Während der Stoffaustausch als Massenänderung nicht von Belang ist für die in Betracht gezogenen Verhältnisse, spielt die dabei in Aktion tretende totale Verdampfungskälte L [kcal/kg] eine Rolle. Es wird daher vorerst aus den Ausdrücken (7) und (13) die Massenübergangszahl k_m berechnet.

$$k_m = 0,60 \frac{k \bar{q}_L M}{M d \bar{p}} Sc^{1/3} Re^{1/2} .$$

(19)

Die bei diesem Stoffübergang erzeugte totale Verdampfungskälte errechnet sich nach dem Ausdruck

$$Q_V = k_m O_K \Delta p L$$

(20)

oder

$$Q_V = 0,60 \frac{k \bar{q}_L M}{M d \bar{p}} L O_K \Delta p Sc^{1/3} Re^{1/2} .$$

(21)

Unter L verstehen wir dabei die Verdampfungskälte, die aus dem Phasenübergang flüssig-dampfförmig resultiert. Diese Annahme ist nicht ganz korrekt, da

nicht die ganze Oberfläche einer durch Akkreszenz unterkühlter Wassertropfen wachsenden Kugel nass zu sein braucht. Der damit verbundene Fehler, der in die massgebende Formel (26) eingeht, ist jedoch vernachlässigbar.

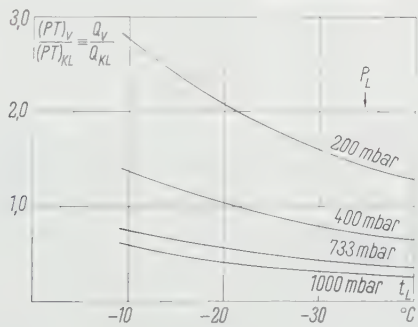
Wenn wie vorhin bei (16) wiederum alle Grössen bis auf die Faktoren Geschwindigkeit und Teilchendurchmesser zusammengefasst werden, so entsteht eine neue Druck-Temperatur-Funktion $(PT)_{I'}$, unter deren Berücksichtigung sich ein durch Stoffaustausch ausgelöster Wärmetransport ergibt von

$$Q_{I'} = (PT)_{I'} \cdot d^{3/2} v^{1/2} \tag{22}$$

mit

$$(PT)_V = 599 \frac{k \varrho_L}{\bar{p} v^{1/2}} \Delta p. \tag{23}$$

Gleichung (23) ist ebenfalls in Figur 3 dargestellt. Im Gegensatz zu $(PT)_{KL}$ nimmt $(PT)_{I'}$ mit steigendem Druck ab, das heisst während der Wärmeübergang durch Leitung und Konvektion mit abnehmendem Druck infolge der Reduzierung der Molekülzahl sinkt, wird ein Verdampfen von H_2O -Molekülen an der Partikeloberfläche beim gleichen Vorgang begünstigt und damit auch der zugehörige Wärmeübergang. Wie die Summierung der beiden Druck-Temperatur-Funktionen zeigt, ist dieser Betrag im betrachteten Temperaturvariationsbereich bei Drucken zwischen 1000 und 200 mbar praktisch gleich. Dass mit sinkendem Druck die Verdampfung den wesentlichen Beitrag zum totalen Wärmeaustausch leistet, geht auch speziell aus Figur 4 hervor, wo das Verhält-



Figur 4

Verhältnis der durch Verdampfen abgeführten Leistung Q_V und der durch Konvektion und Wärmeleitung abgeführten Leistung Q_{KL} in Funktion der Temperatur t_L , bei verschiedenen Luftdrücken p_L .

nis $(PT)_V / (PT)_{KL}$ gegen die Temperatur aufgetragen ist. Als Parameter wurde hierbei der Druck gewählt. Diese Figur zeigt auch, dass der Anteil der durch Verdampfen produzierten Leistung Q_V gegenüber der durch Wärmeleitung weggeführten Leistung Q_{KL} mit sinkender Temperatur abnimmt. Verdampfung spielt also bei steigender Temperatur eine grössere Rolle.

Noch fehlt uns eine letzte Grösse, um die Energiebilanzgleichung (2) explizit darzustellen, die Kälte Q_w , die durch das angeschwebte, unterkühlte Wasser der Testkugel zugeführt wird:

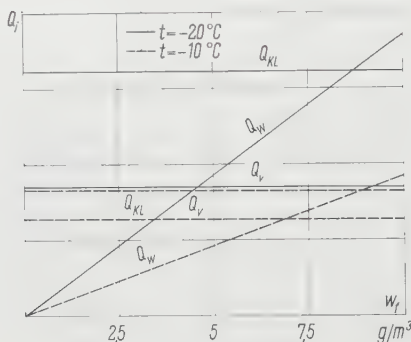
$$Q_w = E F_K c_w (-t_L) w_f v \quad (24)$$

oder

$$Q_w = 0,785 c_w E (-t_L) w_f d^2 v. \quad (25)$$

c_w spezifische Wärme von Wasser [kcal/kg°].

Die Einführung einer Temperaturfunktion bietet in diesem Falle keinen Vorteil



Figur 5

Beiträge zur Vernichtung der Gefrierwärme des angelagerten Wassers durch Konvektion und Wärmeleitung Q_{KL} , Verdampfen Q_V und zugeführtes, unterkühltes Wasser Q_w in Funktion des Wassergehaltes w_f ; $v = 12$ m/s, $d = 2$ cm, $t_L = -10^\circ\text{C}$ bzw. -20°C .

Um eine Vorstellung über das Verhältnis der verschiedenen Beiträge zur Vernichtung der Gefrierwärme des angelagerten Wassers zu bekommen, seien in Figur 5 die Gleichungen (18), (22) und (25) dargestellt in Funktion des freien Wassergehaltes bei einem Kugeldurchmesser von 2 cm, einer Luftgeschwindigkeit von 12 m/s sowie den Lufttemperaturen -10° und -20°C . Figur 6 zeigt Verhältnisse in Funktion der Luftgeschwindigkeit. (Um den richtigen Zusammenhang zwischen den Grössen Q_{KL} und Q_V mit Q_w herzustellen, wurde aus den Resultaten von Abschnitt 53 ein provisorischer Wert für E herangezogen.) Nun ist man in der Lage, die Ausdrücke für Q_{KL} , Q_V und Q_w in Gleichung (5) einzusetzen und die Formel für den Wasseranteil des Eiswasseransatzes wie folgt anzugeben:

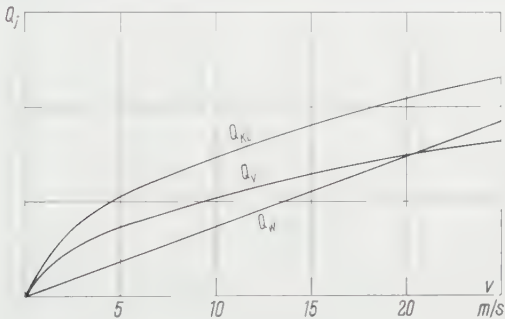
$$W_m = 100 \left(1 - \frac{\vartheta(P T)_{KLV} \cdot d^{3/2} v^{1/2} + 0,785 c_w E (-t_L) w_f d^2 v}{(0,785 E w_f d^2 v - dm'/d\tau) S} \right). \quad (26)$$

$(PT)_{KLV}$ sei dabei die Summe der beiden Druck-Temperatur-Funktionen. Wie später gezeigt wird, ist dm' vernachlässigbar; es ergibt sich damit der folgende

vereinfachte Ausdruck

$$W_m = 100 \left(1 - \frac{\vartheta (PT)_{KLV} d^{-1/2} v^{-1/2}}{62,4 E w_f} - \frac{c_w (-t_L)}{S} \right). \tag{27}$$

Es sei hier noch vermerkt, dass die Schritte, die zu Formel (26) führten, für die vorgesehenen Experimente nicht unbedingt zu Recht bestehen; die Annahmen über den Wärmeübergang und den Stoffaustausch beruhen darauf, dass auch die vereiste Kugel eine kugelige Umhüllende habe und deren Oberfläche glatt sei. Im Versuch dürfte dies kaum der Fall sein. Infolge der zulässigen Ähnlichkeitstheorie ist aber anzunehmen, dass die berechneten Verläufe auch



Figur 6

Beiträge Q_{KL} , Q_V und Q_w zur Vernichtung der Gefrierwärme des angelagerten Wassers in Funktion der Luftgeschwindigkeit v ; freier Wassergehalt $w_f = 5 \text{ g/m}^3$, Kugeldurchmesser $d = 2 \text{ cm}$, Lufttemperatur $t_L = -10^\circ\text{C}$.

den speziellen, von der Kugelform leicht abweichenden Verhältnissen entsprechen, wobei nur die Druck-Temperatur-Funktion $(PT)_{KVL}$ mit einem zusätzlichen Faktor ϑ korrigiert werden muss. Dessen Grösse kann jedoch nur experimentell ermittelt werden.

Gleichung (27) lässt eine Aussage über den maximal möglichen Wasseranteil W_m zu, indem für $w_f \rightarrow \infty$ eine Grenzgerade gilt gemäss

$$\lim_{w_f \rightarrow \infty} W_{m,w_f} = 100 \left(1 - \frac{c_w (-t_L)}{S} \right). \tag{28}$$

Eine weitere Aussage ist zu erhalten für die wichtigen Bedingungen, wo $W_m = 0$ wird und der Eisansatz eine Temperatur von 0°C aufweist, das heisst

$$\frac{\vartheta (PT)_{KLV} d^{-1/2} v^{-1/2}}{62,4 E w_f} + \frac{c_w (-t_L)}{S} = 1. \tag{29}$$

Die Lösungen von (29) nach t_L , v , d und w_f werden die Verhältnisse charakterisieren, bei denen eine Erhöhung der Temperatur, des Wassergehaltes, der Luftgeschwindigkeit oder des Kugeldurchmessers die Ausbildung eines Eiswasseransatzes anstelle eines reinen Eisansatzes nach sich zieht.

Auf die Darstellung der Formeln (27) und (29) sei an dieser Stelle verzichtet, sie wird im experimentellen Teil in den Figuren 11 bis 20 nachgeholt werden.

Zusammenfassend können die Hauptaussagen, zu denen die theoretischen Entwicklungen geführt haben, wie folgt festgehalten werden:

1. Der totale Wärmeaustausch einer Eiskugel kann in seinen einzelnen Komponenten formelmässig erfasst werden.

2. Bis auf einen konstanten Faktor ϑ/E , der jedoch nicht stark von 1 abweichen kann (ϑ und E liegen beide relativ nahe bei 1), ist es möglich, den Verlauf des Wasseranteils W_m in einem Eiswasseransatz in Funktion der Lufttemperatur t_L , des Kugeldurchmessers d , des freien Wassergehaltes w_f der Luft und der Relativgeschwindigkeit Luft – Testkugel v wiederzugeben.

3. Ferner ist die Asymptote bekannt, an die sich die Funktion $W_m = f(w_f)$ mehr oder weniger anschmiegen wird, je nachdem weniger oder mehr Tropfen von unserer Testkugel an die Umgebung abgegeben werden.

3. Versuchsprogramm

3.1 Allgemeines

Auf experimentelle Weise sollen die Beziehungen zwischen den Ansatzgrößen an einer Testeiskugel und den sie produzierenden Vereisungsbedingungen ermittelt werden. Mit den gewonnenen Resultaten ist zudem die Gültigkeit der in Abschnitt 2 entwickelten, theoretischen Beziehungen nachzuweisen.

Um nicht von den Zufälligkeiten und den Launen der Natur abhängig zu sein, werden die notwendigen Versuche im speziell hierzu gebauten Hagelversuchskanal ausgeführt. Diese Anlage erlaubt es, auch extremere Bedingungen zu erzeugen, als sie normalerweise in einer Gewitterwolke auftreten, und ergibt damit eine vorteilhafte Erweiterung des Variationsbereiches der Versuchsgrößen.

Einerseits erzeugen und kontrollieren wir die Vereisungsbedingungen. Sie werden erfasst durch die *Experimentparameter*, andererseits untersuchen und charakterisieren wir das entstehende Produkt; die entsprechenden Aussagen werden durch die *Messgrößen* gemacht.

3.2 Die Experimentparameter

Die Experimentparameter bezeichnen die Eigenschaften der das Messobjekt anströmenden Luft. Es sind dies vor allem die relative Geschwindigkeit Luft – Testobjekt, der Tropfenwassergehalt und die Tropfengrößenverteilung, die Lufttemperatur, der Luftdruck und der Eisbildungskerngehalt.

Ihre Variationsbereiche werden wie folgt angesetzt: Die relative Geschwindigkeit Luft – Testobjekt oder, da das Testobjekt örtlich fixiert ist (siehe Ab-

schnitt 42), die Luftgeschwindigkeit v werde in drei Schritten von 6 m/s auf 12, 18 und 24 m/s vergrößert. Damit werden auch kleinere und grössere Geschwindigkeitswerte erfasst, als sie beim freien Fall auftreten.

Der Tropfenwassergehalt w_f sei verändert zwischen 0 und 10 g/m³ Luft oder mehr, währenddem die Tropfengrößenverteilung konstant bleibe. (Damit wird die Zahl der einzelnen Messungen wesentlich reduziert, ohne aber die Ausagemöglichkeit stark einzuschränken. Abgesehen von einer Veränderung der Einfangswahrscheinlichkeit dürfte beim Auftreten von Eiswassergemengen die Variation der Tropfengrößen keinen bedeutenden Effekt ergeben; anders wäre es bei Vereisungsversuchen, wo alles Wasser gefrieren kann! Immerhin wird darauf geachtet, dass die mittlere Tropfengröße von derjenigen in der Natur nicht allzuweit entfernt ist.)

Die Lufttemperatur t_L werde variiert in einem Bereiche von 0°C bis -30°C. Diese Ausdehnung nach tieferen Temperaturen erweist sich jedoch nur sinnvoll, wenn der Gehalt der Luft an Eiskernungen, die in diesem Bereiche aktiv sein können, praktisch gleich Null ist.

Der Luftdruck p wird konstant gehalten und dürfte im Mittel 733 mbar sein, entsprechend der Lage des Forschungsinstitutes (2665 m ü. M.).

3.3 Die Messgrößen

Die Messgrößen sollen das Anfangs- und Endprodukt der Versuche, das heisst Ursprungspartikeln plus Eiswasseransatz, charakterisieren. Es sind dies der Durchmesser d und die Temperatur t_K der Ursprungskugel sowie als Hauptmerkmal das Verhältnis von Wasser zu Eis in einem resultierenden Ansatz. Dabei wird angenommen, dass die Größenänderung während des Wachstums unserer Ursprungspartikeln und die damit verbundene Veränderung der Strömungsverhältnisse dieses Messresultat in einem so geringen Masse verändern, dass die Abweichung noch im Bereiche der Fehlergrenze unserer Methode liegt. Dass diese Annahme zulässig ist, ergibt sich durch Versuche mit verschiedenen Kugelgrößen bei sonst gleichen Experimentparametern, wo nur eine relativ geringe Durchmesserabhängigkeit festgestellt werden kann.

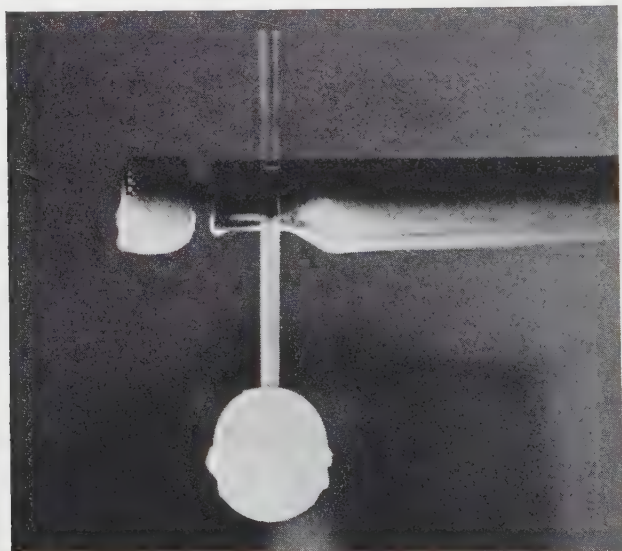
4. Messmethoden und Apparate

4.1 Der Hagelversuchskanal

Die Anlage, die das Erreichen und die Einhaltung der geforderten Werte der Experimentparameter gewährleistet, ist der Hagelversuchskanal. Dieser ist prinzipiell nichts anderes als ein im Messteil vertikaler, klimatisierbarer Windkanal mit geschlossenem Kreislauf. Seine Leistungsdaten wurden bereits früher publiziert [1] und werden daher nicht wiedererwähnt.

4.2 Der Einbau der Versuchsobjekte in die Meßstelle

Da bis jetzt keine aerodynamischen Verhältnisse geschaffen werden konnten, die ein einwandfreies Schweben von kugelähnlichen Partikeln gestatten, werden die Testobjekte der beschriebenen Versuche starr fixiert. Als Ursprungspartikeln dienen künstlich gegossene Eiskugeln, in denen ein feiner Nylonfaden (nach Bedarf auch ein Thermoelement) eingefroren wird. Über diesen Faden



Figur 7

Fixierung der Testeiskugel in der Meßstelle des Hagelversuchskanals ($M 1: 1,33$).

ist ein feines Plexiglasröhrchen zu schieben, das an die Eiskugel angepresst werden kann. In dieser Position wird der Faden mit einem Stöpsel fixiert, währenddem das Röhrchen selber an einem Träger in der Meßstelle eingeklemmt wird (siehe Figur 7). Diese Art der Aufhängung bietet immerhin den Vorteil einer guten Isolation mit der Möglichkeit, auch Luftgeschwindigkeiten anzuwenden, die von der freien Fallgeschwindigkeit des Testobjektes abweichen. Erste Versuche mit nur an einem Faden aufgehängten Objekten zeigten bereits bei 70% der Fallgeschwindigkeit grössere, störend wirkende horizontale Bewegungen und Pendelungen. Die Ausmerzung dieses Effektes wäre wohl mit einer günstigen Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt der Meßstelle möglich, eine homogene Geschwindigkeit und ein genau definierter Feuchtegehalt der an das Testobjekt angeströmten Luft sind aber vorzuziehen.

An dieser Stelle muss auch ein Punkt erwähnt werden, der diese Versuche etwas vereinfacht: die Tatsache, dass der Eiswasseransatz aus thermodyna-

mischen Gründen eine Temperatur von 0°C aufweist. Das hat zur Folge, dass die Temperaturverhältnisse genügend genau bekannt sind, sofern das Vorgehen beachtet wird, dass die Ursprungspartikeln vor der Einbringung in den Kanal eine Temperatur zwischen 0 und -2° aufweisen. Eine merkliche zusätzliche, aber unerwünschte Abführung der Gefrierwärme kann damit nicht erfolgen.

4.3 Die Messung der Windgeschwindigkeit

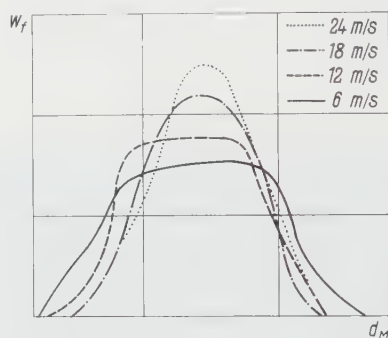
Die Messung der Windgeschwindigkeit v an der Meßstelle geschieht über die Ermittlung der Druckdifferenz an den Enden des Effusors direkt vor der Meßstelle. Die Anwendung der Bernoullischen Gleichung ergibt dann die gewünschte Aussage. Zusätzlich können auch Messungen mit einem Prandtl-Rohr ausgeführt werden – dieses Gerät ist jedoch infolge seiner Anfälligkeit gegenüber Vereisungen nur für Punktmessungen zu verwenden – im Gegensatz zur zuerst besprochenen Methode.

4.4 Der Feuchtegehalt der Kanalluft, seine Erzeugung und Regulierung

Die Erzeugung der Wassertropfen, die in den Kanal eingespritzt werden, geschieht mittels spezieller Farbspritzpistolen. Deren grosser Vorteil liegt darin, dass sie keine Pressluft benötigen; die relativ feinen Tropfen werden bei hohen Drucken durch eine schwingende Membran produziert. Eine Grössenmessung dieser Partikeln erfolgt durch Einfangen unterkühlten Nebels mit einem mit Paraffinöl bestrichenen, -30°C kalten Objektträger (die auftreffenden Tropfen gefrieren dabei im Moment des Auftreffens und können nicht mehr koagulieren, sofern auch die mikroskopische Ausmessung bei negativen Temperaturen erfolgt) und zeigt, dass diese auch für Gewitterwolken als repräsentativ angesehen werden dürfen (Durchmesser des mittleren Volumens $\varnothing \sim 50 \mu$). Je nach Wunsch können 1, 2 oder auch 3 Tropfengeneratoren parallel geschaltet werden.

Die Messung des freien Tropfenwassergehaltes geschieht über eine indirekte Methode, wobei die Tatsache ausschlaggebend ist, dass mit Ausnahme der niedersten Geschwindigkeitsstufe von 6 m/s überhaupt keine Vereisung der Kanalwände stattfindet – im erwähnten Falle ist ein solcher Effekt zu erkennen; er ist jedoch bedeutungslos. – Wir versuchen daher, die total eingespritzte Wassermenge durch Wägen zu ermitteln, währenddem weitere Messreihen die Verteilung des freien Wassergehaltes an der Meßstelle angeben sollen. Sie wird gemessen, indem eine Sonde, unterteilt in 13 zylindrische Elemente von 2 cm Länge und 2 cm Durchmesser nacheinander in den beiden Hauptrichtungen der quadratischen Meßstelle eingeführt wird. In der auszumessenden, vereisenden Wolke wird nun die Gewichtsvermehrung der einzelnen Abschnitte durch Eisansatz bei -20°C gewogen. Die resultierenden Verteilungskurven sind für die verschiedenen beachteten Windgeschwindigkeiten in Figur 8 dargestellt.

Auf Grund der Kenntnis der absolut eingespritzten Wassermenge sowie deren Verteilung über den Querschnitt kann nun der absolute Betrag des freien Wassergehaltes angegeben werden.



Figur 8

Mittlere Verteilung des freien Wassergehaltes über den mittleren Durchmesser d_M der Meßstelle des Hagelversuchskanals bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v .

Die so ermittelten Eichkurven ergeben den Zusammenhang: total eingespritztes Wasser – freier Wassergehalt am Ort des Testobjekts. – Wir müssen dabei jedoch eine unter Umständen wesentliche Korrektur mit berücksichtigen: der Feuchtegehalt der Kanalluft vor der Wassereinspritzung entspricht der Eissättigung bei der tiefsten Kanaltemperatur am Orte des Ammoniakverdampfers oder Luftkühlers (siehe auch [1]). An diesem Orte schlägt sich der letzte Rest der festen oder flüssigen H_2O -Partikeln nieder, der überschüssige Wasserdampf kondensiert. Durch das eingespritzte Wasser wird nun die Luft vor der Meßstelle aufgewärmt und mit Wasserdampf gegenüber den flüssigen Wassertropfen gesättigt. Die Distanz zwischen der Wassereinspritzung und der Meßstelle wurde nun so gewählt, dass Zeit genug vorhanden ist, eine gegenseitige Anpassung der Luft- und Tropfentemperaturen sowie des Wasserdampfgehaltes zu gewährleisten. Unter der Annahme resultierender stationärer Zustände ergibt sich eine Korrektur, die vom weiter oben angegebenen Resultat in Abzug zu bringen ist, von

$$w_f = w'_f - K, \quad (30)$$

$$K = w_{SW}(t_M) - w_{SE}(t_V). \quad (31)$$

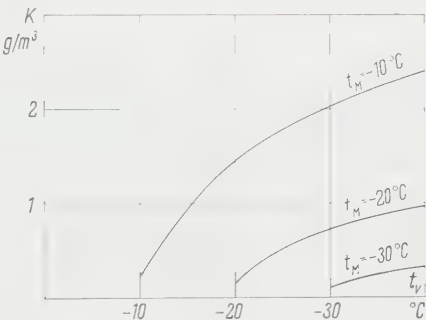
- w'_f eingespritzte Wassermenge [kg/m^3]
 K Korrekturwert zur Bestimmung des effektiven freien Wassergehaltes [kg/m^3]
 w_{SW} Wasserdampfgehalt der Kanalluft bezüglich Wassersättigung [kg/m^3]
 w_{SE} Wasserdampfgehalt der Kanalluft bezüglich Eissättigung [kg/m^3]

- t_M

Temperatur an der Meßstelle [°C]
- t_V

Temperatur des Verdampfers [°C]

Eine entsprechende graphische Darstellung ist Figur 9. Diese Zusammenhänge sind allgemein und gelten auch, wenn die Kanalluft zwischen Verdampfer und Wassereinspritzung aufgewärmt wird, sei es durch Heizung oder Wärmeleitung.



Figur 9

Korrekturfaktor K zur Bestimmung des effektiven freien Wassergehaltes w_f in Funktion der Verdampfertemperatur t_V , bei verschiedenen Meßstellentemperaturen $t_M (= t_L)$.

4.5 Die Berechnung der Meßstellentemperatur

Die Problematik der Temperaturmessung in einer unterkühlten Wolke wird noch offensichtlicher, wenn diese nicht durch homogene Verhältnisse gekennzeichnet ist. Da hilft auch keine integrierende Methode, wie es die Schallgeschwindigkeitsbestimmung eines reinen Tones und die damit ermöglichte absolute Umrechnung auf die Temperatur darstellt. Die Vereisung jeder Art von Messführern wiederum lässt ebenfalls keine genügenden Werte zu. Aus diesen Gründen wird die Errechnung der Meßstellentemperatur jedem andern Vorgehen vorgezogen.

Die Gleichung für die Energiebilanz pro Kubikmeter Luft ergibt sich zu

$$w_f c_w (t_W - t_M) = (t_M - t_{Sch}) c_L \varrho_L + [w_{SW}(t_M) - w_{SE}(t_V)] L .$$

(32)

In Worten heisst dies, dass die durch das pro m^3 Luft eingespritzte Wasser zugeführte Energie umgewandelt wird in eine Erwärmung der Luft, vermindert durch die Kälteproduktion beim Verdampfen von Wasser beim Angleichen an die neuen Sättigungsverhältnisse.

Die neu eingeführten Symbole bedeuten dabei:

- t_W

Temperatur des eingespritzten Wassers [°C]
- t_{Sch}

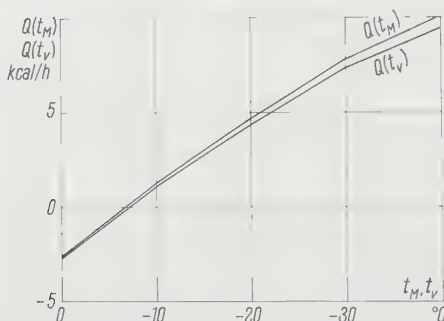
Temperatur, gemessen am Orte der ersten Umlenkschaufeln im Hagelversuchskanal (direkt vor der Wassereinspritzung) [°C]

c_L spezifische Wärme der Luft [kcal/kg°]
 ϱ_L Luftdichte [kg/m³]

Da die Kanalcharakteristik zeigt, dass die Schaufeltemperatur t_{sch} gleichgesetzt werden darf mit t_v , der Verdampfertemperatur, so können wir Gleichung (32) trennen in eine Funktion der Verdampfertemperatur $Q(t_v)$ und eine Funktion der Meßstellentemperatur $Q(t_M)$, wobei Gleichung (32) übergeht in

$$Q(t_v) - Q(t_M) = 0. \quad (33)$$

Die Temperatur des eingespritzten Wassers sei dabei konstant. Diese beiden Funktionen sind dargestellt in Figur 10, wo auch die Differenz der gemessenen



Figur 10

Darstellung der Temperaturfunktionen $Q(t_M)$ und $Q(t_v)$ für einen freien Wassergehalt $w_f = 10$ g/m³ und eine Temperatur des eingespritzten Wassers $t_w = +20^\circ\text{C}$.

Verdampfertemperatur t_v und der zu berechnenden Meßstellentemperatur t_M bei $Q(t_v) = Q(t_M)$ abgelesen werden kann. Figur 10 zeigt, dass bei höheren Temperaturen die zu berücksichtigende Temperaturerhöhung gering ist – die durch das Wasser zugeführte Energie wird in erster Linie durch die Verdunstung wettgemacht –, währenddem bei tieferen Temperaturen die Luft wesentlich stärker erwärmt wird. In diesen letzten Fällen ist der freie Wassergehaltsunterschied bei Erwärmung um einen Grad bedeutend kleiner, so dass der Verdunstungsbeitrag abnimmt und die Wärmezufuhr hauptsächlich in eine Temperaturerhöhung umgewandelt wird. Bei einer Einspritzung von praktisch 0°C warmem Wasser wird die beobachtete Temperaturerhöhung wesentlich kleiner, als sie in Figur 10, der 20°C -warmes Wasser zugrunde liegt, dargestellt ist.

Die berechneten Temperaturen scheinen damit genügend gesichert zu sein. Aus dem Umstand, dass ein Temperaturwert mit einer absoluten Genauigkeit von $\pm 1^\circ\text{C}$ genügt, ist auch eine Berücksichtigung des Temperatúraustausches über den Querschnitt, hervorgerufen durch das Tropfenwassergehaltsprofil, nicht vonnöten.

4.6 Die Bestimmung des Wasseranteils von Eiswasseransätzen

Die Bestimmung des Wasseranteils in Eiswasseransätzen kann am besten über eine kalorimetrische Messung der Enthalpie gegenüber einer Temperatur höher als 0°C vorgenommen werden. Zu diesem Zwecke tauchen wir das vereiste Testobjekt, das Endprodukt unserer Versuche, in ein Dewar-Gefäß, das teilweise mit einer Sperrflüssigkeit angefüllt ist. Die resultierende Temperaturänderung dieses Bades erlaubt es, auf den ursprünglichen Wassergehalt der vereisten Partikel zu schliessen. Unter der Annahme, dass diese eine Temperatur von 0°C aufgewiesen habe, ergibt sich die Aussage, dass die durch das vereiste Testobjekt zugeführte Energie E_T gleich sein muss wie die Reduktion der innern Energie der Sperrflüssigkeit E_{Sp} . Diese beiden Grössen lassen sich ausdrücken durch

$$E_T = G_E S + G_T c_w t_{Mi} \quad (34)$$

und

$$E_{Sp} = (t_{Sp,o} - t_{Mi}) G_{Sp} c_{Sp}, \quad (35)$$

wobei

G_E	Gesamtgewicht des im Testobjekt enthaltenen Eises [kg]
G_T	Totalgewicht des Testobjektes [kg]
t_{Mi}	Mischtemperatur [$^{\circ}\text{C}$]
$t_{Sp,o}$	Ursprungstemperatur der Sperrflüssigkeit [$^{\circ}\text{C}$]
G_{Sp}	Gewicht der Sperrflüssigkeit [kg]
c_{Sp}	spezifische Wärme der Sperrflüssigkeit [kcal/kg $^{\circ}$]

Die Kombination der Gleichungen (34) und (35) ergibt

$$\frac{G_E}{G_T} = \left[-\frac{G_{Sp} c_{Sp}}{G_T S} (t_{Sp,o} - t_{Mi}) - \frac{c_w}{S} t_{Mi} \right] K_D. \quad (36)$$

K_D Korrekturfaktor, charakteristisch für das verwendete Dewar-Gefäß (wird durch Eichung ermittelt)

Da wir jedoch am Wasseranteil W_m des Ansatzes interessiert sind und nicht am Wasseranteil der gesamten Testpartikeln, muss die folgende Operation berücksichtigt werden:

$$W_m = 100 \frac{G_W}{G_A} = 100 \frac{G_T - G_E}{G_T - G_K}. \quad (37)$$

W_m	Wasseranteil des Eiswasseransatzes [%]
G_A	Gewicht des Eiswasseransatzes an die ursprüngliche Eiskugel [kg]
G_K	Gewicht der ursprünglichen Eiskugel [kg]
G_W	Gewicht des flüssigen Wassers [kg]

Da bei dieser Methode die Wärmekapazität und die Trägheit in der zeitlichen Anpassung des Dewar-Gefässes eine merkbare Rolle spielen könnten, wur-

den Eichkurven aufgenommen, die den Wert und die zeitliche Abhängigkeit des Korrekturfaktors K_D ergeben, mit dem das scheinbare Gewicht des Eises G'_E multipliziert werden muss, um den korrekten Betrag G_E zu erhalten. Die Differenz aus Laboratoriumstemperatur und Ausgangstemperatur der Sperrflüssigkeit wird in allen Versuchen praktisch gleich gewählt und die jeweiligen Phasen der Vorbereitung und der Messung gleich gestaltet. Es sei auch noch erwähnt, dass als Sperrflüssigkeit stets Wasser verwendet wird; zur Messung der Temperaturen und Temperaturdifferenzen dienen eine Kompensationsmessbrücke und ein Spiegelgalvanometer. Alle Gewichtsbestimmungen werden auf zwei verschiedenen Mettler-Präzisionsanalysenwaagen ausgeführt.

Die Voraussetzungen zu diesem oben beschriebenen Ermittlungsverfahren scheinen auf den ersten Blick an eine homogene Temperatur von 0°C der Ursprungskugel auch nach der Vereisung gebunden zu sein. Effektiv finden aber auf deren Leeseite eine Abkühlung statt. Durch Einbau von Thermoelementen an der Rückseite und im Zentrum verschiedener Testkugeln konnte jedoch nachgewiesen werden, dass dieser Effekt ganz unbedeutend ist. (Die örtlichen Wärmeübergänge können auch nach den von FRÖSSLING [10] ermittelten Wärmeübergangszahlen abgeschätzt werden. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich die Grenzschicht durch Aufnahme von Gefrierwärme erwärmt und dadurch der Wärmeübergang auf der Leeseite des Testobjektes reduziert wird!) Dies bedeutet auch, dass frei fallende, rotierende Eiskugeln in erster Näherung gleiche Wasseranteile W_m in einem Eiswasseransatz aufweisen wie gleich grosse, jedoch aufgehängte Testkugeln, sofern die Experimentparameter dieselben sind!

Zur Bestimmung des Wasseranteils von Eiswassergemengen wird noch eine zweite Methode angewendet: Das Endprodukt eines einzelnen Vereisungsexperimentes wird in eine Zentrifuge gebracht und ausgeschleudert. Dabei muss darauf geachtet werden, dass dies bei 0°C geschieht und keine weiteren Phasenübergänge das Resultat verfälschen. Der Wasseranteil eines Eiswassergemenges kann auf diese Art rein durch Wägung bestimmt werden, was gegenüber der kalorimetrischen Methode eine wesentliche Vereinfachung der Experimente bedeutet. Allerdings bleibt eine Unsicherheit bestehen, da unter Umständen in geschlossenen Kavernen vorkommendes, flüssiges Wasser in einer Zentrifuge nicht entfernt werden kann. Dies ist mithin der Grund, der dazu führte, beide Methoden parallel nebeneinander zu verwenden.

5. Messungen und Resultate

5.1 Vorgehen

Die Auslegung des ganzen Messprogramms ist abhängig von den Experimentparametern. Während es die Anlage, der Hagelversuchskanal, erlaubt, die Temperatur und die Windgeschwindigkeit auf gewünschte Werte einzustellen

ist es nicht möglich, den freien Wassergehalt, der durch die Spritzpistolen eingeführt wird, beliebig zu wählen. Kleinste Einflüsse auf die Düsen könnten die Durchflussmenge verändern, auch darf zur Erlangung einer homogenen und stets gleichbleibenden Tropfengrößenverteilung keine Verstellung an den Pistolen vorgenommen werden. (Es hat sich gezeigt, dass eine Veränderung der Spritzmenge stets verbunden ist mit einer Veränderung der Durchmesser der erzeugten Tropfen.) Zusätzlich verändert sich bei konstanter Einspritzung der Wassergehalt indirekt proportional mit der Luftgeschwindigkeit.

Das sind die Gründe, die eine Verwendung von drei Spritzpistolen nötig machten, die, einzeln oder wahlweise kombiniert, verschiedene freie Wassergehalte erzeugen können. Bei niederen Luftgeschwindigkeiten ist jedoch ein Einsetzen aller Tropfengeneratoren nicht mehr möglich, da damit ein zu hoher freier Wassergehalt verbunden wäre; die daraus resultierenden Eiswassermenge könnten nicht mehr genügend genau bestimmt werden.

Infolge der geschilderten Umstände wird bei einer bestimmten Lufttemperatur und einer bestimmten Kanalgeschwindigkeit sowie einem ebenfalls konstanten Testkugeldurchmesser der Wasseranteil des Eiswasseransatzes in Funktion des freien Wassergehaltes bestimmt. Nach Ausführung einer solchen Messreihe wird die Luftgeschwindigkeit auf einen neuen Wert eingestellt und eine neue Reihe begonnen. Sind alle vier gewünschten Geschwindigkeiten durchgemessen, so kann für eine neue Meßserie eine andere Temperatur gewählt werden. Die sich aus diesem Vorgehen ergebenden Resultate sind in Abschnitt (5.2) zusammengestellt. Auf eine Variation des Durchmessers der ursprünglichen Testeiskugel wird generell verzichtet, also nur Einzelmessungen über die Abhängigkeit des Wasseranteils von demselben ausgeführt (Abschnitt 5.3).

Das Vorgehen, das bei einer Einzelmessung (Bestimmung des Wasseranteils kalorimetrisch!) eingehalten wird, geschieht chronologisch wie folgt:

- a) Giessen der Testkugel mit dem gewünschten Durchmesser,
- b) Einstellung des Hagelversuchskanals auf eine bestimmte Temperatur und eine gegebene Luftgeschwindigkeit,
- c) Vorbereitung der Sperrflüssigkeit zur kalorimetrischen Bestimmung des Wassergehaltes der vereisten Probe und Temperaturbestimmung,
- d) Wägen der Sperrflüssigkeit,
- e) Vorbereitung der Testkugel (Bestimmung des Durchmessers, des Gewichtes sowie Kontrolle der Temperatur, Aufbringung der Distanzhülle und Fixierung des Nylonfadens, siehe Abschnitt 4.2),
- f) Ablesen von Kanaldaten (Verdampfertemperatur, Temperatur vor der Wassereinspritzung, Temperatur an der Meßstelle, Luftgeschwindigkeit), eventuelles Nachjustieren einzelner Werte,
- g) Einbau der Testkugel in die Meßstelle des Hagelversuchskanals,
- h) gleichzeitige Inbetriebsetzung der Wassereinspritzung,

- i) unmittelbar nach dem Abschalten der Spritzpistolen sofortiger Ausbau des vereisten Objektes,
- k) Entfernung der Distanzhülse,
- l) Wägen des vereisten Testobjektes,
- m) Einbringen desselben in die Sperrflüssigkeit des Kalorimeters,
- n) Abstoppen der Schmelzzeit (zu Kontrollzwecken),
- o) Durchmischung der Sperrflüssigkeit plus Testobjektwasser inklusive Bestimmung der Mischtemperatur,
- p) Bestimmung der in den Kanal eingebrachten totalen Feuchte,
- q) Nachkontrolle der Kanalbedingungen.

Das Vorgehen bei der Einzelmessung ändert sich, wenn der Wasseranteil mit der Zentrifuge und durch Wägung bestimmt wird. Die Punkte c und d fallen weg, währenddem die Positionen m, n und o ersetzt werden durch das Auszentrifugieren der vereisten Testpartikeln und die nachfolgende Wägung. Die kritischste Stelle des Versuchsablaufes ist die Zeitdauer, welche der Ausbau der vereisten Kugel aus dem Kanal, ihre Wägung und ihre Überführung in das Kalorimeter oder die Zentrifuge benötigen. Mit einiger Routine kann diesen Vorgang sehr beschleunigt werden, so dass normalerweise keine Wasserverluste durch Austropfen aus dem Eiswassergemisch auftreten. Die Wärmezufuhr über die Zeit, da das Objekt mit der Laboratoriumsluft in Kontakt ist, dürfte vernachlässigbar sein, höchstens vermindert sie die Unterkühlung der Ursprungspartikeln (ca. 2°C).

5.2 Messresultate

Die auf Grund des in Abschnitt 51 beschriebenen Vorgehens ermittelten Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 eingetragen und in den Figuren 11, 12 und 13 dargestellt. Tabelle 1 enthält dabei die Messwerte, wie sie mit der kalorimetrischen Methode bestimmt wurden, währenddem Tabelle 2 die Wasseranteile, bestimmt durch Zentrifugierung und Wägung, enthält. Es zeigt sich dabei

- a) Wird der prozentuale Wasseranteil W_m des Eiswasseransatzes in Funktion des freien Wassergehaltes aufgetragen, so lässt sich bei konstanten Werten der Geschwindigkeit und der Temperatur eine Verbindungskurve durch die Messpunkte legen; diese Kurve bestimmt zugleich einen freien Wassergehalt, bei dem der Wasseranteil 0% beträgt;
- b) für wachsendes w_f wird ein Grenzwert $\lim W_m$ angestrebt, der kleiner ist als 100%;
- c) $\lim W_m$ geht mit abnehmender Temperatur nach kleineren Werten über;
- d) der Wassergehalt W_m nimmt allgemein für kleinere Geschwindigkeit kleinere Werte an;
- e) der Wasseranteil des Eiswasseransatzes sinkt allgemein bei abnehmender Temperatur t_L .

Tabelle 1

Messwerte des Wasseranteils W_m und deren Abweichungen ΔW vom theoretischen Wert (in Prozenten des totalen Ansatzes G_A) in Funktion des freien Wassergehaltes w_f , bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v und Temperaturen t_L , Kugeldurchmesser $d = 2$ cm.
Bestimmung des Wasseranteils gemäss kalorimetrischer Methode.

t_L	-10°C			-20°C			-30°C		
v m/s	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A
24	1,8	10	+ 2	1,6	0	0	7,5	0	-16
	4,5	46	0	7,6	38	- 2,5	10,0	24	- 4
	8,9	65	0	2,5	0	0	13,3	40	+ 3
	3,8	53	+ 5	4,7	20	- 2	13,4	46	+ 8
	3,4	32	-12	17,6	64	+ 2			
18	2,2	10	- 1	15,4	56	- 2	9,0	22	+ 4,5
	9,0	65	- 2	6,6	30	- 2	15,7	38	+ 1
	6,6	50	-13	15,6	51	- 6,5	19,0	38	- 4
	8,8	61	- 9	14,9	51	- 5,5	8,9	11	- 6
				8,1	29	- 2,5	18,3	35	- 5,5
				21,1	54	- 7	8,2	0	-13
12							14,8	25	-10
	9,6	53	-15	9,5	24	-14	16,6	24	- 9
	9,7	66	- 2	6,4	22	- 8	14,3	25	- 3
	3,0	19	- 4	15,6	54	0	16,7	35	+ 1
	9,0	47	-20	7,5	22	- 5,5			
6				18,0	46	-11			
	9,7	61	+ 2	12,0	34	0	15,9	21	+ 1
	3,6	0	-10	7,2	15	+ 8	20,2	23	- 5
	8,7	54	- 2	20,8	49	- 3	12,2	0	- 5
	10,0	51	- 9						

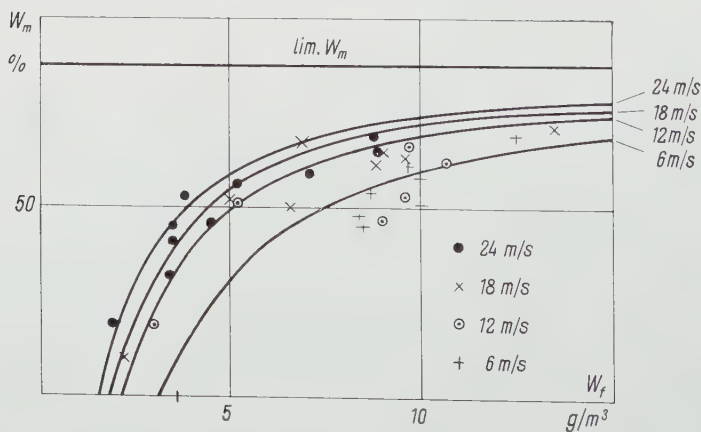
Die absoluten Werte lassen sich für alle Temperaturen relativ gut durch Kurven darstellen, wobei zu bedenken ist, dass einerseits die Messung des freien Wassergehaltes w_f um 15% falsch sein kann, anderseits der Wasseranteil W_m gemäss Abschnitt 46 bisweilen mit einem absoluten Fehler von bis zu 15% des totalen Ansatzes G_A behaftet ist. Speziell interessant ist dabei die Übereinstimmung der Resultate, die einerseits durch kalorimetrische Messung, anderseits durch Zentrifugierung und Wägung gewonnen wurden! Dadurch werden die Ergebnisse wesentlich gefestigt, wenn auch beiden Methoden die Eigenschaft zugeschrieben werden kann, eher etwas zu kleine Werte zu ergeben.

Dass gerade bei der höchsten Temperatur von - 10°C die grössten Streuungen der Messwerte auftreten, ist nicht verwunderlich. Das angelagerte Wasser gefriert hier sehr langsam und hat dadurch Zeit, an den Ort des Kräftegleichgewichtes (bestimmt durch den aerodynamisch bedingten statischen Luftdruck, den hydrostatischen Druck, die Schwerkraft und die Oberflächen-

Tabelle 2

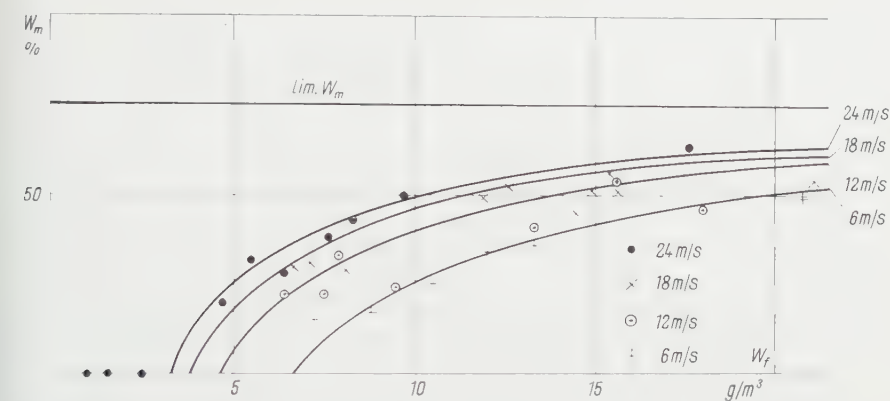
Messwerte des Wasseranteils W_m und deren Abweichungen ΔW vom theoretischen Wert (in Prozenten des totalen Ansatzes G_A) in Funktion des freien Wassergehaltes w_f , bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v und Temperaturen t_L , Kugeldurchmesser $\bar{d} = 2$ cm.
Bestimmung des Wasseranteils mit Zentrifuge und Wägung.

t_L	-10°C			-20°C			-30°C		
v m/s	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A	w_f g/m ³	W_m %	ΔW % G_A
24	5,2	56	- 4	1,0	0	0	6,1	4	- 2
	3,5	45	0	6,4	28	- 6	4,4	1	+ 1
	8,8	69	- 3	8,3	43	0	8,1	19	0
	7,1	59	- 9	9,8	50	+ 1			
	3,5	41	- 4	5,5	32	+ 3			
18	6,9	67	+ 2,5	7,1	31	- 3	7,0	10	+ 4,5
	5,0	52	- 2	12,6	52	- 1	6,6	4	+ 2
	13,5	71	- 4,5	14,5	45	- 11	12,1	24	- 5
	9,6	63	- 7,5	11,9	49	- 2,5			
12	10,7	62	- 8,5	7,9	33	+ 2,5	13,7	27	0
	5,2	51	0	13,3	41	- 8	7,8	10	+ 10
6				7,9	33				
	12,5	69	+ 4	10,5	25	- 3	13,1	16	+ 7
	8,5	45	- 10	13,3	36	- 2			
	8,4	48	- 6	8,8	17	- 2			
	10,0	59	- 2						



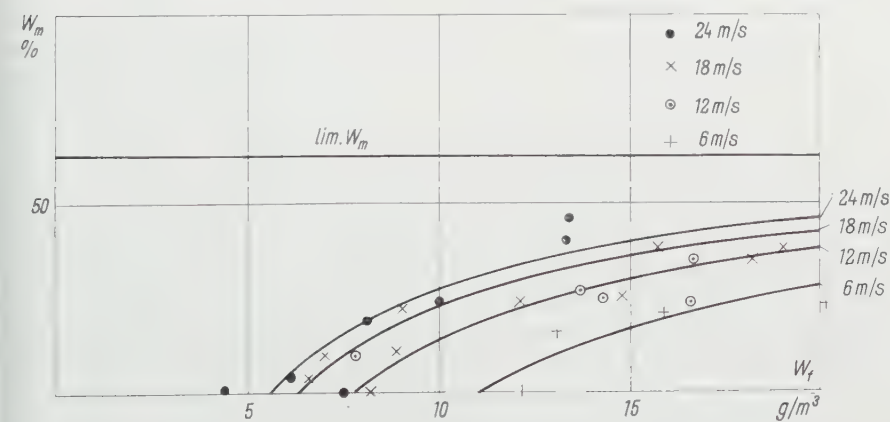
Figur 11

Experimentelle Werte und theoretisch-empirische Kurven über den Zusammenhang Wasseranteil W_m des Ansatzes – freier Wassergehalt w_f der Luft, bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v und der konstanten Lufttemperatur $t_L = -10^\circ\text{C}$, Kugeldurchmesser $\bar{d} = 2$ cm.



Figur 12

Experimentelle Werte und theoretisch-empirische Kurven über den Zusammenhang Wasseranteil W_m des Ansatzes – freier Wassergehalt w_f der Luft, bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v und der konstanten Lufttemperatur $t_L = -20^\circ C$, Kugeldurchmesser $d = 2$ cm.



Figur 13

Experimentelle Werte und theoretisch-empirische Kurven über den Zusammenhang Wasseranteil W_m des Ansatzes – freier Wassergehalt w_f der Luft, bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v und der konstanten Lufttemperatur $t_L = -30^\circ C$, Kugeldurchmesser $d = 2$ cm.

spannung) zu fließen. Bei hohen Luftgeschwindigkeiten gelangt es an den Ort des tiefsten statischen Druckes an der Kugelperipherie und bildet dort einen eigentlichen Ring; während dem bei kleineren Geschwindigkeitswerten die Schwerkraft für die Wasseransammlung im Staupunkt auf der Luvseite der Luftströmung massgebend ist. (Die bereits früher erwähnte Erscheinung [11], dass für die Form des resultierenden Ansatzes in erster Linie die Vereisungsbedingungen verantwortlich sind, tritt hier besonders deutlich zutage!) Dies

hat zur Folge, dass in Funktion der Geschwindigkeit eine starke Variation der sich bildenden Verformung – ausgehend von der ursprünglichen Kugel – auftritt. Ihrem wechselnden Einfluss auf die Einfangswahrscheinlichkeit kann nur begegnet werden, indem relativ kleine Ansätze erzeugt werden, wodurch jedoch der zugehörige Messfehler erhöht wird.

Punkte, die auf die Abszissenachse zu liegen kommen (siehe Figuren 11, 12 und 13), sagen aus, dass alles Wasser bereits während des Wachstums gefroren ist. Sie können nicht weiter ausgewertet werden, da es sich um reine Eisansätze handelt, für welche die theoretischen Überlegungen gemäss Abschnitt 2 nicht mehr genügen.

Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass es nicht ohne weiteres selbstverständlich ist, wenn auch die Messungen bei $t_L = -30^\circ\text{C}$ in unser Bild passen sind doch die Resultate eindeutig an die Bedingung geknüpft, dass die an der Testkugel angelagerten Wassertropfen die Umgebungstemperatur angenommen haben, ohne zu gefrieren. Rechnerisch konnte gezeigt werden, dass eine Abkühlung der an die Testkugel angeschwebten Wassertropfchen auf die Lufttemperatur in der zur Verfügung stehenden Zeit und bei den in Betracht zu ziehenden Durchmessern gewährleistet ist. Dies ist auch experimentell dadurch nachgewiesen worden, dass anstelle des im Normalfall eingespritzten 0°C -warmen Wassers 20°C -warmes Wasser eingespritzt wurde und kein merkbarer Einfluss auf den Wasseranteil der so produzierten Eiswasseransätze nachgewiesen werden konnte. Zusätzlich ergab sich dabei, dass die eingespritzten Wassertropfen nicht nur die Lufttemperatur praktisch annehmen, sondern auch ihren unterkühlten Zustand beibehalten und nicht gefrieren. Dies ist einerseits durch im Hagelversuchskanal eingebauten elektrostatischen Filtern [12] zu verdanken – ein Ausschalten der Filter lässt die Wassertropfen öfters gefrieren, indem vom Verdampfer mitgerissene Eispartikeln gefrierprozessauslösend wirken – anderseits dem Umstand zuzuschreiben, dass das in den Kanal eingespritzte normalerweise unbehandelte Wasser keine Fremdsubstanzen enthält, die bei den auftretenden Luftgeschwindigkeiten in der kurzen Strecke zwischen den Wasserdüsen und der Meßstelle eisbildend wirken.

5.3 Anpassung der Theorie an die Messresultate

Die Anpassung der in Abschnitt 2 entwickelten Theorie wird wesentlich erleichtert durch die Tatsache, dass ein Ablösen flüssiger Wassertropfen aus der Wasserhaut eines vereisten, *kugeligen* Testobjektes nicht beobachtet werden konnte. Diese Aussage ist aber für Wasseranteile W_m , die grösser sind, als es im Experiment vorkommen, nicht gesichert, *auf alle Fälle spielt aber die Erscheinung niemals die Rolle, die ihr in der Literatur oft zugeschrieben wird*. Selbstverständlich müssen Beobachtungen an schmelzenden Eispartikeln davon ausgenommen werden.

Dies bedeutet, dass wir ohne Bedenken Gleichung (27) verwenden dürfen, wobei nur noch die Aufgabe verbleibt, den Koeffizienten θ/E auf Grund von Messungen zu bestimmen. Hierzu sei der Punkt $W_m = 43\%$, $w_f = 8,3 \text{ g/m}^3$, $v = 24 \text{ m/s}$, $t_L = -20^\circ\text{C}$ (Figur 12) gewählt, der eingesetzt im Ausdruck (27) für θ/E den Wert von 1,48 ergibt. Die damit errechneten Kurven sind in den Figuren 11, 12 und 13, in denen die Messpunkte einzeln aufgeführt wurden, als ausgezogene Linien eingezeichnet; ebenfalls eingetragen sind auch die berechneten Grenzwerte für $\lim W_m$. Der Vergleich zwischen Messpunkten und berechneten Kurven zeigt, dass die Übereinstimmung unter Berücksichtigung der verschiedenen Fehlermöglichkeiten, gemäss den in Tabellen 1 und 2 angeführten absoluten Abweichungen, als sehr befriedigend bezeichnet werden kann. θ/E hängt prinzipiell von allen Parametern (Partikeldurchmesser d , Geschwindigkeit v , Temperatur t_L , freier Wassergehalt w_f) ab; um so auffälliger ist es, dass ein einziger konstanter Wert zur Charakterisierung der Messresultate genügt. (Die Tendenz, dass die Messwerte mit sinkender Temperatur die theoretisch ermittelten Kurven erreichen oder sogar überschreiten, ist nicht deutlich und gesichert genug, um daraus eine Abhängigkeit von θ/E abzuleiten.)

Die Formel, die die Ergebnisse beschreibt, erhält mit der Einführung des gefundenen Korrekturfaktors θ/E für einen Luftdruck von 733 mbar (entsprechend der Lage des Institutes) die folgende Form:

$$W_m = 100 - 2,37 (PT)_{KLV} d^{-1/2} v^{-1/2} w_f^{-1} + 1,26 t_L. \quad (38)$$

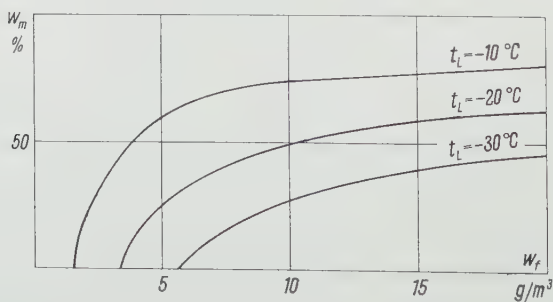
Dieses Resultat soll uns jedoch nicht davon abhalten, die effektiv möglichen Einflüsse auf θ/E kurz zu diskutieren. Bestimmend für θ/E sind speziell der Raumwinkel der Ansatzfläche auf der Ursprungskugel inklusive die Form des Ansatzes (die ja stets von der für die Rechnung zugrunde gelegten, idealen Kugelbegrenzung in Form und Rauigkeit abweicht), die Einfangwahrscheinlichkeit und die jeweilige Abhängigkeit dieser Grössen von den Vereisungsbedingungen. Eine Basierung auf die Ergebnisse von Messungen anderer Autoren, wie zum Beispiel LANGMUIR [13], ist nicht unbedingt ratsam, da alle bis jetzt gemachten Untersuchungen über Einfangwahrscheinlichkeiten darauf beruhen, dass das angelagerte Wasser direkt am Ort der Anlagerung vereist wird. Bei den Eiswasseransätzen ist jedoch der Umstand, dass das angelagerte Wasser sich auf der Oberfläche in Funktion der Umgebungsbedingungen verschieben kann, entscheidend. Solche komplexe Wachstumstendenzen sind bis jetzt nicht in Erwägung gezogen worden, auch ist die dazugehörige Untersuchungsmethodik noch nicht genügend entwickelt.

Eine experimentelle Ermittlung der Durchmesserabhängigkeit des Wasseranteils eines Einsatzes zeigt einen eher betonteren von d abhängigen Verlauf ($W_m \sim d^{-1}$), als er durch Formel (38) gegeben ist ($W_m \sim d^{-1/2}$), unberührt des Umstandes, dass die Messungen innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen

$[\pm 15\%]$ mit der Theorie übereinstimmen. Diese Tendenz ist verständlich mit Rücksicht auf die Abhängigkeit des Faktors ϑ/E vom effektiven Durchmesser d .

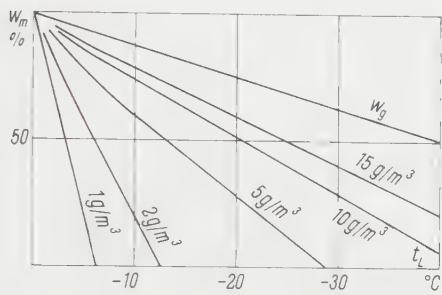
Die Ermittlung der Druckabhängigkeit der Formeln (27) oder (38) scheitert an der Komplexität des Faktors ϑ/E , wogegen alle andern Grössen ohne weiteres auf beliebige Drucke umrechenbar wären. Um diese Schwierigkeiten zu meistern, müsste vorerst eine Kennzahl bestimmt werden, die bei Vereisungen gleiche Tropfentrajektorien miteinander in Beziehung bringt und damit analog ist zu der Grösse, die RUSH und WARDLAW [14] benutzen. Nur sollte die neue Kennzahl für Eiswassergemenge gelten, bei denen die an ein Ursprungsobjekt angelagerten Tropfen nicht am Orte ihrer Anlagerung gefrieren. Trotzdem darf aber in erster Annäherung angenommen werden, dass bei einer Absenkung des Druckes bis auf 200 mbar der Koeffizient ϑ/E nicht allzu stark variieren wird. Da die Druck-Temperatur-Funktion $(PT)_{KL}$ nur schwach vom Druck abhängt (Figur 3), so dürfte für eine erste Abschätzung Formel (38) genügen. Bei der Umrechnung auf frei fallende Partikeln wird sich aber zusätzlich ein anderes Verhältnis zwischen v und d ergeben, da bei konstantem Durchmesser die Fallgeschwindigkeit bei kleiner werdenden Drucken nach grössern Werten strebt.

Auf Grund der Messungen und den durch die Theorie ermöglichten Extrapolationen sollen abschliessend all die Abhängigkeiten des Wasseranteiles in einem Eiswasseransatz zusammengestellt werden. Infolge der relativen Unübersichtlichkeit der Gleichung (38) sei W_m in Funktion aller vier Experimentparameter dargestellt. Figur 14 zeigt den Wasseranteil in Funktion des freien Wassergehaltes w_f bei einer Luftgeschwindigkeit von 24 m/s und bei verschiedenen Temperaturen, währenddem Figur 15 die Zusammenhänge darstellt in Funktion der Lufttemperatur und bei verschiedenen Wassergehalten. Figur 16 zeigt W_m als Funktion der Geschwindigkeit v für verschiedene Temperaturen und Wassergehalte. Während in den eben erwähnten Figuren 14, 15 und 16 der Durchmesser der Testkugel konstant gehalten wurde, ist er in Figur 17



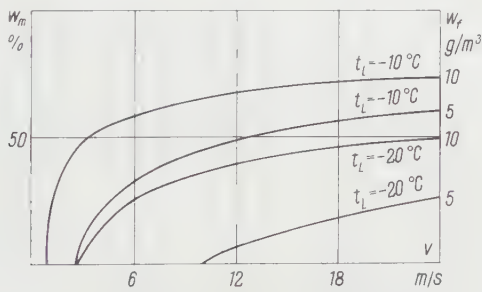
Figur 14

Darstellung des Wasseranteils W_m in Funktion des freien Wassergehaltes w_f , Parameter Lufttemperatur t_L ; Luftgeschwindigkeit $v = 24$ m/s, Kugeldurchmesser $d = 2$ cm.



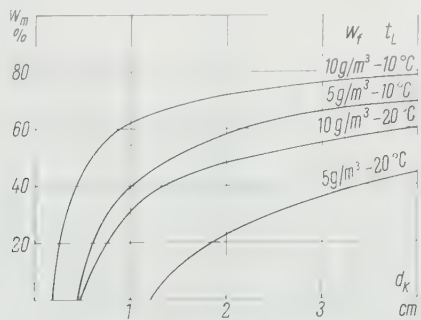
Figur 15

Wasseranteil W_m in Funktion der Lufttemperatur t_L , Parameter freier Wassergehalt w_f ; Luftgeschwindigkeit $v = 24 \text{ m/s}$, Kugeldurchmesser $d = 2 \text{ cm}$; W_g = Grenzwert des Wasseranteils.



Figur 16

Wasseranteil W_m in Funktion der Luftgeschwindigkeit v , bei verschiedenen Werten der Lufttemperatur t_L und des freien Wassergehaltes w_f , Kugeldurchmesser $d = 2 \text{ cm}$.



Figur 17

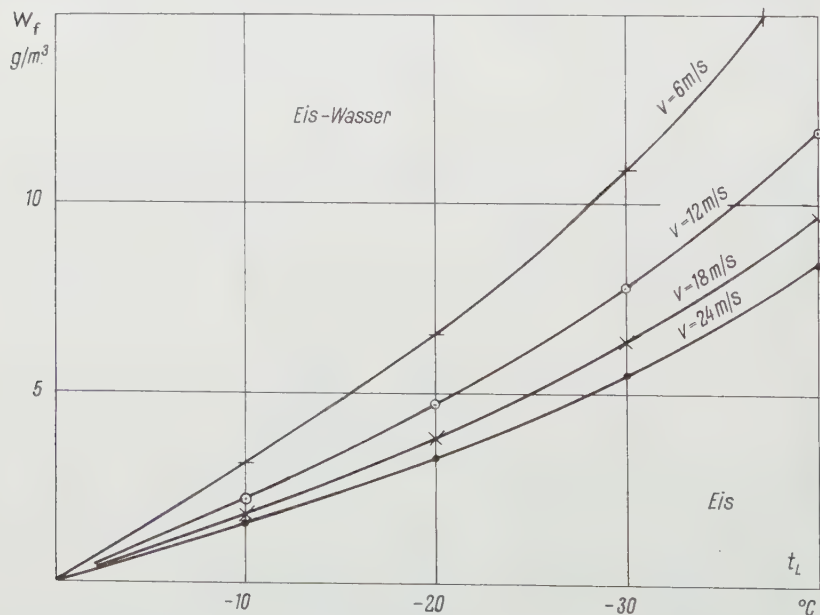
Wasseranteil W_m in Funktion des Durchmessers der vereisten Kugel, berechnet für freien Fall derselben, bei verschiedenen freien Wassergehalten w_f und Lufttemperaturen t_L ; Luftdruck $p = 733 \text{ mbar}$.

variiert für verschiedene Werte der Lufttemperatur und des freien Wassergehaltes. Alle Angaben für Durchmesser unterhalb 1,0 cm und oberhalb 2,5 cm stellen dabei Extrapolationen dar.

Für die Erörterung von Figur 17 wurde es als vorteilhaft erachtet, den Durchmesser mit jener Grenzfallgeschwindigkeit in Zusammenhang zu bringen, die sich bei frei fallenden Eiskugeln einstellen würde. Die dafür zu machenden, zusätzlichen Annahmen sind die folgenden: Hagelkorndichte $\rho_{HK} = 900 \text{ kg/m}^3$ (in Übereinstimmung mit gemachten Messungen [15]), Luftwiderstandskoeffizient $c_w = 0,5$. Auf diese Weise errechnete Wasseranteile gelten aber nur unter dem Vorbehalt allfälliger Korrekturen von seiten der Strömungsdynamik [11].

Generell steht damit fest, dass abnehmende Werte von Temperatur, freiem Wassergehalt w_f , Luftgeschwindigkeit v und Kugeldurchmesser d stets eine Verminderung des Wasseranteils W_m zur Folge haben.

Um die praktische Bedeutung der Eisswassergemenge bei atmosphärischen Vereisungen noch besser hervorzuheben, seien die Vereisungsbedingungen zusammengestellt, bei denen gerade noch Eisansätze entstehen, die keine Wassereinschlüsse mehr aufweisen. Zu diesem Zwecke sei die Gleichung (29) verwendet, woraus sich die in Figur 18 dargestellten Verhältnisse ergeben. Es zeigt sich dabei



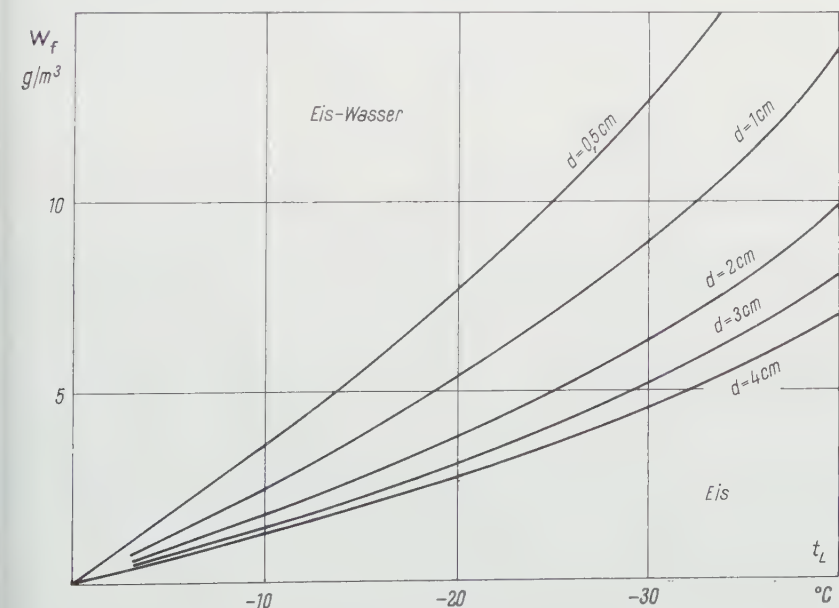
Figur 18

Darstellung der Grenzkurven für verschiedene Luftgeschwindigkeiten v , die das Gebiet der reinen Eisansätze von den Eisswassergemengen in Funktion des freien Wassergehaltes w_f und der Lufttemperatur t_L trennen. Eiskugeldurchmesser $d = 2 \text{ cm}$.

dass die Grenzkurven für verschiedene Luftgeschwindigkeiten die Koordinaten-ebene (w_f, t_L) in zwei getrennte Gebiete aufteilen. Im obern Gebiet herrschen Bedingungen, die zu Eiswassergemengen führen, im untern Gebiet jene, die reine Eisansätze bewirken, währenddem die Grenzkurven selber den geometrischen Ort darstellen für reine Eisansätze, deren Temperatur 0°C beträgt. Der Eiskugeldurchmesser wurde hierbei mit 2 cm als konstant angenommen.

Figur 19 zeigt dieselben Grenzkurven, jedoch für den Fall, wo der Kugeldurchmesser variiert, die Geschwindigkeit aber konstant bleibt.

Schliesslich charakterisiert Figur 20 jene Grenzfälle, die sich für frei fallende Partikeln ergeben, unter den gleichen Bedingungen, wie sie der Figur 17 zugrunde liegen. Figur 20 kann auch herangezogen werden, um vergleichende Betrachtungen bezüglich der Hagelbildung anzustellen, indem sie Grenzkurven für verschiedene Kugeldurchmesser frei fallender Eispartikeln zeigt. *Kleine Eiskörner benötigen bei jeder unter dem Gefrierpunkt liegenden Temperatur weit grössere freie Wassergehalte als grosse Hagelkörner, damit Eiswassergemenge anwachsen können.* Diese Erscheinung rührt speziell vom spezifisch grössern Stoff- und Wärmeaustausch her, welcher den kleinern Kugeln eigen ist, zudem wird er durch die Abhängigkeit der Grenzfallgeschwindigkeit von der Quadratwurzel des Partikeldurchmessers verstärkt.

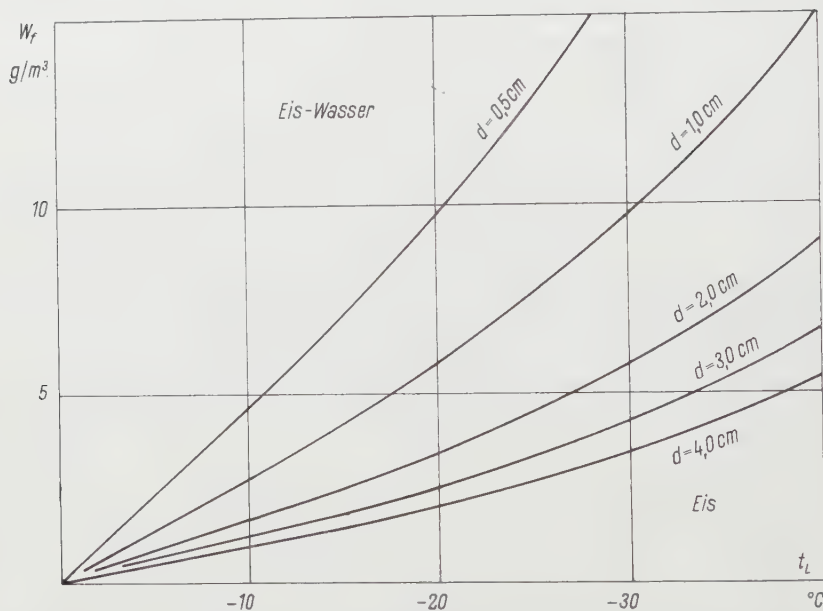


Figur 19

Darstellung der Grenzkurven für verschiedene Eiskugeldurchmesser d , die das Gebiet der reinen Eisansätze von den Eiswassergemengen in Funktion des freien Wassergehaltes w_f und der Lufttemperatur t_L trennen; Luftgeschwindigkeit $v = 18\text{ m/s}$.

6. Schlussbemerkungen

Die Messungen über das Wachstum von Eiswassergemengen an Eiskugeln bei atmosphärischen Vereisungsbedingungen zeigen die grosse Bedeutung dieser bis jetzt unbekannten Wachstumsmöglichkeit von Hydrometeoren, die



Figur 20

Darstellung der Grenzkurven für frei fallende, kugelige Partikeln verschiedenen Durchmessers d in Abhängigkeit des freien Wassergehaltes w_f und der Lufttemperatur t_L ; Luftdruck $p = 733$ mbars

auch bei den häufigsten schweren Flugzeugvereisungen eine massgebende Rolle spielen kann. Speziell zeigt Figur 20, dass primär in jeder Wolke, in der Vereisungen durch Anlagerung von unterkühlten Wassertropfen stattfinden, Eiswassergemenge bildende Bedingungen notwendig vorhanden sein müssen. Erst wenn die genaue Kenntnis dieser Vorgänge wird mithelfen, eine brauchbare, den atmosphärischen Bedingungen äquivalente Hageltheorie zu schaffen und die physikalische Seite der Hagelbildung befriedigend abzuklären.

Es ist meine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER und Herrn Prof. Dr. G. BUSCH für ihre fördernde Anteilnahme an dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen; Dank gebührt auch dem Direktor des Schneeforschungsinstitutes, Herrn Dr. M. DE QUERVAIN sowie Herrn Dr. TH. ZINGG für ihr stetes Interesse und die Unterstützung der beschriebenen Unter

Suchungen. Meinen beiden Mitarbeitern, Herrn P. Räss und Herrn J. von NIEDERHÄUSERN bin ich für ihre Mitwirkung bei der Ausführung der Messungen ebenfalls verpflichtet. Die Arbeit wurde im Rahmen des Forschungsprogramms der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr an deren Forschungsstelle Weissfluhjoch am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung ausgeführt; es standen hierzu auch wesentliche Kredite des Schweizerischen Nationalfonds zur Verfügung.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 10, 381 (1959).
- [2] R. LIST, Helvetica Physica Acta 32, 293 (1959).
- [3] F. H. LUDLAM, Quart. J. Roy. Met. Soc. 76, 52 (1950).
- [4] T. E. W. SCHUMANN, Quart. J. Roy. Met. Soc. 64, 3, (1938).
- [5] F. H. LUDLAM, Nubila 1, 12 (1958).
- [6] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, Chem. Engin. Progr. 48, 141 (1952).
- [7] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, Chem. Engin. Progr. 48, 173 (1952).
- [8] H. KRAMERS, Physica 12, 61 (1946).
- [9] B. J. MASON, The Physics of Clouds, Oxford 1957.
- [10] N. FRÖSSLING, Beitr. Geophys. 52, 170 (1938).
- [11] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 10, 143 (1959).
- [12] R. LIST und M. DE QUERVAIN, Helvetica Physica Acta 29, 424 (1956).
- [13] I. LANGMUIR, General Electric Report No. RL 223 (1949).
- [14] C. K. RUSH und R. L. WARDLAW, National Aeronautical Establishment, Ottawa, June 1955.
- [15] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 9a, 217 (1958).

Summary

The first experiments with the Swiss Hail Tunnel [1] have shown that the growth of hailstones under atmospheric icing conditions does not occur in the way usually assumed. It is quite normal to observe still liquid water in the resulting ice deposit. Figure 1 shows a model of this new observed mechanism while Figure 2 shows an ice framework without the liquid water normally contained in it.

These first findings led to the experiments and the theory which are described and developed in this paper. The final goal was to determine the water content of the growing ice-water mixtures as a function of the generating icing conditions and the characteristics of the primary ice particles. For the calculations and the experiments we used in both cases ice spheres with an initial temperature of 0°C . The theoretical total exchange of heat is given in formula (26) or – as the experiments have shown that no water normally escapes from the iced spheres – by formula (27). The results of the experiments are given in Figures 11, 12 and 13, which also indicate the calculated values. To achieve a correlation between theory and experiment, it was necessary to determine an unknown value ϑ/E where E means the collection efficiency and ϑ a corrective factor. ϑ/E was found to be constant at all different values of the free water content, the air velocity, the air temperature and the diameter of the test particles (ranging from 1.0 to 2.5 cm). The accuracy of the measurements is $\pm 15\%$ of the total deposit; the mean volume diameter of the water droplets, accrued on the test particles, is 50μ .

Summarizing it can be said, that increasing values for temperature, free water content air velocity, and the diameter of the ice spheres lead to increasing values for the liquid water component in the resulting deposit.

Of particular interest are the conditions which determine the borderlines between deposits of dry ice and deposits of ice-water mixtures. These are indicated in Figure 20 which gives the corresponding growing conditions as functions of the free water content and the air temperature. Figure 20 is valid for freely falling ice spheres of different diameters and shows, that *the deposits consisting of ice-water mixtures are growing preferably at higher temperatures and on greater particles.* In addition we can also recognize the large range of atmospheric conditions which produce aqueous hailstones. These results should demonstrate the great importance of the thermodynamics of such ice-water mixtures as icing deposits on freely falling particles.

(Eingegangen: 6. Dezember 1959.)

Steady-State Heat Conduction in a Circular Cone¹⁾

By ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, Providence²⁾, R.I., U.S.A.

1. Statement of Problem. Solution in Complex Integral Form

Consider a circular cone of semi-opening angle θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi$). Let rectangular Cartesian coordinates (x, y, z) be chosen in such a way that the origin is located at the vertex and the z -axis is coincident with the axis of the cone. Let (r, θ, φ) be spherical coordinates defined by the mapping

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ 0 &\leq r < \infty, & 0 &\leq \theta \leq \pi, & 0 &\leq \varphi < 2\pi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

and introduce the auxiliary notation

$$p = \cos \theta, \quad p_0 = \cos \theta_0. \quad (2)$$

In the rotationally symmetric problem to be treated presently the temperature T is independent of the longitude φ and obeys the boundary conditions

$$T(r, p_0) = T_0 \quad \text{for} \quad 0 \leq r \leq a, \quad T(r, p_0) = 0 \quad \text{for} \quad a < r < \infty, \quad (3)$$

while throughout the interior of the body the temperature field $T(r, p)$ must

¹⁾ The results communicated in this paper were obtained in the course of an investigation conducted under Contracts Nonr 562(20) and Nonr 562(25) of Brown University with the Office of Naval Research in Washington, D.C.

²⁾ Division of Applied Mathematics, Brown University.

satisfy LAPLACE's equation, which governs the steady-state heat conduction of a thermally homogeneous and isotropic solid. Thus

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left[(1 - p^2) \frac{\partial T}{\partial p} \right] = 0 \quad (4)$$

must hold in the region $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta < \theta_0$. Finally, we adjoin the regularity requirements

$$\left. \begin{aligned} T &= o(r^{-1}), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = o(r^{-2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \\ T &= O(1), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

The Dirichlet problem characterized by (3), (4), (5) is most conveniently attacked by means of the Mellin transform³⁾. Suppose

$$\hat{T}(p, s) = \int_0^\infty T(r, p) r^{s-1} dr, \quad (6)$$

so that $\hat{T}(p, s)$ designates the Mellin transform with respect to r of $T(r, p)$, s being the transform parameter. Integration by parts, in view of (5), now yields the identities

$$\int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial r} r^s dr = -s \hat{T}(p, s), \quad \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r^{s+1} dr = s(s+1) \hat{T}(p, s), \quad (7)$$

provided the real part of s obeys the restriction $0 < \operatorname{Re}(s) \leq 1$. On multiplying (4) by r^2 and applying the transform (6) one obtains, by virtue of (7), the Legendre equation

$$\frac{d}{dp} \left[(1 - p^2) \frac{d\hat{T}}{dp} \right] + s(s-1) \hat{T} = 0. \quad (8)$$

On the other hand, the boundary conditions (3) in the transform domain take on the form

$$\hat{T}(p_0, s) = \frac{T_0 a^s}{s}. \quad (9)$$

The solution of (8) that meets (9) and corresponds to a temperature field which is bounded in the physical domain under consideration, is evidently given by

$$\hat{T}(p, s) = \frac{T_0 a^s}{s} \cdot \frac{P_{s-1}(p)}{P_{s-1}(p_0)}, \quad (10)$$

where P_{s-1} is the Legendre function of the first kind and of degree $s-1$.

³⁾ See DOETSCH [1] and SNEDDON [2] for general discussions of this transform. Numbers in brackets refer to the list of publications at the end of the paper (page 314).

According to the inversion theorem for the Mellin transform we have

$$T(r, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{T}(p, s) r^{-s} ds, \quad (11)$$

and substitution from (10) into (11) yields

$$T(r, p) = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^s \frac{P_{s-1}(p)}{P_{s-1}(p_0)} \cdot \frac{ds}{s}. \quad (12)$$

The formal solution (12) for the desired temperature distribution depends upon the choice of the line of integration $\text{Re}(s) = c$ in the complex s -plane. Clearly, the solution is not affected by the particular choice of c as long as the position of the line of integration is varied within one and the same strip of regularity of the integrand in (12). The selection of the appropriate strip, in turn, is dictated by conditions (5).

With a view toward establishing the admissible values of c , we observe first that the integrand in (12) is a meromorphic function of s , the poles of which coincide with the zeros of the function

$$F(s, p_0) = s P_{s-1}(p_0). \quad (13)$$

It is known⁴⁾ that all zeros of $P_s(p_0)$ are real and simple for every choice of p_0 ($-1 < p_0 < 1$). Also, from the Mehler-Dirichlet integral representation of Legendre functions⁵⁾,

$$P_{s-1}(p) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos[(s-1/2)\lambda] d\lambda}{\sqrt{\cos\lambda - \cos\theta}} \quad (0 < \theta < \pi), \quad (14)$$

whence $P_{s-1}(p_0)$ is positive for $0 \leq s \leq 1$. Consequently, the region $0 < \text{Re}(s) \leq 1$ is contained wholly in a strip of regularity of the integrand in (12), the actual width of this strip depending on the specific value of p_0 . If we take c in the range $0 < c \leq 1$, s conforms to the restrictive assumption underlying (7). It remains to be shown that this determination of the parameter c is also sufficient for (5) to hold; this is indeed the case as will become apparent in the succeeding section.

2. Residue Expansion. Solution in Real Integral Form

We now evaluate the definite integral (12) with the aid of the theorem on residues and thus deduce an infinite series solution of the problem at hand. To this end we assume c fixed in the interval $0 < c \leq 1$ and complete the

⁴⁾ MAGNUS and OBERHETTINGER [3], p. 91.

⁵⁾ See WHITTAKER and WATSON [4], p. 315.

contour of integration in the half-planes which lie to the left or the right of $\operatorname{Re}(s) = c$, according as $0 \leq r < a$ or $a < r < \infty$. Specifically, the two closed contours selected, say C and C' , are defined as follows: they have in common the straight-line segment $\operatorname{Re}(s) = c$, $-\varrho \leq \operatorname{Im}(s) \leq \varrho$ ($\varrho > 0$); in addition, C and C' consist of the respective semi-circles $|s - c| = \varrho$, $\operatorname{Re}(s) \leq c$ and $|s - c| = \varrho$, $\operatorname{Re}(s) \geq c$. Evidently, the integration around C must proceed in a counter-clockwise sense, while C' is to be traversed in the opposite direction.

It follows from the asymptotic expansion

$$P_s(p) = \left\{ \frac{2}{\pi \sin \theta} \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+3/2)} \left\{ \cos \left[\left(s + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + O(s^{-1}) \right\} \right\} \quad (15)^6$$

as $|s| \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0)$

in which Γ is the gamma function, that $P_{s-1}(p)/P_{s-1}(p_0)$ remains bounded as $|s| \rightarrow \infty$. Bearing in mind (12), as well as the definitions of C and C' , we therefore conclude that

$$\left. \begin{aligned} T(r, p) &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(s) ds \quad (0 \leq r < a), \\ T(r, p) &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(s) ds \quad (a < r < \infty), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where

$$f(s) = \frac{T_0 P_{s-1}(p)}{s P_{s-1}(p_0)} \left(\frac{a}{r} \right)^s. \quad (17)^7$$

The poles of the meromorphic function $f(s)$ are coincident with the zeros of $F(s, p_0)$ defined by (13), all of which, we recall, are real and simple, and lie outside the interval $0 < s \leq 1$. These zeros, with the exception of the one at the origin, in turn, coincide with the zeros of $P_{s-1}(p_0)$. Let the positive and negative zeros of $P_s(p_0)$ be designated by $s_k(p_0)$ and $s'_k(p_0)$ ($k = 1, 2, \dots$), respectively, and be ordered in accordance with

$$0 < s_1 < s_2 < s_3 < \dots, \quad -1 > s'_1 > s'_2 > s'_3 > \dots \quad (18)$$

From the recursion formula

$$P_s(p) = P_{s-1}(p) \quad (19)$$

we then have the relations

$$s'_k = -s_k - 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

⁶) ERDÉLYI [5], p. 162. Recall also that $P_s(1) = 1$.

⁷) Here r , p , and p_0 may be regarded as parameters.

On applying the residue theorem to the contour integrals in (16) one obtains, in view of (18), (19), (20), the expansions

$$\left. \begin{aligned} T(r, p) &= T_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{s_k}(p)}{s_k} \left[\frac{dP_s(p_0)}{ds} \right]_{(s=s_k)}^{-1} \left(\frac{r}{a} \right)^{s_k} \right\} \quad (0 \leq r < a), \\ T(r, p) &= -T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{s_k}(p)}{s_k + 1} \left[\frac{dP_s(p_0)}{ds} \right]_{(s=s_k)}^{-1} \left(\frac{a}{r} \right)^{s_k+1} \quad (a < r < \infty). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

In order to demonstrate the absolute and uniform convergence of the two infinite series appearing in (21) for the corresponding range of r and for $0 \leq \theta \leq \theta_0$ it is evidently sufficient to show that

$$\frac{P_{s_k}(p)}{s_k} \left[\frac{dP_s(p_0)}{ds} \right]_{(s=s_k)}^{-1} = O(1) \quad \text{as } s_k \rightarrow \infty, \quad (22)$$

provided $0 \leq \theta \leq \theta_0$ and $0 < \theta_0 < \pi$. To see that (22) holds one merely needs to recall that $P_s(p)$ is bounded for $0 \leq \theta < \pi$ if s is real, bear in mind that $dP_s(p_0)/ds$ cannot vanish at a simple zero $s = s_k(p_0)$ of $P_s(p_0)$, and make use of the asymptotic expansions

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_s(p_0)}{ds} &= \frac{\sqrt{2} \theta_0 \sin[(s+1/2)\theta_0 + 3\pi/4]}{\sqrt{\pi} \sin \theta_0} + O(s^{-1}) \quad (s > 0) \\ \text{as } s \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta_0 < \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

and

$$\left. \begin{aligned} s_k(p_0) &= \frac{\pi}{\theta_0} \left(k - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} + O(k^{-1}) \\ \text{as } k \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta_0 \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Since the functions

$$P_{s_k}(p) r^{s_k}, \quad P_{s_k}(p) r^{-s_k-1} \quad (25)$$

are both harmonic, the same is true of the individual terms in each of the series (21). Further, it is readily verified that the series obtained from (21) by a termwise application of the Laplacian operator (referred to spherical coordinates) remain uniformly convergent in the respective domains $0 < r < a$, $0 \leq \theta < \theta_0$ and $a < r < \infty$, $0 \leq \theta < \theta_0$. Consequently $T(r, p)$ in (21) satisfies LAPLACE'S equation (4). According to the definition of $s_k(p_0)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

⁸⁾ This estimate follows from (14) by differentiation with respect to s and subsequent recourse to an asymptotic result given by ERDÉLYI [6], p. 49.

⁹⁾ PAL [7].

$P_{s_k}(p_0) = 0$, whence (21) conform also to the boundary conditions (3). Finally, (18) and the convergence properties of (21) permit the conclusion that the temperature field under examination meets the regularity conditions (5), as anticipated at the end of Section 1. This completes the verification of the infinite series solution (21) and, by implication, justifies the formal complex integral representation (12) if $0 < c \leq 1$.

A real integral representation for the desired temperature distribution may be obtained from (12) by taking $c = 1/2$ and introducing the change of variables

$$s = \frac{1}{2} + i\xi. \quad (26)$$

In this manner there results after some elementary manipulation

$$T(r, p) = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r} \int_0^{\infty} g(\xi, r, p) d\xi, \quad (27)$$

where

$$g(\xi, r, p) = \frac{\cos\left(\xi \log \frac{r}{a}\right) - 2\xi \sin\left(\xi \log \frac{r}{a}\right)}{\xi^2 + 1/4} \cdot \frac{P_{-1/2+i\xi}(p)}{P_{-1/2+i\xi}(p_0)}. \quad (28)$$

The Legendre functions occurring in (28) are real-valued, as is apparent from (14). It is not difficult to show without recourse to the previous convergence considerations that this alternative representation of the solution fulfills the requirements (3), (4), (5). Such an independent validation of (27) is, however, superfluous. Equation (27), in contrast to the individual infinite series in (21), holds for the full range $0 < r < \infty$.

3. Evaluation of Solution. Numerical Results

In this section we discuss procedures for the numerical evaluation of the results derived in the preceding section. Turning first to the series solution (21), we observe that its evaluation necessitates a knowledge of the zeros $s_k(p_0)$ of $P_s(p_0)$; in addition, one requires the values of $P_s(p)$ and $dP_s(p_0)/ds$ at $s = s_k(p_0)$.

A scheme for the computation of the roots of $P_s(p_0) = 0$ (regarded as an equation in s) was devised by MACDONALD [9]. PAL [7], [8] developed a more efficient method of computation and actually determined $s_k(p_0)$ for $k = 2, 3, 4, 5, 6$ and several choices of p_0 . The family of roots corresponding to $k = 1$, overlooked by PAL, was supplied later on by HORTON [10]. For the sake of convenience, we list in Table 1 relevant values of $s_k(p_0)$ drawn from [7], [8], [10]. Additional entries in this table may be computed readily by PAL's procedure.

Table 1
Values of $s_k(\cos \theta_0)$

$\begin{array}{c} \theta_0 \\ k \end{array}$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
1	8.45	4.13	2.59	1.00
2	20.60	10.03	6.52	3.00
3	32.55	16.02	10.51	5.00
4	44.53	22.01	14.51	7.00
5	56.53	28.01	18.50	9.00
6	68.52	34.01	22.50	11.00

The calculation of $P_s(p)$ on the basis of the Mehler-Dirichlet integral (14) is awkward because the integrand is singular at $\lambda = \theta$. It is more expedient to employ instead the following proper integral representation which may be deduced from (14) through integration by parts.

$$P_s(p) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi \sin^2 \theta} \int_0^\theta \left[\cos \theta (\cos \lambda - \cos \theta)^{1/2} - \frac{1}{3} (s+2)(s-1) (\cos \lambda - \cos \theta)^{3/2} \right] \cos \left[\left(s + \frac{1}{2} \right) \lambda \right] d\lambda. \quad (29)^{10)}$$

An analogous formula for $dP_s(p_0)/ds$ is reached directly from (29) by differentiation with respect to s and need not be recorded here.

For the evaluation of the solution in the integral form (27), (28) the values of the Legendre function $P_{-1/2+i\xi}(p)$ are needed. Suitable tables of this function do not appear to be available. Equation (29), however, yields the computationally convenient integral representation

$$P_{-1/2+i\xi}(p) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi \sin^2 \theta} \int_0^\theta \left[\cos \theta (\cos \lambda - \cos \theta)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(\xi^2 + \frac{9}{4} \right) (\cos \lambda - \cos \theta)^{3/2} \right] \cosh(\xi \lambda) d\lambda, \quad (30)$$

which holds for $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \xi < \infty$. In particular, for $\xi = 0$, (30) implies the well-known result¹¹⁾

$$P_{-1/2}(p) = \frac{2}{\pi} K\left(\sin \frac{\theta}{2}\right), \quad (31)$$

where K is the complete elliptic integral of the first kind.

¹⁰⁾ This equation is valid for $0 < \theta < \pi$. Recall that $P_s(1) = 1$.

¹¹⁾ Cf. ERDÉLYI [5], p. 174.

The numerical evaluation of the proper definite integral (30) for fixed θ ($0 < \theta < \pi$) presents no difficulties. Once the requisite values of $P_{-1/2+i\xi}(p)$ are known one may proceed to the evaluation of the improper integral (27) by numerical means. In this connection it is helpful to have an asymptotic estimate of the corresponding truncation error. Such an estimate may be reached with the aid of the asymptotic formula

$$P_{-1/2+i\xi}(p) = \frac{\exp(\xi \theta)}{\sqrt{2\pi} \xi \sin \theta} [1 + O(\xi^{-1})] \text{ as } \xi \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0), \quad (32)$$

which follows from (15). Indeed (28), (32), and integration by parts, lead to

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\infty} g(\xi, r, p) d\xi &= -2 \left[\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right. \\ &\times \frac{\left[(\theta_0 - \theta) \sin \left(\xi_0 \log \frac{r}{a} \right) + \log \frac{r}{a} \cos \left(\xi_0 \log \frac{r}{a} \right) \right] \exp[-\xi_0 (\theta_0 - \theta)]}{\xi_0 \left[(\theta_0 - \theta)^2 + \left(\log \frac{r}{a} \right)^2 \right]} \\ &\left. + O \left\{ \xi_0^{-2} \exp[-\xi_0 (\theta_0 - \theta)] \right\} \text{ as } \xi_0 \rightarrow \infty \quad (0 < r < \infty, \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0, \varepsilon > 0), \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\infty} g(\xi, r, 1) d\xi &= \\ &= -2 \sqrt{2\pi} \sin \theta_0 \left[\frac{\theta_0 \sin \left(\xi_0 \log \frac{r}{a} \right) - \log \frac{r}{a} \cos \left(\xi_0 \log \frac{r}{a} \right)}{\xi_0 \left[\theta_0^2 + \left(\log \frac{r}{a} \right)^2 \right]} \right] \exp(-\xi_0 \theta_0) \\ &\left. + O \left[\xi_0^{-3/2} \exp(-\xi_0 \theta_0) \right] \text{ as } \xi_0 \rightarrow \infty \quad (0 < r < \infty). \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

Figure 1 shows the variation of the temperature along the axis ($\theta = 0$) of the cone for $\theta_0 = \pi/6$, i.e. for an opening angle of sixty degrees. These numerical values were obtained on the basis of the solution in the real integral form (27), (28) by the scheme just outlined. The underlying numerical integrations were carried out on an I. B. M. 650 electronic computer. The same figure also displays the dependence of T upon r at $\theta = 0$ for $\theta_0 = \pi/2$, i.e. for the special case of a half-space which is exposed to a uniform temperature T_0 over a circular subregion of its plane boundary, the remainder of the boundary being held at zero temperature. A closed solution in terms of elliptic integrals to the latter problem was given previously in [11]. The results found in [11] reduce to an elementary form on the axis of symmetry. Introducing the special values $p_0 = 0$, $p = 1$ into the residue expansion (21), and making use of known prop-

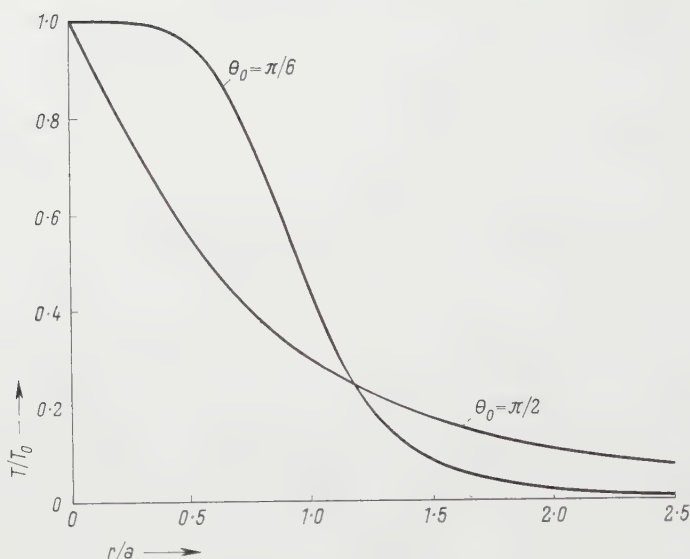


Figure 1
Variation of temperature along axis of cone.

erties of the Legendre functions of the first kind, one arrives at

$$T(r, 1) = T_0 \left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right] \quad (0 \leq r < \infty) \quad (35)$$

when $\theta_0 = \pi/2$, which is in agreement with [11].

Acknowledgment

The authors are greatly indebted to Mrs. L. PAUL who conducted the numerical work involved in this investigation.

REFERENCES

- [1] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1950.
- [2] I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York 1951.
- [3] W. MAGNUS and F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Springer, Berlin 1948.
- [4] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge 1946.
- [5] *Higher Transcendental Functions*, edited by A. ERDÉLYI, Vol. 1, McGraw-Hill, New York 1953.
- [6] A. ERDÉLYI, *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956.

- [7] B. PAL, *On the numerical calculation of the roots of the equations $P_n^m(\mu) = 0$ and $d/d\mu P_n^m(\mu) = 0$ regarded as equations in n* . Bull. Calcutta Math. Soc., 9, 2, 85 (1917).
- [8] B. PAL, *On the numerical calculation of the roots of the equations $P_n^m(\mu) = 0$ and $d/d\mu P_n^m(\mu) = 0$ regarded as equations in n [Part II]*. Bull. Calcutta Math. Soc., 10, 3, 187 (1918).
- [9] H. M. MACDONALD, *Zeros of the spherical harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n* . Proc. London Math. Soc., 31, 264 (1899).
- [10] C. W. HORTON, *Note on the zeros of $P_n^m(\cos \theta)$ and $dP_n^m(\cos \theta)/d\theta$ considered as functions of n* . Bull. American Math. Soc., 53, 2, 153 (1947).
- [11] E. STERNBERG and E. L. McDOWELL, *On the Steady-state Thermoelastic Problem for the Half-space*. Quart. Appl. Math., 14, 4, 381 (1957).

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Bestimmung des stationären Temperaturfeldes, das in einem Kreiskegel durch eine unstetige Verteilung der vorgegebenen Oberflächentemperatur hervorgerufen wird. Die Temperatur der Mantelfläche wird oberhalb und unterhalb einer festen Entfernung von der Kegelspitze konstant angenommen. Dieses Problem wird mit Hilfe der Mellin-Transformation streng gelöst. Die so erhaltene Lösung wird in einer später erscheinenden Arbeit auf die Bestimmung der zugehörigen Temperaturspannungen angewendet.

(Received: December 24, 1959.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Note on the Effect of a Centre of Dilatation in a Semi-Infinite Elastic Solid with its Plane Face Fixed

By SMRITI KANA BHOWMICK, Calcutta, India¹⁾

Introduction

The object of this note is to find the effect of a centre of dilatation in the form of a nucleus of elastic strain (say) inside a semi-infinite elastic solid having its plane face rigidly fixed. The method of solution is simple, and the results are obtained in a closed form.

Solution

We take the plane surface of the isotropic elastic solid as the plane $z = 0$ with the origin O on the surface. The axis of z is drawn into the body. If there be a centre of dilatation at $A(0, 0, c)$, we have the displacement (u, v_1, w_1) due to it in

¹⁾ Jadavpur University, Department of Mathematics.

the form (LOVE, p. 127)

$$[u_1, v_1, w_1] = P \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{1}{R_1}, \quad (1)$$

where P is a constant depending on the strength of the nucleus and elastic constants, while

$$R_1^2 = x^2 + y^2 + (z - c)^2. \quad (2)$$

Taking a nucleus of dilatation of equal and opposite strength at the image point $B(0, 0, -c)$, we have the corresponding displacement (u_2, v_2, w_2) given by

$$[u_2, v_2, w_2] = -P \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{1}{R_2}, \quad (3)$$

where

$$R_2^2 = x^2 + y^2 + (z + c)^2. \quad (4)$$

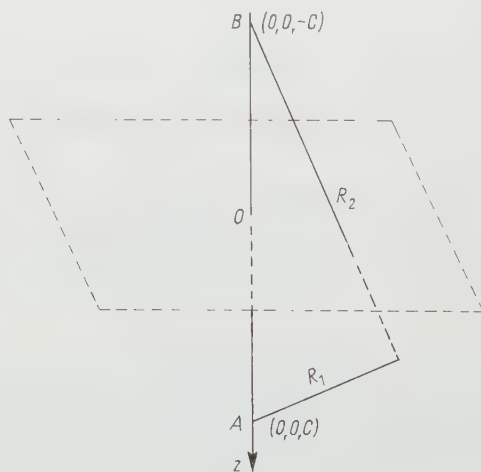
Combining the two systems of displacement (1) and (3) we find that on the surface $z = 0$

$$u_1 + u_2 = 0, \quad v_1 + v_2 = 0 \quad \text{and} \quad w_1 + w_2 = \frac{2Pc}{R^3}, \quad (5)$$

in which

$$R^2 = (x^2 + y^2 + c^2).$$

Since by hypothesis, the plane boundary is rigidly fixed, we are to find the third system of displacement (u, v, w) which will satisfy the equation of equilibrium and nullify the displacements (5) on the surface $z = 0$.



Centre of dilatation in an elastic solid.

The equations of equilibrium in the absence of body forces are

$$\nabla^2 [u, v, w] = -\frac{1}{1-2\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] A, \quad (6)$$

where Δ is the dilatation and σ is Poisson's ratio. Putting

$$\Delta = -2(1 - 2\sigma) \frac{\partial F}{\partial z} \quad (7)$$

such that $\nabla^2 F = 0$, we obtain from (6)

$$\nabla^2 [u, v, w] = \nabla^2 \left[z \frac{\partial}{\partial x}, z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial z} \right] F.$$

Then we can put

$$[u, v, w] = \left[z \frac{\partial}{\partial x}, z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial z} \right] F + [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], \quad (8)$$

where $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ are harmonic functions having prescribed values on the surface $z = 0$. Since we are to nullify the results given in (5), we can take in this case $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Then from the relation

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -2(1 - 2\sigma) \frac{\partial F}{\partial z},$$

we shall have

$$F = -\frac{1}{(3 - 4\sigma)} \varphi_3. \quad (9)$$

Assuming the harmonic function

$$\varphi_3 = 2P \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) = -\frac{2P(z+c)}{R_2^3}, \quad (10)$$

we find that the displacements (5) on the surface $z = 0$ are cancelled. Hence from (7) we get

$$F = \frac{2P}{3 - 4\sigma} \cdot \frac{z+c}{R_2^3}. \quad (11)$$

Substituting these values of φ_3 and F in (8) we get (u, v, w) . The resultant displacements (U, V, W) are therefore given by

$$\left. \begin{aligned} U &= u_1 + u_2 + u = Px \left[-\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} - \frac{6z(z+c)}{(3-4\sigma)R_2^5} \right], \\ V &= v_1 + v_2 + v = Py \left[-\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} - \frac{6z(z+c)}{(3-4\sigma)R_2^5} \right], \\ W &= w_1 + w_2 + w = P \left[-\frac{z-c}{R_1^3} - \frac{z+c}{R_2^3} + \frac{2z}{(3-4\sigma)} \cdot \frac{1}{R_2^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6z(z+c)^2}{(3-4\sigma)R_2^5} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

On calculating stress components from U, V, W , it is found that on the surface $z = 0$,

$$\widehat{xz} = \widehat{yz} = 0, \quad (13)$$

while

$$[\widehat{zz}]_{z=0} = \frac{4EP(1-\sigma)}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \left[\frac{3c^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right]. \quad (14)$$

REFERENCE

A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication.

Zusammenfassung

Es wird das Verschiebungsfeld ermittelt, das im elastischen Halbraum mit fixierter Grenzfläche durch ein Dilatationszentrum erzeugt wird.

(Received: February 8, 1960.)

Permanent Replicas of the Crystalline Structure of Hailstones

By PAGE R. PAINTER¹⁾, and VINCENT J. SCHAEFER²⁾, Schenectady, N.Y., U.S.A.

The internal structure of hailstones has attracted the attention of natural scientists for many years. The recognition of the layering which often occurs dates back at least to VOLTA [1]³⁾, who, in 1800, made a sketch of the onionskin-like appearance of stones which fell at Como, Italy. The more recent work in this field is typified by the elegant cross section of hailstones collected in Switzerland published in color by LIST [2]. Due to the evanescent nature of hailstones, very little of a quantitative nature has thus far been attempted in the United States, although there are few areas in the world where such storms are more frequent or the storms more violent and damaging.

Developing Interest in Hailstorms in America

With the advent of cloud modification and evidence that profound changes can be initiated in cumulus clouds when properly seeded with dry ice and silver iodides [3, 4], a number of serious studies of hailstorms have been conducted in Nebraska, Colorado, New York, West Virginia, Oregon, California in the United States, in Alberta, Canada, in the vicinity of Lake Garda in Italy, the vineyard country of France, and in Switzerland where an excellent, comprehensive research study has been underway for more than five years under the auspices of the Federal Commission for the Study of Hail Formation. The initial work has consisted almost entirely in the operation of silver iodide ground generators. The rather casual efforts of earlier years has more recently been directed toward seeding with intensive networks of ground generators, groups of aircraft and in some cases self destroying rockets.

In much of the work of the past, nothing but very qualitative studies have been made of the end product of the hailstorm – the hailstone. This is understandable since the random nature of severe storms rarely permits the interested scientist to be present during or immediately after the storm when observations are best made. This has been particularly true in the intense storms of the Great Plains of America where the stones often fall in isolated areas.

¹⁾ Davis High School, Davis, California.

²⁾ Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 326.

A new approach to this problem is now possible and its feasibility was demonstrated conclusively during the Summer of 1959.

Research Projects on Hailstorms at the Loomis School

In the Spring of 1959, the senior author was asked to plan and direct a summer school for talented high school students sponsored jointly by the American Meteorological Society and the Loomis School of Windsor, Connecticut, with support from the National Science Foundation.

In drawing up a series of research projects to be pursued by the students, several research activities were directed toward studies of the hailstorms which occasionally ruin the tobacco crop of the mid-Connecticut area. These included the observation of storms by radar, the collection and preservation of hailstones, and the development of methods for preserving their internal structure by a replica technique. All three projects were worked on by students during the summer.

Studies of the Replication of the Structure of Hailstones

In order to develop the replica technique for preserving the crystalline structure of hailstones, hydromites were formed in a cold chamber. These were made by placing water in a polyethylene bag suspended above a cold chamber operating at -20°C and prepared so as to have a very slow leak, permitting one drop to fall about every half minute. The drops froze and gradually built up a cylinder of ice. By varying the rate of falling droplets, it is possible to control the freezing rate at the surface of the hydromite thus producing various sizes and shapes of crystals within the ice. These formations were used in developing techniques for cutting, smoothing, polishing, and etching ice surfaces. After suitable etch figures developed, the surface was coated with a cold (-5°C) 3 percent solution of polyvinyl formal dissolved in ethylene dichloride after the manner described by SCHAEFER [5, 6].

Acquisition of Hailstone Samples

In order to assure that hailstones were available for the critical evaluation of the techniques developed, aid in obtaining hailstones was sought from T. HENDERSON of Weather Modification Company who was working on a hailstorm prevention project in northeastern Colorado. In mid-July an air express shipment of fairly large ($2-2\frac{1}{2}$ cm diameter) hailstones arrived at Windsor. Subsequently, a second shipment of considerably larger stones (up to 5 cm diameter) was obtained from Grand Island, Nebraska, through the excellent cooperation of Mrs. GAYLORD WALLACE of Burwell, Nebraska and S. FLAHERTY of the Grand Island office of the U.S. Weather Bureau.

Technique for Preparing Hailstone Replicas

After making a number of experiments, the authors recommend the following technique for the preparation of hailstone cross section replicas:

1. A block of plastic foam of the styrofoam type is prepared having the dimensions $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 5\text{ cm}$.
2. A depression is made in one surface of the foam about 2 cm in diameter and 0.5 cm deep. Three symmetrically placed holes are poked in the foam at the bottom edge of the depression to anchor the ice which is to be used for adhesive.

3. About one half milliliter (ml) of water is placed in the depression in the styrofoam. The amount of water used depends on the size of the hailstone.

4. The cold hailstone (about -20°C) is placed in contact with the water, causing it to freeze immediately. So long as the assembly is kept colder than 0°C , the stone can thenceforth be handled and manipulated without danger of breakage. The plastic foam is such a good insulator that if the stone is normally kept at about -20°C there is no danger of structural change.

5. The hailstone may be cut in half with a jeweller's saw, an ordinary saw, a mitre saw, or a band saw, depending on the nature and size of the stone. The localized melting which occurs seems to have no effect on the structural features of the stone, provided sawing is done while the ice is at a temperature of -20°C .

6. After sectioning, the surface of the stone is smoothed, using 2/0–100 and 6/0–220 grade sandpaper⁴). These are prepared as strips $6'' \times 22''$ long. They are clamped on a flat board with the working surfaces about $20''$ long. As they become loaded with ground ice new pieces are substituted. Care must be taken that deep scratches from foreign objects do not occur during the grinding procedure, otherwise the replica will not be of good quality. After smoothing the surface is polished.

7. Polishing may be done with chamois, paper felt, or velvetine. This is mounted adjacent to the sandpaper for convenience. While it is desirable to accomplish the polishing without causing surface melting, it has been observed that when an ice surface is polished so vigorously as to cause localized melting, the etch figures develop without apparent modification. This presumably is due to the presence of the crystalline structure directly below which immediately replicates the underlying crystal patterns even if a thin melt layer forms momentarily.

8. After polishing the surface, the hailstone is held at a temperature of about -20°C for 15 to 30 minutes in a cold chamber or a cold room at a humidity lower than ice saturation. Localized evaporation from the ice crystal matrix forming the surface occurs as ice molecules sublime away, leaving behind crystalline patterns identical in visual appearance to the figures which appear on etched metallographic specimens.

9. After the etch figures become visible on the surface of the hailstone, a layer of replica solution should be flowed over the surface. This should consist of 5% polyvinyl formal dissolved in ethylene dichloride. This solution should have a temperature of -5°C , and, after coating, the surface should be inclined at 45° to drain off excess material. The specimen should be placed in a chamber with some ventilation and held at a temperature of about -20°C until the solvent has completely evaporated. This normally occurs in about 20 minutes.

10. The replica film may be recovered in several ways. By holding the hailstone at -5°C for a day or so, sufficient sublimation occurs through the film to loosen the replica film from the surface. This film may be carefully lifted and transferred to a glass slide for mounting. In the event additional sections are to be made of the stone, a cut can be made about 2 millimeters below the film on the band saw and the thin section melted from the replica film by placing it on a glass slide with the film-coated surface against the glass. If the stone is to be sacrificed, the same procedure may be followed, or it may be placed in a tray of water with the film on the surface, and, after the stone is melted, the replica slid onto a glass slide for mounting. Another effective procedure is to keep the stone in a warm room until surface melting occurs, at which time the film may be slid off the surface onto a glass slide wet with water. The replica film is preferably mounted with the smooth upper surface in contact with the glass plate.

⁴) We use Behr-Manning Adalox No. 6931 and No. 364.

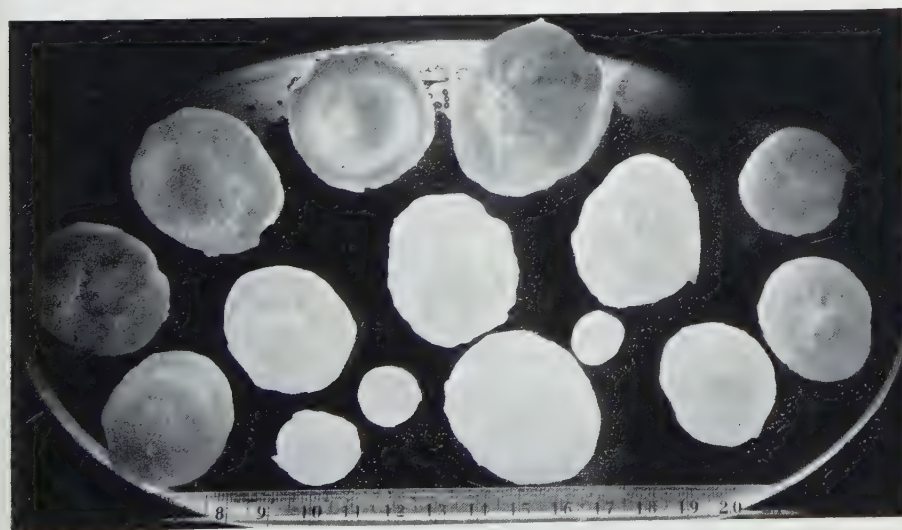
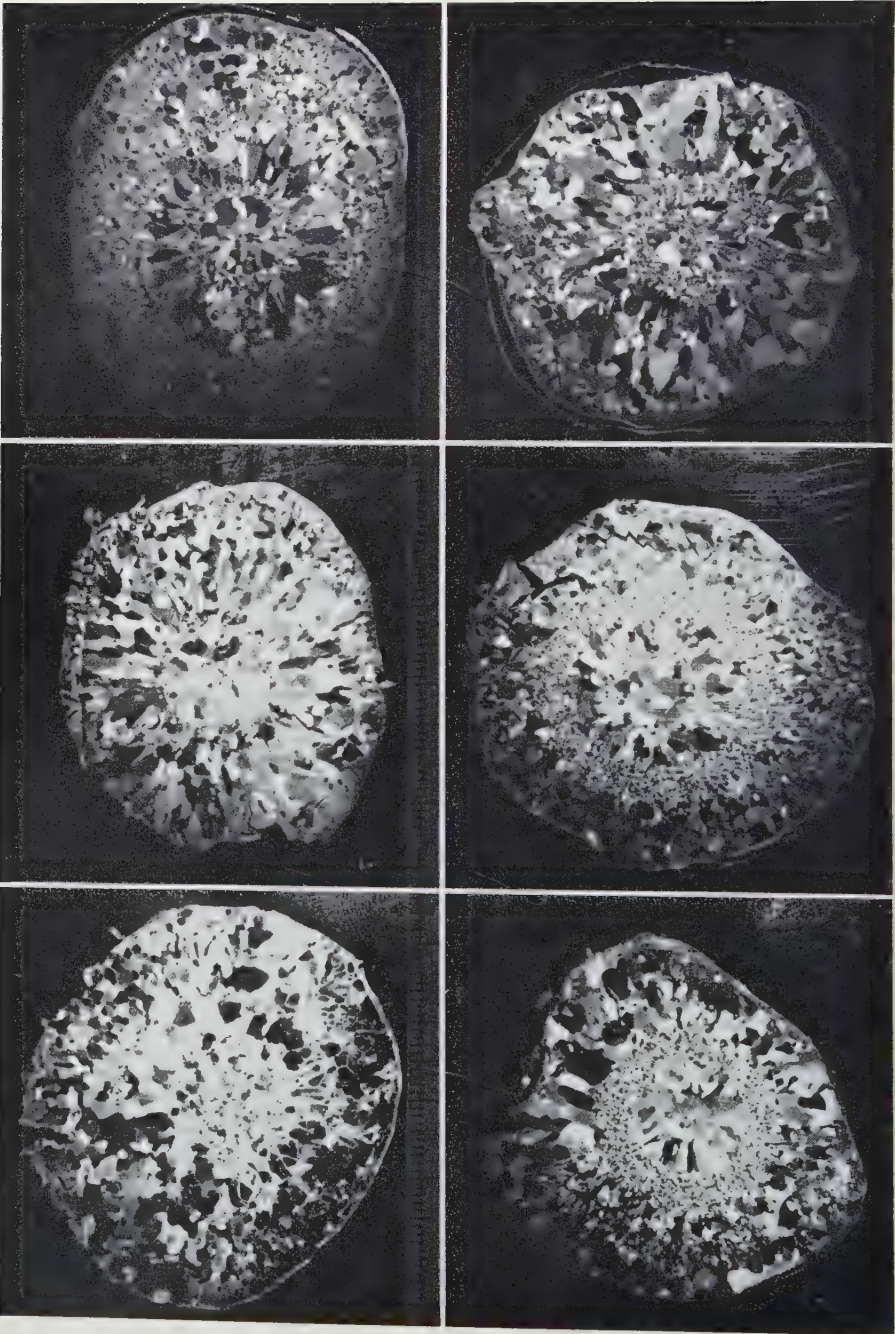


Figure 1

Hailstones from two severe storms in the Great Plains of the United States:

Upper: Grand Island, Nebraska, June 27, 1959.

Lower: Sterling, Colorado, July 17, 1959,



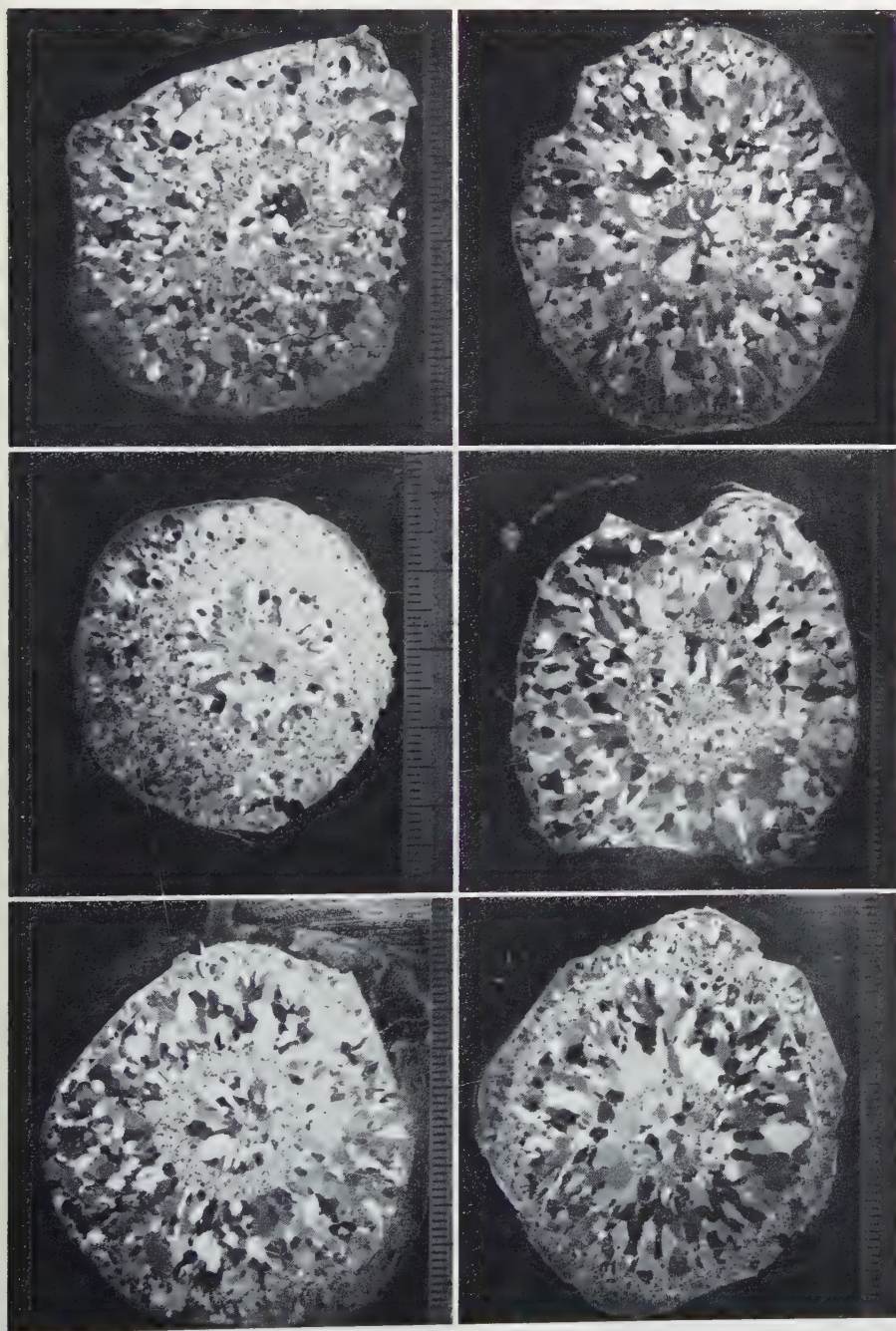


Figure 2. Replicas of hailstones from Grand Island, Nebraska, storm of June 27, 1959. Replicas of mid-section cut.

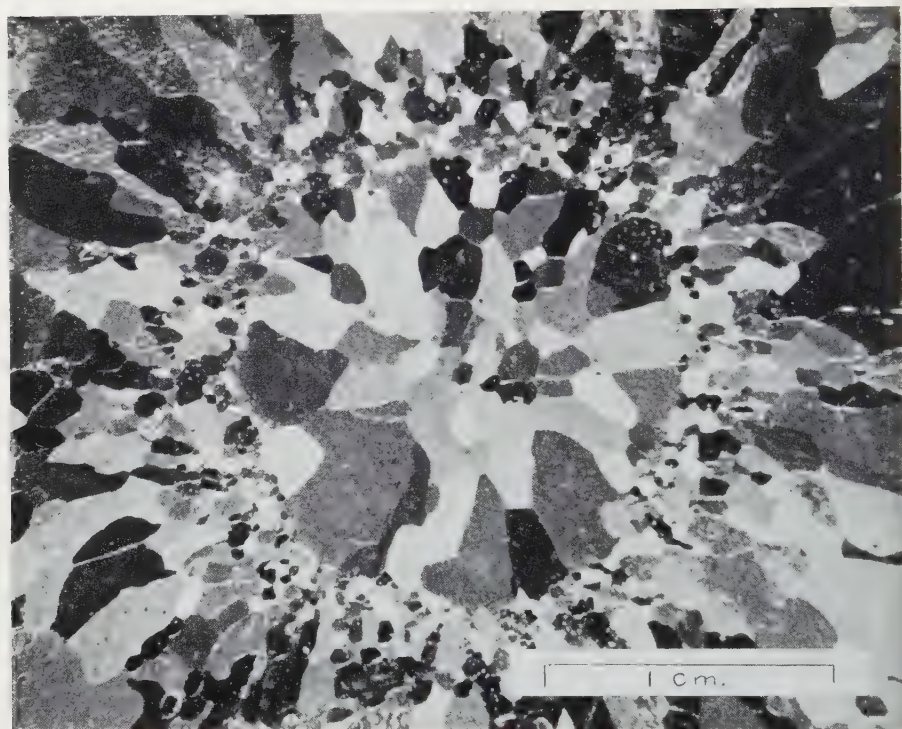


Figure 3. Detail shown by replica at center of hailstone. Replica of etched surface varies in brightness as replica is rotated.

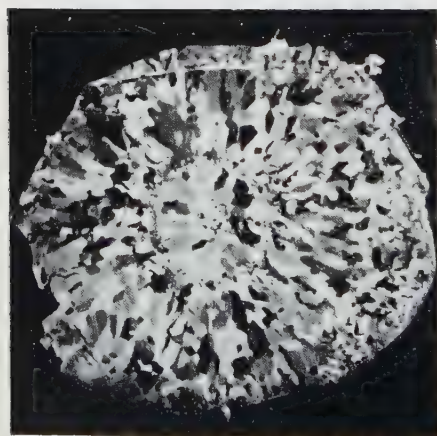


Figure 4a. Appearance of replica in normal light. Figure 4b. Appearance of replica between crossed polaroids with air inclusions showing polarized refraction.

11. After drying, the replica should be covered with another sheet of glass or plastic to protect it from the dust. It can then be used as a lantern slide or for the preparation of photomicrographs.

Figure 1 illustrates typical hailstones collected from two damaging storms which occurred in the Great Plains area of America during the Summer of 1959. They were collected in the field and shipped to us at the Loomis School more than a thousand miles away. They arrived 48 hours later in excellent condition.

The first shipment was received by air express from Sterling, Colorado, nearly 2000 miles from Connecticut. About twenty pounds of dry ice surrounded the shipment which was packed in crumpled newspapers contained within a double box of corrugated cardboard. The hailstones arrived 48 hours later, dry and in perfect condition with about half of the dry ice still remaining.

The second shipment came from Grand Island, Nebraska. Although a similar packing arrangement was suggested, the packer placed the stones on top of fifty pounds of dry ice and surrounded the stones with crumpled newspapers. Some surface melting had occurred on the stones farthest removed from the dry ice but not enough to cause serious damage. This near disaster showed the importance of placing dry ice both above and below the specimens. In this latter case, more than half of the dry ice remained in the package after two days.

By use of this technique and the cooperation of farmers, meteorologists, and other cooperative parties, the damaging products of hailstorms become readily available to the atmospheric physicist for research studies.

The composite photo in Figure 2 illustrates an assembly of replicas prepared in the manner described. Figure 3 illustrates the detailed structure observed in the vicinity of a zone of concentric banding. Figure 4a illustrates a replica photographed normally and 4b the same replica as seen between crossed polaroids. The zones transmitting light represented areas containing voids which may be the same as those found to contain liquid water by LIST. These voids develop with the aging of hailstones at temperatures between -15°C and -25°C and may represent areas containing impurities. These and other interesting structures and phenomena observed during the current studies will be discussed in more detail in a subsequent paper.

The replica method for studying hailstones has a number of interesting and attractive features. It permits the preparation of large numbers of permanent cross sections of hailstones, it permits the "reconstruction" of a hailstone since successive sections can be made from one side of the stone to the other, and because of the ease of preparation and the relative inexpensive nature of the equipment needed, the method should lead to increasing the availability for study of a much larger number of examples of these interesting hydrometeors.

Acknowledgments

The authors wish to express appreciation to Mr. THOMAS HENDERSON of the Weather Modification Company of San Jose, California, who devised the hailstone-shipping method (based on his tried and tested method of shipping trout) and who secured the samples from a hailstorm which occurred at Sterling, Colorado, and were used for our initial experimental studies.

Also, our deep thanks go to Mrs. GAYLORD WALLACE of Burwell, Nebraska, and Mr. STEVE FLAHERTY of the Grand Island, Nebraska, office of the U.S. Weather Bureau, who cooperated in sending us more than a hundred large hailstones from the severe storm which occurred in their area on the night of June 27, 1959. ANTHONY MCCLIMANS, a fellow student at Loomis, was responsible for securing the

cooperation which resulted in the shipment of stones from Nebraska. DOUGLAS CARTER, of the Loomis School staff, and LARRY MAHAR, of the Bradley Field station of the Weather Bureau, were of vital assistance in obtaining the shipment at its destination and stowing it safely in our cold chamber.

REFERENCES

- [1] VOLTA, A., An original Alessandro Volta manuscript preserved at the "Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere di Milano", Italy, and dealing with hailstone structure observations done by VOLTA himself at Como during the Summer of 1800.
- [2] LIST, R., ZAMP 9, 217 (1958).
- [3] SCHAEFER, V. J., *Experimental Meteorology*, ZAMP 1, 153–184; 217–236 (1950).
- [4] SCHAEFER, V. J., *The Seeding of Cumulus Clouds by Ground Based Silver Iodide Generators*, ZAMP 10, 174 (1959).
- [5] SCHAEFER, V. J., *A Method of Making Replicas of Snowflakes, Ice Crystals, and other Shortlived Substances*, Museum News 19, 11 (1941).
- [6] *A New Method for Studying the Structure of Glacier Ice*, J. Glaciology 1, 440 (1950).

Zusammenfassung

Es wird eine Technik für die rasche Zubereitung dauerhafter Abgüsse (Replicas) der Struktur von Hagelsteinquerschnitten geschildert. Das Verfahren dürfte sich als besonders förderlich in Studien über die innere Struktur solcher Partikeln erweisen. Alle Vorkehrungen können in einem Raum normaler Temperatur vorgenommen werden, sofern eine Kühltruhe mit einer Betriebstemperatur bis -20°C zur Verfügung steht.

Die Hagelschlossen werden auf einem Block aus plastischem Schaum verankert, mit einer Säge in zwei Teile geschnitten und die Schnittflächen mit grobem und feinem Sandpapier geschliffen und schliesslich über Samt geglättet, für welche Vorkehrungen nicht mehr als einige wenige Minuten benötigt werden. Hierauf werden die Eiskörper für etwa 15 min bei einer Temperatur von -20°C gehalten, oder so lange, bis sich auf den polierten Schnittflächen infolge Sublimation (Verdampfung) Ätzfiguren ausgebildet haben.

Die geätzten Eisoberflächen werden mit einer 5%igen plastischen Lösung von einer Temperatur von -5°C überzogen und nach Abtropfen der überschüssigen Lösung alsdann auf -20°C gehalten, bis das Lösungsmittel verdunstet ist. Die entstandenen plastischen Filme werden hierauf von der Eisoberfläche abgestreift und zwischen zwei Glasplatten gebracht. Sie können in dieser Form entweder photographiert werden oder schliesslich als Diapositive Verwendung finden. Lichtbilder von natürlichen Hagelschnittflächen und solche von Abgüssen illustrieren die Leistungsfähigkeit des Verfahrens.

(Received: November 4, 1959.)

Measurements of Two-Dimensional Zero-Lift Interference of Ventilated Boundaries at Speeds up to Sonic

By DHANVADA M. RAO, and MATHAGONDAPALLY A. RAMASWAMY, Bangalore, India¹⁾

Introduction

The successful development of ventilated wall test-sections has not only eliminated the basic difficulties involved in transonic testing, but has also made possible the use of much larger relative model sizes than was hitherto considered advisable, in the conventional type of tunnels, from the viewpoint of wall interference. This latter fact is of particular interest to workers in most research institutions whose limited resources permit only small-scale facilities in the field of experimental high-speed aerodynamics.

While it is known that, for the normal model blockage values, most ventilated test-sections have small interference at subsonic speed, for larger models the boundary interference may have a peculiar distribution over the model length, depending upon the wall geometry, which can lead to a cumulative interference of appreciable magnitude particularly with Mach numbers approaching unity. The interference pattern for Mach numbers greater than the model critical Mach number lies outside the scope of the linear theory, which also does not account for any viscous effects. The boundary layer is of considerable thickness particularly on perforated walls, and further, is subject to complex pressure gradients resulting from the model flow field being projected on the boundary with increasing intensity as the Mach number approaches unity, and its effect in modifying the boundary conditions represented by the slotted and perforated walls remains as yet relatively unknown.

The purpose of this note is to present some results of experiments carried out at the High-Speed Aerodynamics Laboratory of the Aeronautics Department, Indian Institute of Science (during March/April 1958), with typical slotted and perforated walls in two-dimensional zero-lift flow with the specific aim of observing the interference characteristics of such boundaries. A half-nozzle arrangement was used in order to work at the maximum possible Reynolds Number in the small tunnel available, and a large relative model size was chosen to make the boundary interference, and the variations in it, identifiable. By comparing the data from the present tests with 'standard', i.e. interference-free data for the same model [1]²⁾, the variation of the blockage interference at mid-chord with free stream Mach numbers up to unity, as well as the chord-wise distribution of interference, were determined for three slotted and two perforated walls.

Symbols and Definitions

- $M_{\infty T}$ Tunnel free-stream Mach number,
 $M_{\infty F}$ Free-stream Mach number for interference free case,

¹⁾ Department of Aeronautical Engineering, Indian Institute of Science.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 334.

V_∞ Tunnel free stream velocity,

\bar{V}_h Mean cross-flow velocity through hole,

\bar{V}_y Mean vertical velocity component at the boundary,

q Tunnel free-stream dynamic pressure,

Δp Pressure-drop through the wall,

$K_h = (\Delta p/q)/(\bar{V}_h/V_\infty)$,

$K = (\Delta p/q)/(\bar{V}_y/V_\infty)$,

Blockage interference factor: $\Delta M_\infty/M_{\infty T} = (M_{\infty T} - M_{\infty F})/M_{\infty T}$ (Numerator is the difference between the tunnel and the free-air upstream Mach numbers corresponding to the same local Mach number on the model at a given point).

Open area ratio = $\frac{\text{Total open area of slots/perforations}}{\text{Nozzle (length} \times \text{width)}}$.

Experimental Details

Figure 1 shows the details of the nozzle and the model, fitted to the 3" \times 1" blow-down wind tunnel of the High-Speed Aerodynamics Laboratory. The venti-

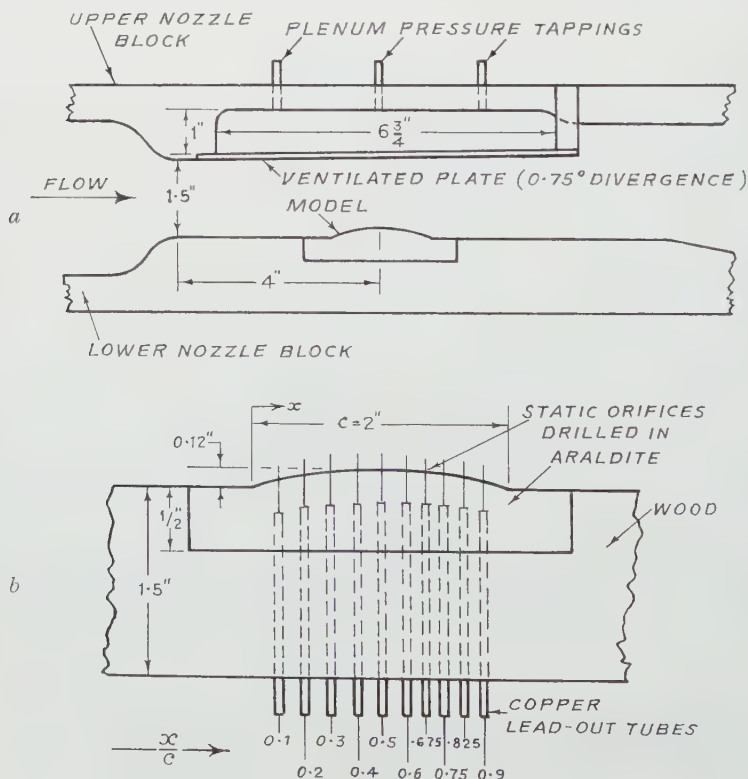


Figure 1

a Details of test section. b Details of model showing static pressure orifice locations.

lated test boundaries were represented by 1/8" thick aluminium slotted or perforated plates fixed to the upper nozzle liner (having a 1" deep plenum chamber) at a divergence angle of 0.75 degrees, relative to the lower liner surface, to compensate for boundary layer growth.

The model, a 2"-chord 6%-thickness ratio circular-arc bump, was shaped from a block of 'Araldite' cast into the lower wooden nozzle liner, carrying the pressure lead-out tubes. The test Reynolds number based on model chord was about 1 million at $M_{\infty T} = 1.0$.

All pressures were measured on mercury manometers, and converted to Mach number on the basis of free-stream stagnation pressure, using isentropic compressible flow tables. The Mach numbers are believed to be correct to ± 0.005 .

Before conducting tests with the model, empty-nozzle flow was observed for all the ventilated walls, and the longitudinal pressure distributions were found to be satisfactory in all cases up to a Mach number of unity. With empty nozzle, there was a close agreement between the mean nozzle static pressure and the plenum chamber pressure for all Mach numbers.

With the model present, the free stream Mach number in the nozzle, $M_{\infty T}$, in all the runs was obtained by observing the static pressure distribution upstream of the model along the centre line of a side wall, and using a mean value of the static pressure in a region of nearly uniform flow. Due to considerable outflow through the walls induced by the model, there was a large difference between the plenum pressure and the mean free stream static pressure in all cases (e.g. see Figure 3D).

Visual flow observation was carried out during the tests using a 4-feet focal length concave mirror Schlieren system, and a series of Schlieren photographs were obtained using 1/100 s exposure on Kodak Tri-X film. Typical flow patterns are shown in Figure 4.

The geometric details of the ventilated walls tested are given in the following table:

No.	Type	Open Area	Geometry
1	Slotted	6.25%	2 slots \times 1/32"
2	Slotted	12.50%	4 slots \times 1/32"
3	Slotted	9.40%	3 slots \times 1/32"
4	Perforated	18.20%	1/8" dia. holes
5	Perforated	10.20%	3/32" dia. holes.

Results and Discussion

(1) Axial blockage distribution

The axial distribution of blockage interference, which is a measure of the flow distortion due to the tunnel boundary causing the flow past the model to depart from any possible free-flight flow pattern, has been theoretically shown to be symmetrical for symmetrical models in solid, open and slotted test-sections, whereas for the perforated boundaries an unsymmetrical distribution of interference exists at subsonic speeds [2]. As pointed out by MAEDER and WOOD [3], in the application of the thin aerofoil theory to the problem of perforated wall interference, the imposition of the Kutta condition at the trailing edges of the solid

'lifting' portions of the wall (the 'lift' appearing through the pressure drop across the wall) causes a distinctive orientation in the flow. This leads to an asymmetrical distribution of the boundary interference velocity potential even when the obstacle shape is symmetrical. In physical terms, there is an inflow from the plenum in the model region, and a corresponding outflow from the nozzle upstream of the model, leading to reduced local velocities on the front part of the model and an increase over the rear.

Further, the theory shows [2] that with an increasing Mach number this asymmetry is gradually reduced while the magnitude of the interference at the model increases until, with the Mach number approaching unity, the interference distribution tends towards that of the open jet (i.e. symmetrical) while its magnitude at the model tends to infinity.

Using the data measured in the present tests, an attempt was made to investigate the above theoretical predictions, and some results are shown in Figure 2, where the chordwise distribution of the blockage interference factor for a slotted wall (No. 3) and a perforated wall (No. 4) are compared for four Mach numbers.

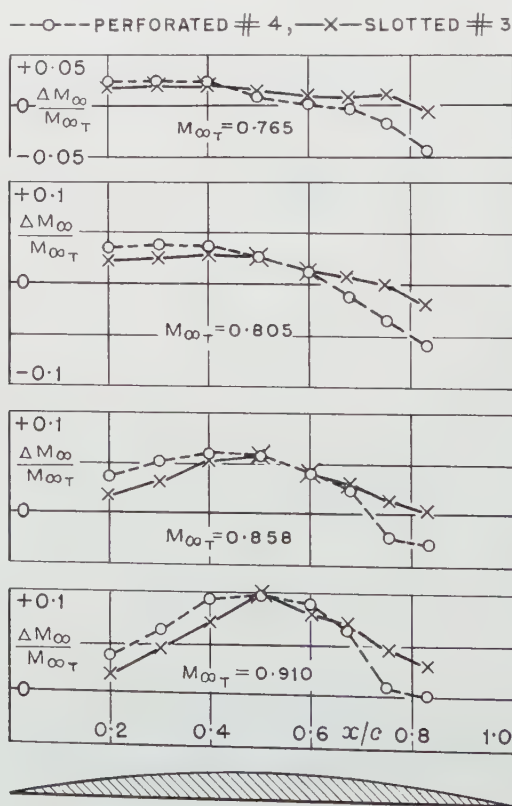


Figure 2

Comparative axial blockage distributions for slotted and perforated boundaries.

It may be pointed out at this stage that in half-model tests such as the present ones (particularly in the two dimensional case) there is a certain amount of flow distortion at the model due to the displacement thickness of the boundary layer of the reflection-plane wall. The flow distortion indicated by the curves in Figure 2 is therefore the combined effect of the wall-interference and the boundary-layer influence. The latter aspect may be considered briefly before discussing the boundary interference.

The boundary layer effect in the present case consists primarily of the elimination of the front stagnation point, reduction of pressures near the leading edge, and a modification of the trailing edge condition due to wake interference. The major middle portion of the model chord however remains relatively unaffected due to the rapid flow acceleration and consequent thinning of the boundary layer [4]. In the present tests the flow over the middle 60% of the chord only has been considered, and therefore the data shown in Figure 2 may be taken to be substantially correct quantitative representation of the wall boundary interference. In any case, the boundary layer distortion effect remains constant as the ventilated walls are changed, and on this account the curves of Figure 2 will at least be expected to display the correct comparative trends.

As seen in this figure, for the four values of the free stream Mach numbers in increasing order, there is a continuous increase of the mean blockage (of the free-jet type in all cases). The greatest difference between the interference distributions for the slotted and perforated walls, however, is apparent at $M_{\infty T} = 0.805$. For Mach numbers below this value, the magnitude of the mean interference over the chord is not large enough to show any systematic differences for the two kinds of boundaries, and for higher Mach numbers, as predicted by theory, the asymmetry of the blockage distribution for the perforated wall diminished so that the two curves show similar (i.e. fore-aft symmetrical) form. It may be noted here that the theoretical value of the Mach number for maximum anti-symmetry (i.e. when $K\sqrt{1 - M_{\infty T}^2} = 2.56$) as calculated for a doublet [2] for this particular perforated wall is 0.93, a figure which is too high however, for the linear theory to be valid; (actually, as is shown in Figure 3 and will be discussed in the next section, at this Mach number for which the theoretical mid-chord interference is zero, the blockage factor as measured at this location is about 0.1).

The blockage interference distribution curves for the other perforated wall (No. 5, not shown) were also seen to display similar characteristics.

It may be mentioned that, considering the errors to which the blockage factors as computed here are subject (being the small difference between two Mach numbers which are themselves correct only to ± 0.005), the curves of Figure 2 show remarkable regularity. This further supports the belief that these data are reasonably accurate.

(2) Blockage variation with Mach number

The variations of mid-chord value of blockage interference factor with free stream Mach number for the different boundaries are compared with theory in Figure 3. It is seen that for the slotted walls (all the three of which have nearly the same theoretical interference), the observed values lie close to the theory [5] up to $M_{\infty T} = 0.8$.

For the perforated walls, however, there is seen to be a substantial difference between theory³⁾ and experiment even at subcritical Mach numbers, which may

³⁾ Theoretical curves calculated from References [2], [5] and [6].

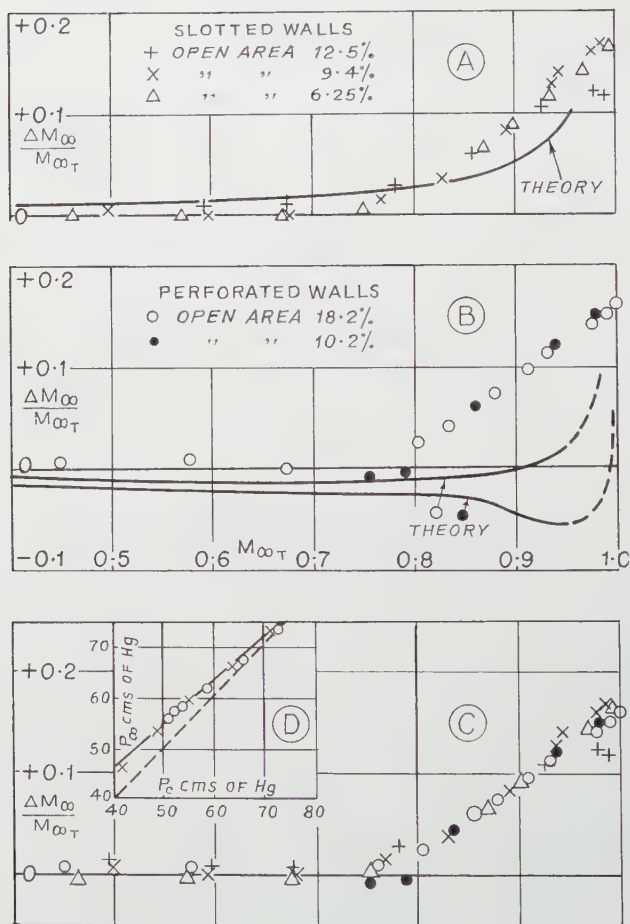


Figure 3

Mid-chord blockage variation with Mach number.

be explained in terms of the rather large viscous effects expected for the particular walls tested. It has been observed that for perforated plates with hole diameter of the same order as the plate thickness, as in the present case, the pressure-drop/cross-flow relationship, which is the fundamental factor affecting the interference characteristics of the wall, is irregular and non-linear [2]. In particular the slope $K_h = (\Delta p/q)/(V_h/V_\infty)$ remains small and considerably less than the theoretical value over the range of cross mass flows of interest. The final effect is to reduce the interference of a boundary which theoretically gives a solid-wall type of blockage, and increase that of a boundary having a theoretical interference of the free-jet type. Thus, as seen in Figure 3B, although theory predicts a solid-wall type blockage for both the perforated walls, the interference actually observed is nearly

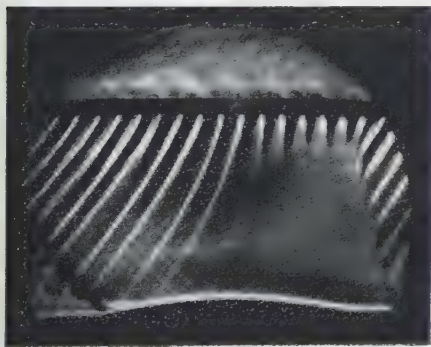
zero up to $M_{\infty T} = 0.75$, beyond which it is of the free-jet type, rising almost linearly to a blockage factor value of about 0.15. Further, the two perforated walls appear to have almost identical interference up to sonic speed, whereas the theory indicates a larger interference for the wall with a smaller open area.

In Figure 3C, all the mid-chord blockage interference versus Mach number results discussed above have been collected together, and here is apparent a rather remarkable quantitative similarity between the interference characteristics of the slotted and perforated walls investigated in the present experiments. This is probably the consequence of very similar pressure-drop characteristics of the different walls, although they differ greatly in geometric configuration. Some evidence of this may be seen in Figure 3D, which shows the relation between the nozzle free-stream static pressure for the slotted No. 3 and perforated No. 4 walls, obtained with the model present in the nozzle. The plenum pressure is lower than the free-stream value due to the drop caused by the outflow through the wall induced by the model. This pressure drop is seen to be identical for these two walls, which, out of the five walls tested, are the most different from each other in geometric configuration.

(3) *Schlieren flow observation*

Two of the Schlieren photographs obtained during the present tests are shown in Figure 4. These were selected mainly to show the following features:

Perforated Wall No. 4



Slotted Wall No. 3

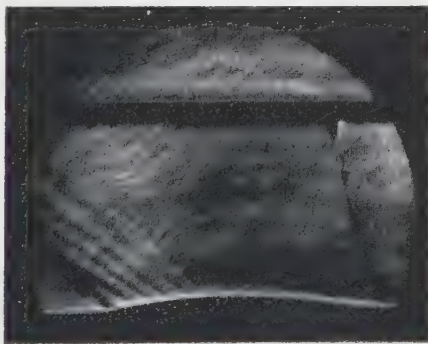


Figure 4

Schlieren pictures of flow past 6% bump with slotted and perforated boundaries $M_{\infty T} \approx 1.1$.

- (a) For the perforated wall, the intensity of disturbances introduced by perforations into the nozzle flow,
- (b) For the slotted wall, the shear layer in the plenum chamber originating at the point of contact of the bow wave with the wall, indicating a strong outflow at this point, and
- (c) The highly distorted bow wave in both cases.

Conclusions

- (1) Typical slotted and perforated boundaries, with area ratio ranging between 6% and 18%, are found to yield negligible blockage interference (blockage factor

not exceeding 0.01) up to the model critical Mach number, with a model of blockage area as large as 8% in the two-dimensional zero-lift case.

(2) For slotted boundaries, the available theory for two-dimensional blockage interference appears adequate up to the model critical Mach number. For the perforated boundaries, however, the actual cross-flow/pressure-drop characteristics of the given boundaries must be used for calculating the interference, even at sub-critical Mach numbers.

(3) The slotted and perforated walls tested show almost identical mid-chord blockage interference variation with Mach numbers up to unity, in spite of the differences in geometric configuration. Some evidence is indicated to suggest a correlation in terms of the similarity of the pressure drop characteristics of the particular slotted and perforated walls.

REFERENCES

- [1] MICHEL, MARCHAND, and LE GALLO, *Etude des écoulements transsoniques autour des profils lenticulaires à incidence nulle*, ONERA-Publication Nr. 65 (1953).
- [2] GOETHERT, *Flow Establishment and Wall Interference in Transonic Wind Tunnels, Sixth Meeting of Wind Tunnel and Model Testing Panel* (A.G.A.R.D.).
- [3] MAEDER and WOOD, Transonic Wind Tunnel Test-Sections, *Z. angew. Math. Phys.* 7, No. 12 (May 1956).
- [4] KRISHNAMURTHY, *An Investigation of the Reflection Plane Boundary Effects in Half-Model Tests on a 10% Double Wedge Aerofoil*, H.S.A.L. Report Nr. 14, Department of Aeronautics, Indian Institute of Science, (1959).
- [5] DAVIS and MOORE, *Analytical Study of Blockage Interference Corrections for Slotted Tunnels Obtained by the Substitution of an Equivalent Homogeneous Boundary for the Discrete Slots* (NACA, RM. L53E07b).
- [6] FLAX, ROSS, KELSO and WILDER, *Development and Operation of the C.A.L. Perforated Throat Transonic Wind Tunnel*. Annual Summer Meeting of the Institute of Aeronautical Sciences, (June 1954).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden einige experimentelle Resultate aus dem High-Speed Aerodynamics Laboratory, Bangalore, veröffentlicht. Untersucht wurde die Störung durch die halbdurchlässigen Seitenwände des Windkanals, wie sie bekanntlich zur Verminderung der Wandinterferenz im transsonischen Gebiet zur Anwendung gelangen. Als Testobjekt wurde ein halbes, symmetrisches Kreisbogenprofil verwendet. Der Einfluss von drei geschlitzten und zwei durchlöcherten Wänden mit zwischen 6 und 18% offener Fläche auf die Sperr-Mach-Zahl wurde im Gebiet $M = 0,7$ bis 1,0 gemessen. Bei einer Mach-Zahl bis 1,0 haben sich die Störungseigenschaften in der Mitte des Profils bei den fünf untersuchten Grenzflächen trotz den Unterschieden in geometrischer Konstruktion als beinahe identisch erwiesen. Die experimentellen Befunde werden mit den Ergebnissen der heute verfügbaren Theorien verglichen; für die geschlitzten Wände wird zureichende Übereinstimmung bis zur kritischen Mach-Zahl für den Testgegenstand gefunden, während für die perforierten Grenzflächen die Wirkungen der Reibungskräfte zu beträchtlichen Unstimmigkeiten für alle subsonischen Machzahlen führen.

(Received: December 3, 1959.)

ASICA

Association Internationale pour le Calcul Analogique
(Bruxelles, 50 Avenue Franklin D. Roosevelt)

International Association for Analog Computation

Internationale Vereinigung für Analogierechentechnik

deren Präsident, Prof. J. HOFFMANN, in Brüssel ist, beschäftigt sich mit allen Fragen der Analogierechentechnik. Dazu gehören zwei Untergruppen. Zur ersten zählte der eigentliche *Analogrechner*, der für die Lösung sehr vieler und verschiedener Probleme verwendet werden kann und der aus einer grösseren Anzahl gleichartiger Elemente, wie Verstärker mit sehr hohem Verstärkungsgrad, Integratoren, Schaltelemente, wie Widerstände, Potentiometer, Kapazitäten und Dioden, sowie aus nichtlinearen Elementen besteht. Diese werden entsprechend dem «Analogschaltbild» zu Ketten zusammengefügt und gestatten vorwiegend die Lösung von Problemen der Schwingungslehre und der Regelungsautomatik. Für sinus- und nichtsinusförmige Schwingungen, für Frequenzgangbestimmungen und für transiente Vorgänge eignet sich der Analogrechner besonders gut. Seine Funktionsweise liegt dem Ingenieurdenken recht nahe. Die Resultate erscheinen in Form von Oszillogrammen, bei welchen relativ leicht der Einfluss von Änderungen der Parameter beobachtet werden kann. Die Präzision des Resultates hängt entscheidend von der Genauigkeit der einzelnen Bauelemente ab, sie liegt in der Gegend von Prozenten oder Promillen. Der Preis der Analogrechner steigt enorm mit der gewünschten Genauigkeit. Partielle Differentialgleichungen lassen sich nicht so bequem behandeln. Der Vorteil der Digitalrechner ist deren hohe Präzision.

Die zweite Gruppe von Analogiegeräten sind *Modelle* oder *Simulatoren*; sie werden für jedes einzelne Problem besonders hergestellt. Dazu gehören der elektrolitische Trog, die elastische Membran sowie zwei- und dreidimensionale Netzwerke, mit denen partielle Differentialgleichungen behandelt werden können. Zur Lösung von Potentialproblemen, z. B. der Feldverteilung in einer Triode, sowie in einem Transistor oder der Strömungslinien um einen Flügel eignen sich elektrische Netzwerke (rheoelektrische Analogie).

Die ASICA führt alle 3 Jahre einen grossen internationalen Kongress durch, so 1955 in Brüssel, 1958 in Strassburg und im September 1961 in Belgrad, und gibt hierüber ein Berichtswerk in französischer und englischer Sprache heraus. (Presses Académiques Européennes, Bruxelles). Daneben erscheint alle 3 Monate ein Heft:

Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique,
Presses Académiques Européennes, Bruxelles,

in welchen Einzelprobleme der Analogierechentechnik, Informationen über die internationale Tätigkeit und die Literatur besprochen werden.

Die Analogierechentechnik wird auch in der Schweiz und an der ETH in stark zunehmendem Masse Verbreitung finden.

ED. GERECKE, Vizepräsident der ASICA,
Institut für Allgemeine Elektrotechnik der ETH.

Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrhunderts. *Lise Meitner, Otto Hahn und Max von Laue zum 80. Geburtstag.* Herausgegeben von O. R. FRISCH, F. A. PANETH, F. LAVES und P. ROSBAUD (Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1959). 285 S., 89 Fig.; DM 29.50.

Die vorliegende Sammlung von Aufsätzen ehrt die drei grossen Forscher LISE MEITNER, OTTO HAHN und MAX VON LAUE zu ihrem 80. Geburtstag. Es ist eine erstaunliche Tatsache, dass diese drei Jubiläen innerhalb eines Jahres stattfinden.

Natürlich ist es nicht möglich, auf dem zur Verfügung stehenden Raum die 25 einzelnen Beiträge auch nur aufzuführen.

Erwähnt seien aber die Beiträge der Zürcher Professoren HEITLER über *The Penetration of Gamma-Rays through Matter and the Development of Radiation Theory* und LAVES über *Kristallstruktur und Kristallchemie von Elementen und metallischen Verbindungen*.

Etwa ein Drittel der Abhandlungen ist historisch orientiert und beschwört jene, den meisten von uns unbekannte, Zeit herauf, da mit heute unglaublich einfach anmutenden Instrumentarien die experimentelle Grundlage der modernen Atomphysik geschaffen wurde. Die ungemein wichtigen Beiträge der drei Gefeierten zu diesen Grundlagen sind genügend bekannt und brauchen hier nicht aufgeführt zu werden. Es genügt, darauf hinzuweisen, dass ohne diese Leistungen kaum eine der übrigen Abhandlungen hätte geschrieben werden können.

Das Spektrum dieser Arbeiten ist ausserordentlich breit und reicht von der Geochemie bis in die Biologie, etwa zur röntgenographischen Abklärung des Baus von komplizierten organischen Molekülen.

Mit der Redaktion des Bandes waren O. R. FRISCH, F. A. PANETH, F. LAVES und P. ROSBAUD betraut. Sie haben mitgeholfen, ein eindruckliches Denkmal zur Physik und Chemie der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts zu schaffen. R. JOST

Handbuch der Kältetechnik, Bd. VII: *Sorptions-Kältemaschinen*. Von W. NIEBERGALL. Herausgegeben von R. PLANK (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959). 540 S., 258 Abb.; DM 96.—

Jeder, der sich mit der Berechnung, Konstruktion und Anwendung von Sorptionskältemaschinen befasst oder auch nur diese didaktisch so ergiebige Maschinengattung etwas ausführlicher im Unterricht behandeln möchte, wird es freudig begrüßen, dass nun aus der Feder eines langjährigen Mitarbeiters der Firma Borsig und eines der besten Kenner dieses Gebietes eine umfassende Darstellung der verschiedenen Typen und Anwendungsmöglichkeiten vorliegt.

Nach einer ausführlichen Behandlung der theoretischen Grundlagen mit Angaben über Energie und Kühlwasserverbrauch werden in einem zweiten Teil die für kleine Kälteleistungen – besonders für Kühlschränke – geeigneten Apparate besprochen. Im dritten Teil geht dann der Verfasser auf sein ureigenes Arbeitsgebiet, die Sorptionskältemaschinen für grosse Leistungen, ein.

Wertvoll sind vor allem viele Angaben über die in der Praxis üblichen Werte der umlaufenden Mengen, der erforderlichen Austauschflächen, der üblichen Drücke und Konzentrationen sowie auch das Eingehen auf Wirtschaftlichkeitsfragen, die Inbetriebsetzung und die Behebung von Störungen. Diese waren im bisherigen Schrifttum teilweise überhaupt nicht, teilweise erst nach langem Suchen zu finden. Wenn auch an einigen ganz wenigen Stellen eine noch etwas prägnantere Ausdrucks-

weise zu wünschen wäre und zum Beispiel auch die Behauptung, dass «die Ausführungen für kleine und kleinste Kälteleistungen, wie sie für Haushalt und Kleingewerbe mit meist periodischer, aber auch manchmal kontinuierlicher Betriebsweise (jedoch ohne Flüssigkeitspumpe) verwendet werden» (S. 3), nicht ganz zutreffen dürfte, so vermittelt das Buch doch einen vorzüglichen Einblick in dieses auch vom Standpunkt der Verfahrenstechnik so interessante Gebiet.

Das flüssig geschriebene Buch darf gerne all denen empfohlen werden, die irgendwie mit der sorptiven Kälteerzeugung zu tun haben. P. GRASSMANN

Rheology, Theory and Applications. Bd. I. Von F. R. EIRICH (Academic Press Inc., New York 1956). 761 S.; \$ 20.-.

Rheologie bedeutet dem Sinne nach Fliesskunde und umschreibt eine Forschungsrichtung, die die Begriffe «plastische Formung» und «Fließen zäher, insbesondere nichtnewtonscher Medien» umfasst. Die Arbeitsrichtung ging aus der Kolloidchemie hervor, wandte sich aber in der letzten Zeit stark zur Werkstoffphysik hin und wurde durch die Gründung rheologischer Gesellschaften in verschiedenen Ländern ausserordentlich gefördert. Während der elastische Verformungszustand einerseits wie auch das Strömen newtonscher Medien andererseits einen gewissen theoretischen Abschluss erfahren haben, liegt zwischen diesen beiden Grenzfällen ein Forschungsfeld, das von einer umfassenden theoretischen und experimentellen Durchdringung noch weit entfernt ist. EIRICH hat sich die Aufgabe gestellt, in einem dreibändigen Sammelwerk bedeutende Monographien aus diesem Gebiet zusammenzustellen. Der erste Band umfasst unter anderem eine Darstellung der Beziehungen zwischen Spannung und Verformung bei der plastischen Formänderung von Metallen (D. C. DRUCKER), ergänzt durch ähnlich gerichtete Arbeiten (W. PRAGER, J. FLEEMANN, G. J. DIENES und R. B. DOW). Anschliessend werden Fragen behandelt, die der Kolloidphysik und dem Verhalten der Kunststoffe näherstehen; eine sehr interessante Übersicht über akustische Eigenschaften von Flüssigkeiten (R. B. LINDSAY) beschliesst den ersten Band.

Wenn auch dieses Werk in erster Linie für den engeren Kreis der Fachleute bestimmt ist, so vermögen doch die einzelnen Arbeiten der chemischen Technik und der Technologie der Kalt- und Warmverformung von Metallen praktisch auswertbare Hinweise zu vermitteln und das Interesse weiter Kreise zu begründen. J. R. DE FRIES

Théorie des circuits non-linéaires en régime alternatif. Von VITOLD BELEVITCH (Gauthier-Villars Editeurs, Paris 1959). 296 S., 160 Fig.; bFr. 360.-.

Das vorliegende Buch bildet gewissermassen die Ergänzung zum früher erschienenen Buch des gleichen Autors *Théorie des circuits de télécommunications*, in welchem nur die Theorie der linearen Wechselstromschaltungen mit konstanten Elementen dargestellt wurde. Entsprechend dem Anwendungsgebiet, beschränkt sich der Autor auf die Betrachtung der Modulatoren mit Dioden zur Frequenzverschiebung, der Demodulation mit Gleichrichtern, der Frequenzvervielfachung, der Oszillatoren und der Frequenzteiler. Allen Betrachtungen liegt die gleiche Voraussetzung zugrunde, dass die Nichtlinearität durch eine frequenzunabhängige reelle Funktion zwischen zwei Grössen (zum Beispiel Spannung und Strom) mathematisch formuliert werden kann. Dadurch werden Differentialgleichungen vermieden, sofern Ströme und Spannungen zeitlich periodisch verlaufen. Zur Vereinfachung der Ableitungen wird ferner angenommen, dass das frequenzabhängige lineare Element der Schaltung stark selektiv sei, so dass nur wenige Frequenzkomponenten genügen, um den eingeschwungenen Zustand zu beschreiben.

Das Kapitel I resumiert die technischen und theoretischen Probleme, die sich stellen. In den folgenden Kapiteln II bis VII werden Gleichrichterstromkreise behandelt mit der Hauptanwendung der Frequenzverschiebung, insbesondere die lineare Theorie der Modulatoren zwischen selektiven Abschlüssen, Gleichrichtung zwischen selektiven Abschlüssen, nichtlineare Produkte sowie durch Unsymmetrien in Modulatoren erzeugte und eine allgemeine nichtlineare Theorie der Modulatoren. Das Kapitel VIII befasst sich mit der Frequenzvervielfachung zwischen selektiven Abschlüssen.

Die restlichen Kapitel (IX bis XIV) sind den Oszillatoren mit nichtlinearen Kennlinien gewidmet, und zwar werden behandelt: die freie Schwingung; spezielle Probleme, wo 2 Schwingungsfrequenzen möglich sind, die Synchronisation, die Frequenzteilung, Oszillatoren mit selbsttätiger Begrenzung durch Gitterstrom und eine allgemeine Theorie der Oszillatoren.

Nützlich sind die ergänzenden Bemerkungen mit Hinweisen auf die Literatur, die am Schluss zusammengestellt zu finden ist.

Die Behandlungsweise der Probleme kommt den Bedürfnissen der Praxis entgegen. Allerdings konnte dem Verhalten der Modulatoren bei hohen Frequenzen infolge Vernachlässigung der Sperrkapazitäten der Halbleiterdioden nicht Rechnung getragen werden. Aber auch ohne dies verdient das Buch volle Beachtung, besonders für den Unterricht an Hochschulen und für das Selbststudium, schliesst es doch eine spürbare Lücke in der Fachbücherei.

H. WEBERS

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Bände 1–3. Von LOUIS ROBIN (Gauthier-Villars, Paris 1957, 1958, 1959). 209, 384, 289 S., 44 Fig.; fFr. 4000, 5000, 5500.

Unter den besonders für die angewandte Mathematik wichtigen speziellen Funktionen spielen die Legendreschen Kugelfunktionen und ihre Verallgemeinerungen als Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung eine hervorragende Rolle. Ihre in zahlreichen, weitverstreuten Publikationen untersuchten Eigenschaften zusammenzufassen und übersichtlich darzustellen, bedeutet eine immense Arbeit. ROBIN hatte die bis heute in französischer Sprache fehlende, moderne Darstellung mit grosser Sorgfalt besorgt (für die er den Prix Poncelet 1957 der Académie des Sciences erhielt) und dabei nicht nur Bekanntes zusammengetragen, sondern auch etliche neue Beziehungen hinzugefügt. Das Werk ist aber nicht einfach eine Formelsammlung, sondern eine zusammenhängende Darstellung, in der die Beweise, sofern sie nicht zu umfangreich sind, ausgeführt werden; in den übrigen Fällen wird dagegen auf die Literatur verwiesen.

Um eine Idee vom Aufbau und Inhalt der drei Bände zu geben, seien hier wenigstens die Kapitelüberschriften angegeben: I. *Introduction de l'équation différentielle associée de Legendre en Physique mathématique. Les polynômes de Legendre et les fonctions de seconde espèce, d'indice entier, positif ou nul.* II. *Les fonctions associées de Legendre, $P_n^m(\mu)$ et $Q_n^m(\mu)$, pour n et m entiers, $n \geq 0$.* III. *Les harmoniques sphériques de degré entier positif, négatif ou nul.* IV. *Les fonctions associées de Legendre de type général.* V. *Valeurs approchées des fonctions associées de Legendre: développements asymptotiques de ces fonctions et inégalités simples qu'elles vérifient.* VI. *Séries de polynômes de Legendre, de fonctions associées de Legendre et de polynômes de Laplace.* VII. *Formules et théorèmes d'addition pour les fonctions de Legendre.* VIII. *Les zéros ou racines des fonctions $P_n^m(\mu)$ et $Q_n^m(\mu)$.* IX. *Applications des fonctions de Legendre aux surfaces de révolution, avec des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales, autres que les coordonnées sphériques.* X. *Fonctions qui se rattachent étroitement à celles de Legendre: polynômes et fonctions de Gegenbauer ou ultrasphériques. Fonctions sphéroïdales.* – Au

die drei Bände verteilen sich respektive die Kapitel I bis III, IV bis VI und VII bis X. Die einzelnen Kapitel enthalten auch zahlreiche bibliographische Hinweise.

Die Gegenbauerschen Funktionen werden weniger ausführlich behandelt, indem nur ihre wichtigsten Eigenschaften angeführt werden, und im Falle der Sphäroidfunktionen wird nur eine Übersicht (von etwa 50 Seiten) der Hauptergebnisse geboten, im übrigen aber auf das bekannte Werk von J. MEIXNER und F. W. SCHÄFKE, *Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen* (Berlin 1954), verwiesen. Der erste Band enthält im Anhang je die ersten Legendreschen Polynome und die zugeordneten Funktionen erster und zweiter Art; der dritte ein bis 1958 reichendes Verzeichnis numerischer Tafeln. – Für den praktischen Gebrauch wird man jedenfalls auch das alphabetische Inhaltsverzeichnis (das man sonst in den französischen Werken meist vermisst) zu schätzen wissen. Für jeden, der mit den Legendreschen Kugelfunktionen zu tun hat, wird das Werk von ROBIN ohne Zweifel von grossem Wert sein, findet er doch recht übersichtlich alle wesentlichen Eigenschaften und Beziehungen zusammengestellt.

E. ROTH-DESMEULES

Probleme des Kreuzstrom-Wärmeaustauschers. Von H. KÜHL (Springer-Verlag Berlin, 1959). 83 S., 34 Abb.; DM 10.50.

Das Problem der Berechnung von Kreuzstrom-Wärmeaustauschern, insbesondere der Ermittlung des mittleren Temperatursprunges in solchen Apparaten war schon seit langer Zeit immer wieder der Gegenstand theoretischer Untersuchungen. Bekanntlich bereitet es nicht geringe mathematische Schwierigkeiten. Die grosse Anzahl der technisch wichtigen Schaltungsmöglichkeiten und Varianten und die teilweise bestehende Unsicherheit über die zu treffenden Annahmen haben dazu geführt, dass das Problem immer wieder erneut aufgegriffen worden ist. Das Buch von KÜHL liefert einen neuen wertvollen Beitrag zu diesem Problemkomplex. KÜHL konzentriert sich vor allem darauf, möglichst einfache, direkt verwertbare Angaben über den Wärmerückgewinn zu erhalten. Darunter versteht man das Verhältnis der tatsächlich übertragenen Wärmemenge zu derjenigen Wärmemenge, die unter sonst gleichen Verhältnissen in einem idealen Gegenstromapparat übertragen werden könnte. Besonderes Augenmerk richtet der Verfasser auch auf den Vermischungseinfluss, welcher für die in solchen Apparatesystemen zu erwartenden Temperaturverhältnisse von wesentlicher Bedeutung sein kann. Es werden Näherungsverfahren angegeben, deren Brauchbarkeit sehr sorgfältig überprüft wird, und zur Erleichterung der Rechnung ist eine grosse Anzahl von Kurventafeln der Arbeit beigelegt.

Das nur 83 Seiten umfassende Bändchen ist damit das Ergebnis einer viel umfangreicheren Arbeit, als man vielleicht zunächst vermuten würde. Dem Ingenieur, der solche Wärmeaustauschapparate auszulegen hat, wird daher das vorliegende Buch, welches bei aller theoretischen Strenge auf die Bedürfnisse der Praxis zugeschnitten ist, äusserst wertvolle Dienste leisten.

W. TRAUPEL

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE und E. CREUTZ, Band 38, 2. Teil: *Neutronen und verwandte Gammastrahlprobleme* (Springer-Verlag, Berlin 1959). 843 S., 338 Fig.; DM 178. –

Dieser neue Band der Flüggeschen Handbuchreihe enthält nur zwei Artikel: E. AMALDI, *The Production and Slowing Down of Neutrons*, und U. FANO, L. V. SPENCER und M. J. BERGER, *Penetration and Diffusion of X-Rays*. Die Arbeit von AMALDI (659 S., 281 Figuren) zeichnet sich durch ausserordentliche Gründlichkeit aus. Ausgehend von historischen Bemerkungen über die Entdeckung des Neutrons, wird dem Leser in einem einführenden Abschnitt die Bedeutung des Neutrons als

Fundamentalteilchen und als Kernbaustein dargelegt. Die Diskussion der Wechselwirkung von Neutronen mit Materie, das heisst von Neutronen ausgelöste Kernreaktionen, elastische und inelastische Streuungen, die Erzeugung künstlicher Radioaktivitäten usw., führt schliesslich zur Besprechung derjenigen Elementarprozesse, die für die Verlangsamung von Neutronen verantwortlich sind. Die Theorie der Abbremsung von Neutronen wird – entsprechend den durchaus verschiedenartigen physikalischen und mathematischen Gesichtspunkten – in zwei separaten Abschnitten behandelt: Neutronenenergien grösser als einige Elektronenvolt und Neutronen in der chemischen Region unterhalb eines Elektronenvolts. Ein weiterer Abschnitt orientiert über die Diffusion thermischer Neutronen, wobei neben der theoretischen Behandlung des Diffusionsvorganges auch der messtechnische Aspekt gebührend berücksichtigt wird. Das Kapitel über die Produktion von Neutronen beschränkt sich auf das Gebiet der Neutronenenergien von einigen Mega-elektronenvolt. Die Erzeugung von Neutronen in Reaktoren sowie von Hochenergieutronen wird in anderen Bänden dieser Handbuchreihe besprochen. Der besondere Wert dieses Kapitels dürfte in der ausserordentlich gründlichen Präsentation des zurzeit vorliegenden numerischen Materials in Form von Anregungskurven, Winkel- und Energieverteilungen usw. liegen.

Der zweite Artikel von FANO *et al.* (183 S., 57 Figuren) befasst sich mit der Durchdringung und Diffusion von Röntgenstrahlen unter folgenden einschränkenden Bedingungen: Die Materie wird als amorphe Anhäufung von Atomen betrachtet. Das diskutierte Energiegebiet ist auf den Bereich beschränkt, wo die Penetrabilität korpuskularer sekundärer sowie Bremsstrahlungseffekte noch keine dominierende Rolle spielen. Diese Konzeption erscheint insofern zweckmässig, als vieles aus diesem Kapitel ohne weiteres auf Neutronen übertragen werden darf und andererseits die Durchdringung hochenergetischer Strahlung durch Materie (Kaskadentheorie) in einem anderen Band von G. MOLIÈRE besprochen wird. Beide Artikel sind im englischer Sprache verfasst und von einem umfangreichen Literaturverzeichnis begleitet.

F. HEINRICH

Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. VON ERNST ECKERT (Springer-Verlag, Berlin 1959). 235 S., 171 Abb.; DM 28.80.

Das Buch von ECKERT, dessen 1. Auflage 1949 erschienen ist, liegt nun in überarbeiteter und erweiterter Form vor. Schon die 1. Auflage zeichnete sich dadurch aus, dass auf sehr knappem Raum eine gründliche Einführung in das Wissensgebiet des Wärme- und Stoffaustausches gegeben wurde. Wenn auch die 2. Auflage dem gegenüber eine nicht unwesentliche Erweiterung erfahren hat, so handelt es sich doch immer noch um eine äusserst straff zusammengefasste Darstellung dieses heute so umfangreichen Wissensgebietes. Dass dabei trotz der Beschränkung des Raumes eine derartige Klarheit und wissenschaftliche Strenge gewahrt werden konnte, stellt dem Verfasser ein hervorragendes Zeugnis aus. Das Buch behandelt die drei Grundgebiete der Wärmeübertragung, nämlich Wärmeleitung, Wärmeübergang und Wärmestrahlung und schliesslich noch den mit der Wärmeübertragung eng verwandten Stoffaustausch. Spezifisch moderne Entwicklungen sind dabei in die neue Auflage mit aufgenommen worden, so die spezielle Behandlung von Schmelz- und Gefriervorgängen und des Wärmeübergangs bei hohen Gasgeschwindigkeiten und bei flüssigen Metallen. Im Kapitel über Wärmeleitung ist ferner eine kurze und klare Darstellung des Relaxationsverfahrens zu finden, eine mathematische Methode, die auch an vielen anderen Orten zweckmässig zur Anwendung gelangt. Gewisse störende Druckfehler, die in der 1. Auflage noch vorhanden waren, sind jetzt ebenfalls verschwunden. Man kann diesem ausgezeichneten Buch nur die weiteste Verbreitung wünschen.

W. TRAUPEL

On a Two-Dimensional Free-Boundary Problem

By RALPH J. BEAN, ROBERT P. GILBERT¹⁾ and HALCOMB KENDALL,
Pittsburgh, Pa., U.S.A.²⁾

1. Introduction

In a petroleum reservoir the gas-oil-water interfaces frequently deviate from the horizontal. The factors causing this phenomenon are of two basic types, static factors such as variation in formation properties, and dynamic factors such as hydraulic circulation of the oil and the underlying water in the stratum [1, 2³⁾]. Occasionally circulation is sufficient to even cause the oil-cap to migrate to a new position. In fact it has been suggested that one might artificially set in motion the water underlying an oil-cap in order to move the oil to a position more favorable for production [3]. Consequently, it is of importance to the petroleum industry to be able to determine the position and shape of an oil-water interface under dynamic conditions. This is the problem investigated in this work.

It would be well to list here the symbols used in the following work:

Variables

x, y	distance coordinates
t	time
V_0	oil velocity
V_w	water velocity
ϕ_0	oil scalar potential
ϕ_w	water scalar potential
P_0	oil hydrodynamic pressure (dynes cm ⁻²)
P_w	water pressure
Ψ	the stream function
$w = \Phi + i \Psi$	the complex potential
$\zeta = -\frac{dz}{dw} = \frac{V_x + i V_y}{V^2}$	the complex 'velocity'

¹⁾ R. P. GILBERT now at the Michigan State University, East Lansing, Michigan.

²⁾ Department of Mathematics, University of Pittsburgh.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 355.

Constants

μ_0	oil viscosity (centipoise, cp.)
μ_w	water viscosity
$P_c = P_0 - P_w$	capillary pressure
ϱ_0	oil density (gm cm ⁻³)
ϱ_w	water density
k	formation permeability (cp. cm ³ sec gm ⁻¹)
f	formation porosity (dimensionless)
g	gravitational constant
V_∞	velocity at infinity
\mathbf{n}	unit normal-vector to the oil-water interface
\mathbf{t}	unit tangent-vector to the oil-water interface
a	width of channel
$\gamma = \frac{k g}{\mu_w f} (\varrho_w - \varrho_0)$	

2. Mathematical Formation of the Problem

Obtaining an analytic solution to the general problem of hydraulic circulation of two fluids is virtually impossible, since it involves solving the free boundary problem in three dimensions. In order to simplify the situation somewhat, the following assumptions will be made:

- The oil in the oil-cap is immobile (the tilted-water table is stationary).
- The flow of water is steady.
- The oil-water bearing stratum may be represented approximately as a bent two-dimensional channel.
- The fluids are non-compressible.
- The generalized form of DARCY's equation describes the flow of fluid through a porous medium.

Now, regardless of what assumption we have made concerning flow through a porous medium, all fluids obey a continuity equation, that is, matter must be conserved. We express this by

$$\nabla(\varrho \mathbf{V}) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\varrho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho V_z) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (1)$$

In addition to the continuity equation, we have assumed DARCY's equation must hold. The generalized form of this equation for flow subject to conservative 'external' forces is [4]

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi, \quad \text{where} \quad \phi = \frac{k}{\mu f} (p - \mathfrak{B}), \quad (2)$$

and \mathfrak{P} is the scalar potential of the external force field. For the case where the external forces are solely gravitational the velocity potential may be written as

$$\phi = \frac{k}{\mu f} (\mathfrak{p} + \varrho g y), \quad (3)$$

assuming, of course, y lies in the vertical direction. When the fluids are incompressible equation (1) and (2) may be combined to form

$$\nabla \cdot (\varrho \mathbf{V}) = -\nabla \cdot (\varrho \nabla \phi) = -\nabla^2 \phi = 0, \quad (4)$$

which implies irrotational flow.

In view of what has been said, we may express the velocity potential for the oil and water respectively as

$$\phi_0 = \frac{k}{\mu_0 f} (\mathfrak{p}_0 + g \varrho_0 y), \quad (5a)$$

and

$$\phi_w = \frac{k}{\mu_w f} (\mathfrak{p}_w + g \varrho_w y). \quad (5b)$$

If the oil-cap is stationary equation (5a) becomes

$$\phi_0 = \text{const} = \frac{k}{\mu_0 f} (\mathfrak{p}_0 + g \varrho_0 y),$$

or

$$\mathfrak{p}_0 = -g \varrho_0 y + \frac{\mu_0 f}{k} \phi_0. \quad (6)$$

The oil-water interface is characterized by a zero normal flow across it, that is, by

$$\frac{\partial \phi_w}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (7)$$

and a pressure discontinuity,

$$\Delta \mathfrak{p}|_{\text{interface}} = \mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_w = \mathfrak{p}_c. \quad (8)$$

By combining Equations (6) and (8) an expression for the water velocity potential (at the interface) may be obtained,

$$\phi_w = \frac{k g}{\mu_w f} (\varrho_w - \varrho_0) y + \text{const}, \quad (9)$$

which is independent of the hydrodynamic water pressure. On the free-boundary the normal and tangential components of the velocity⁴⁾ are

$$V_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad V_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{t} \cdot \nabla \phi = -\gamma \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{t}}, \quad (10)$$

⁴⁾ Since all future remarks will refer to the water, subscripts will be dropped.

where

$$\gamma = \frac{k g}{\mu_{q_0} f} (Q_w - Q_0);$$

the x - and y -components may then be computed as

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V_t \frac{dx}{dt} \cdot \mathbf{t} = -\gamma \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} = -\gamma \cos \theta \sin \theta, \\ V_y &= V_t \frac{dy}{dt} \cdot \mathbf{t} = -\gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\gamma \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Hence it may be readily observed that V_x and V_y satisfy the following relationship

$$V_x^2 + V_y^2 + \gamma V_y = V^2 + \gamma V_y = 0. \quad (12)$$

We have assumed that the oil-bearing stratum may be represented as a bent two-dimensional channel such as in Figure 1. It is worth noting that the

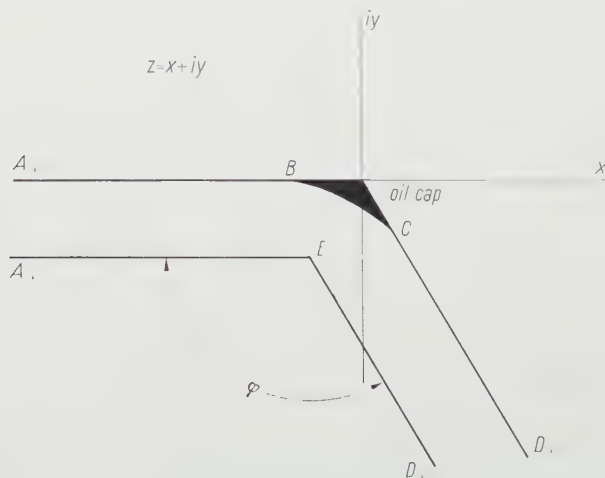


Figure 1
The physical plane.

orientation of the channel merely introduces a direction parameter in the solution to our problem. The angle φ will in general be obtuse; however, we shall first consider the special case $\varphi = \pi/2$ because of the simple formulae which result.

The nature of the complex potential, $w = \Phi + i\Psi$, corresponding to flow in a bent channel, may be seen in Figure 2. The point E' which is the image of E under a conformal mapping of the z -plane onto the W -plane, may be placed

on the Ψ -axis because of the arbitrariness associated with defining a physical potential.

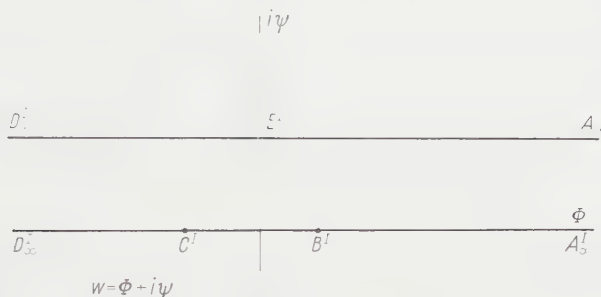


Figure 2
The complex-potential plane

To determine the shape of the oil-water interface we shall first obtain its differential equation. This may be done by mapping the W -plane onto the ζ -plane (the plane of the complex potential), and then recalling that they are related by

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = \frac{V_x + i V_y}{V^2}. \quad (13)$$

What the image of the physical plane is in the velocity plane depends to a certain extent on what boundary conditions are assumed for the free surface at B and C . There are certain line-segments, however, whose images are independent of these considerations. For instance, along the straight impermeable barrier EDC , the velocity must have a constant direction, hence the image $E''D''C''$ (in the ζ -plane) is a straight line in the same direction. If $V \rightarrow \infty$ at E (which it must be for irrotational flow) the straight line then passes through the origin. On CB

$$\frac{V_y}{V^2} = -\frac{1}{\gamma}$$

(from equation 12), hence $C''B''$ will be parallel to the V_x/V^2 axis; if B is a stagnation point B'' will be at ∞ ; where C'' lies depends on the angle the interface makes with the channel wall. The segment $E''A''B''$ is the image of the straight impermeable barrier EAB and consequently lies in the horizontal direction. It is apparent that $E''D''C''$ and $E''A''B''$ are not in general collinear, hence in order for our polygon to close in the ζ -plane B'' must be the point at infinity. This implies B is a stagnation point.

In the following sections we shall investigate the forms our solutions take for various boundary conditions at C . As a guide to the solution of the general

problem we shall consider first the situation where the channel has a right-angle bend.

3. A Channel with a Right-Angle Bend

3.1. A Free Boundary without an Inflection Point

For the case of a channel of constant width, where $\varphi = \pi/2$, we have the following (see Figure 3):

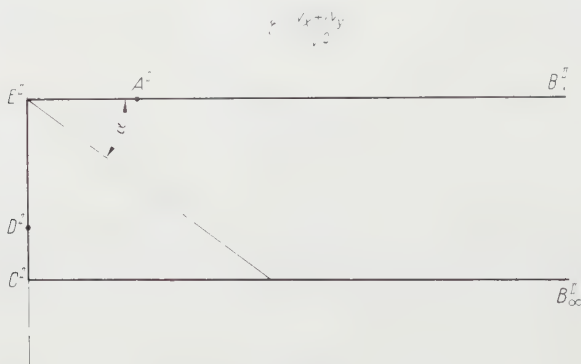


Figure 3
The complex-velocity plane.

- At A , V is in the positive x -direction and equals V_∞ .
- At D , V is in the negative y -direction and equals V_∞ .
- At E , $V = \infty$; at B , $V = 0$.
- As we approach B from A , V is in the x -direction, hence B''_∞ must lie on the V_x/V^2 axis (since E is at the origin).
- On the free-boundary $V_y/V^2 = -1/\gamma$, hence the imaginary part of a point on $C''B''_\infty$ is $-1/\gamma$ (a constant).
- As we approach C from D , V is in the y -direction, hence at C $V_x = 0$; if $V_y \neq 0$, then C must be a finite point⁵⁾.

This concludes our verification of Figure 3. We now introduce the parameter

$$\alpha = \cot^{-1} \left(\frac{V_x/V^2}{V_y/V^2} \right) = \cot^{-1} \left(\frac{dx}{dy} \right), \quad (14)$$

in order to describe points on $C''B''_\infty$; it is clear that α is also the angle the tangent to the interface makes in the physical plane.

⁵⁾ We shall consider the situation $V_x = V_y = 0$, a stagnation point at C , in the next section.

We may use the Schwartz-Christoffel transformation to map that semi-infinite strip in the ζ -plane onto the half plane as follows (see Figure 4):



Figure 4
The τ -plane.

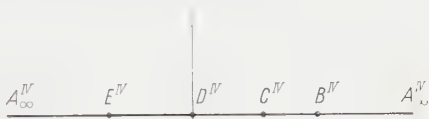


Figure 5
The T -plane.

$$\tau = -\cosh(\pi \gamma \zeta) .$$

At point C''' , $\pi \gamma \zeta = -\pi i$ so $\tau = -\cosh(-\pi i) = 1$;
At point E''' , $\pi \gamma \zeta = 0$ so $\tau = -\cosh(0) = -1$;
At point A''' , $\pi \gamma \zeta = \frac{\pi \gamma}{V_{\infty}}$ so $\tau = -\cosh\left(\frac{\pi \gamma}{V_{\infty}}\right)$;
and at D''' , $\pi \gamma \zeta = \frac{\pi \gamma i}{V_{\infty}}$ so $\tau = -\cosh\left(\frac{\pi \gamma i}{V_{\infty}}\right) = \cos\left(\frac{\pi \gamma}{V_{\infty}}\right)$.

On $E''' B'''$, ζ is real and positive, so τ goes from -1 to $-\infty$. A more convenient arrangement of the points A''' , D''' , E''' may be affected by using the cross ratio to take

$$A''' \rightarrow \infty, \quad D''' \rightarrow 0, \quad \text{and} \quad E''' \rightarrow -1 .$$

One obtains

$$T = \frac{\tau + \cos(\pi \gamma / V_{\infty})}{\tau + \cosh(\pi \gamma / V_{\infty})} \cdot \frac{\cosh(\pi \gamma / V_{\infty}) - 1}{1 - \cos(\pi \gamma / V_{\infty})} . \tag{15}$$

The points B''' and C''' map into

$$B''': \quad T = \frac{\cosh(\pi \gamma / V_{\infty}) - 1}{1 - \cos(\pi \gamma / V_{\infty})} , \tag{16}$$

and

$$C''': \quad T = \frac{1 + \cos(\pi \gamma / V_{\infty})}{1 - \cos(\pi \gamma / V_{\infty})} \cdot \frac{\cosh(\pi \gamma / V_{\infty}) - 1}{\cosh(\pi \gamma / V_{\infty}) + 1} , \tag{17}$$

respectively (see Figure 5). The T -plane (Figure 5) may now be mapped onto the W -plane by

$$W = \frac{V_{\infty} a}{\pi} \log T . \tag{18}$$

This may be readily verified by considering the points A'''_{∞} , D''' and E''' . The purpose of these successive transformations was to map the ζ -plane onto the

W -plane, and this may now be accomplished by the transformation

$$W = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \left\{ \frac{-\cosh(\pi \gamma' \zeta) + \cos(\pi \gamma'/V_\infty)}{-\cosh(\pi \gamma' \zeta) + \cosh(\pi \gamma'/V_\infty)} \cdot \frac{\cosh(\pi \gamma'/V_\infty) - 1}{1 - \cosh(\pi \gamma'/V_\infty)} \right\}.$$

Our concern in doing this has been to obtain a differential equation for the free boundary CB . A point on $C''B''$ in the ζ -plane is described by

$$\zeta = -\frac{i}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma'} \cot \alpha, \quad (20)$$

in the τ -plane this corresponds to

$$\tau = -\cosh(-\pi i + \pi \cot \alpha) = \cosh(\pi \cot \alpha), \quad (21)$$

and in the W -plane to

$$W - \phi_{B'C'} = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \left\{ \frac{\cosh(\pi \gamma/V_\infty) - 1}{1 - \cosh(\pi \gamma/V_\infty)} \cdot \frac{\cosh(\pi dx/dy) + \cos(\pi \gamma/V_\infty)}{\cosh(\pi dx/dy) + \cosh(\pi \gamma/V_\infty)} \right\}, \quad (22)$$

or [since $\phi_{B'C'} = \gamma y + \text{const}$]

$$\gamma y + c = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \left\{ \frac{\cosh(\pi dx/dy) + \cos(\pi \gamma/V_\infty)}{\cosh(\pi dx/dy) + \cosh(\pi \gamma/V_\infty)} \right\}. \quad (23)$$

The constant c can be determined by considering Equation (23) at point B . Since $dy/dx = 0$, $\cosh(\pi dx/dy) = \infty$; hence at B , $\gamma y + c = 0$, and hence $c = 0$. Equation (23) then becomes

$$\frac{\cosh(\pi dx/dy) + \cos(\pi \gamma/V_\infty)}{\cosh(\pi dx/dy) + \cosh(\pi \gamma/V_\infty)} = e^{\pi \gamma y/V_\infty a}, \quad (24)$$

which is an ordinary, first-order differential equation for the interface. The value of y at the point C can be determined as shown since we have assumed there $V_x = 0$, $V_y \neq 0$, which is equivalent to a zero wetting angle, that is

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\infty, \quad \frac{dx}{dy} = 0, \quad \cosh\left(\pi \frac{dx}{dy}\right) = 1; \quad \text{hence} \\ y_c = \frac{V_\infty a}{\gamma \pi} \log \left\{ \frac{1 + \cos(\pi \gamma/V_\infty)}{1 + \cosh(\pi \gamma/V_\infty)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Equation (24) may now be solved by a single quadrature as

$$x = a + \frac{1}{\pi} \int_{y_c}^y \cosh^{-1} \left[\frac{\cos(\pi \gamma/V_\infty) - e^{-\pi \gamma y/V_\infty a} \cosh(\pi \gamma/V_\infty)}{e^{\pi \gamma y/V_\infty a} - 1} \right] dy. \quad (26)$$

3.2. A Free-Boundary with an Inflection Point

In the last section it was assumed that at C , $V_x = 0$ and $V_y \neq 0$, the alternate possibility, $V_x = V_y = 0$ leads to an interesting situation. Here there will

be a stagnation point at c , hence the image point C'' in the ζ -plane must be at infinity. It may then be concluded that the images in the ζ -plane of EDC and EAB are the negative, imaginary axis and the positive, real axis respectively (see Figure 7). Along the free-boundary BC the condition $V_y/V^2 = -1/\gamma$ must hold; however B'_∞ and C'_∞ are now both at infinity. In order to show that the image of BC does not contract to a point it is sufficient to illustrate that the image of interior points of the arc BC are not necessarily points at infinity. This may be done by again introducing the parameter

$$\alpha = \cot^{-1} \left(\frac{V_x}{V_y} \right) = \cot^{-1} \left(\frac{d\lambda}{d\gamma} \right);$$

it is apparent that α , the slope angle along the interface BC , will in general be different from zero unless, of course, no oil-cap exists. It may be concluded then, that providing an oil-cap exists, the image of BC folds back on itself at least once. Since there is no physical reason to expect a stagnation point along BC other than at B or C there is just one such folding. If F'' is the point on the image of BC furthest to the left⁶⁾, its inverse image F will correspond to a point on BC where $\alpha = \alpha_{\max}$. F is clearly, then an inflection point on the free boundary (see Figure 6).

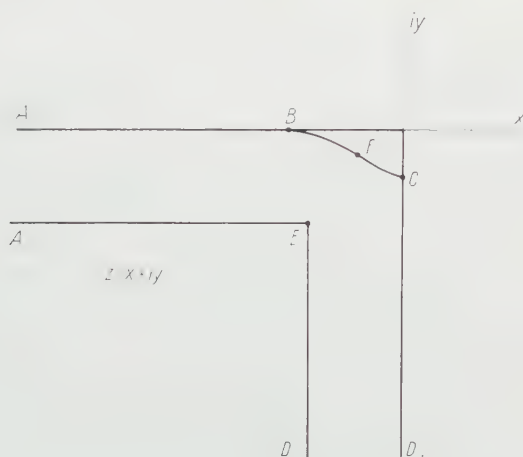


Figure 6
The z -plane.

Now following the same procedure as in the previous section we map the ζ -plane on the τ -plane (see Figure 8) by the Schwartz-Christoffel transforma-

⁶⁾ It is assumed that the $\text{Re}(F'') \geq 0$ in order that the interface BC is single-valued.

tion. This may be accomplished by

$$\begin{aligned}\zeta &= \alpha \int_{\tau}^{\infty} (\tau + 1)^{-1/2} \tau^{-3/2} (\tau - \tau_F) d\tau + \beta \\ &= \alpha \log \left[\sqrt{\tau^2 + \tau} + \tau + \frac{1}{2} \right] + 2\alpha \frac{\tau_F}{\tau} \sqrt{\tau^2 + \tau} + \beta,\end{aligned}$$

where $E'' \rightarrow -1$, $C'' \rightarrow 0$, and $B'' \rightarrow \infty$.

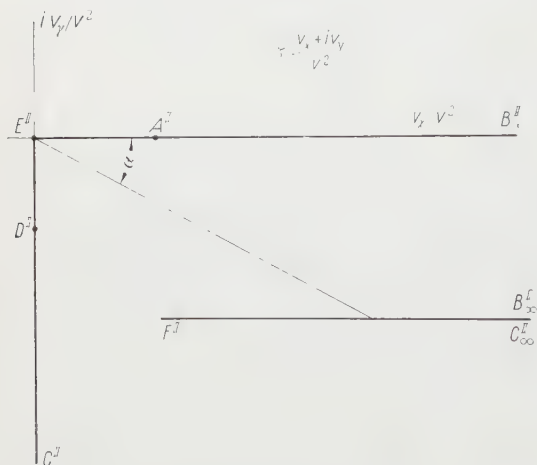


Figure 7
The complex-velocity plane.

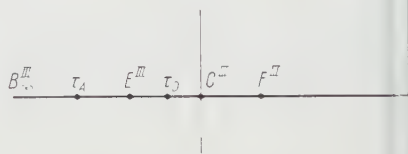


Figure 8
The τ -plane.

A listing of how certain points map from the τ -plane to the ζ -plane may be found below:

<i>Points in τ-plane</i>	<i>ζ as computed</i>	<i>From ζ-plane</i>
$B''': (\tau = +\infty)$	$\zeta = \alpha \log \infty + 2\alpha \tau_F + \beta$	$B'' = \infty - \frac{1}{\gamma} i$
$B''': (\tau = -\infty)$	$\zeta = \alpha \log(-\infty) + 2\alpha \tau_F + \beta$ $= \alpha \log \infty + \alpha \pi i + 2\alpha \tau_F + \beta$	$B'' = \infty$
$C''': (\tau = 0 + \varepsilon)$	$\zeta = \alpha \log \frac{1}{2} + 2\alpha \tau_F + \beta$	$C'' = \infty - \frac{1}{\gamma} i$
$C''': (\tau = 0 - \varepsilon)$	$\zeta = \alpha \log \frac{1}{2} - 2\alpha i \tau_F + \beta$	$C'' = -\infty i$
$E''': (\tau = -1)$	$\zeta = \alpha \log \left(-\frac{1}{2} \right) + \beta$ $= \alpha \log \frac{1}{2} + \alpha \pi i + \beta$	$E'' = 0$

Some of the arbitrary parameters may be computed now by comparing various terms. At E'' , $\zeta = 0$, hence $\beta = -\alpha \log 1/2 - \alpha \pi i$. By comparing B''_∞ , $\zeta = \infty$, with ζ computed from $\tau = -\infty$, one has

$$\zeta = \infty = \infty + (\alpha \pi i) + (2 \alpha \tau_F) - \alpha \log \frac{1}{2} - \alpha \pi i;$$

hence τ_F is real. Comparing B'' , $\zeta = \infty - i/\gamma$, with ζ as computed from $t = +\infty$, one has

$$\zeta = \infty - \frac{1}{\gamma} i = \infty + 2 \alpha \tau_F - \alpha \log \frac{1}{2} - \alpha \pi i;$$

consequently

$$\alpha = \frac{1}{\pi \gamma}, \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{1}{\pi \gamma} \log 2 - \frac{1}{\gamma} i.$$

In the same manner, at C''_∞ ,

$$\zeta = i \infty = \frac{1}{\pi \gamma} \log \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi \gamma} \tau_F \infty i + \frac{1}{\pi \gamma} \log 2 - \frac{i}{\gamma};$$

hence $\tau_F > 0$. Again, at C''_∞ ,

$$\zeta = \infty - \frac{i}{\gamma},$$

$$\infty = \frac{i}{\gamma} - \frac{1}{\pi \gamma} \log \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi \gamma} \tau_F \infty + \frac{1}{\pi \gamma} \log 2 - \frac{i}{\gamma};$$

hence, as concluded above, $\tau_F > 0$ (a check). The point⁷⁾ ζ_F may be calculated from τ_F as follows

$$\zeta = -\frac{1}{\gamma} i + \frac{1}{\pi \gamma} \left[\log \left(\sqrt{\tau^2 + \tau} + \tau + \frac{1}{2} \right) + 2 \frac{\tau_F}{\tau} \sqrt{\tau^2 + \tau} + \log 2 \right]. \quad (26)$$

As before, the τ -plane is mapped onto the T -plane, which may then be mapped onto the plane of the complex potential by

$$W = \frac{V_\infty a}{\pi} \log T.$$

First use the cross ratio

$$T = -\frac{\tau - \tau_D}{\tau - \tau_A} \cdot \frac{1 + \tau_A}{1 + \tau_D},$$

which takes $\tau_D \rightarrow 0$, $\infty \rightarrow 1$, and $\tau_A \rightarrow \infty$; it follows that

$$W = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \frac{\tau_D - \tau}{\tau - \tau_A} \cdot \frac{1 + \tau_A}{1 + \tau_D}.$$

⁷⁾ We shall adopt the notation of using letters as subscripts to indicate image points in the remainder of this section.

Now, on the interface CFB ,

$$\zeta = -\frac{1}{\gamma} i + \frac{1}{\gamma} \cot \alpha = -\frac{1}{\gamma} i + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dx}{dy},$$

and

$$W = \Phi + \gamma y + \text{constant};$$

consequently

$$\gamma y = \frac{V_{\infty} a}{\pi} \log \frac{\tau - \tau_D}{\tau + \tau_A} + K.$$

At

$$A, y = 0, \quad \tau = \tau_A, \quad \frac{V_{\infty} a}{\pi} \log(-\infty) = 0;$$

therefore $K = 0$, and we have

$$\tau = \frac{\tau_D - \tau_A e^{(\pi\gamma/V_{\infty}a)y}}{1 - e^{(\pi\gamma/V_{\infty}a)y}}. \quad (27)$$

Using equations (26) and (27) we may eliminate τ , and thereby obtain a differential equation for the free-boundary; this equation can not be solved explicitly, however, because of the undetermined parameter τ_F . Consequently, we must show whether C is a stagnation point or not, and if C is a stagnation point, τ_F must be determined. From physical arguments it may be realized, that if the free-boundary has an inflection point at F this corresponds to an unstable equilibrium; we conclude that a stagnation point can not occur at C .

4. The General Problem

In the preceding sections we have considered $\varphi = \pi/2$; that was done primarily because of the simpler formulae which arise for that case. Now, we shall assume, as in section 3.1, that C is not a stagnation point ($V_x = 0, V_y \neq 0$); consequently, we obtain the complex velocity plane as shown in Figure 10. Figure 10 may be verified by considering the following:

a) Along EDC (a straight impermeable barrier) V has constant direction, at E ; $V = \infty$, consequently the image in the ζ -plane is a straight line through the origin.

b) On CB (the free boundary) $V_y/V^2 = -1/\gamma$, $V_x \neq 0$, hence C'' is a finite point $[1/\gamma \cot(\pi - \varphi) - 1/\gamma]$, and B'' is the point

$$\left(\frac{\cos(\pi - \varphi)}{V_{\infty}}, -\frac{\sin(\pi - \varphi)}{V_{\infty}} \right).$$

The shear-transformation

$$\xi = \zeta - \cot(\pi - \varphi) \operatorname{Im}(\zeta) = \frac{V_x + i V_y}{V^2} - \frac{\cot(\pi - \varphi) V_y}{V^2} \quad (28)$$

takes $B'' E'' D'' C'' B''_{\infty}$ (Figure 10) into a semi-infinite rectangle (Figure 3).



Figure 9
The T -plane.

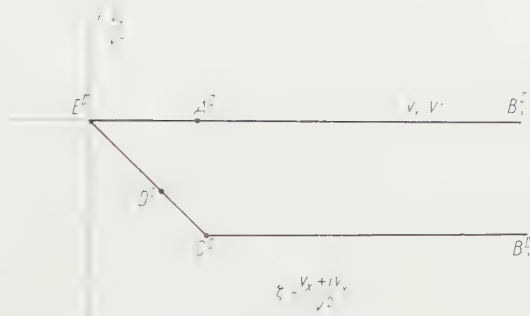


Figure 10
The complex-velocity plane.

We may now proceed as in Section 3.1;

$$\tau = -\cosh(\pi \gamma \xi)$$

maps the semi-infinite rectangle on the upper half of the τ -plane, where

$$\tau_D = -\cos\left[\frac{\pi \gamma}{V_\infty} \sin(\pi - \varphi)\right],$$

and

$$\tau_A = \cosh\left(\frac{\pi \gamma}{V_\infty}\right).$$

The cross ratio is again used for a more convenient locating of τ_E , τ_D , and τ_A ⁸⁾;

$$T = \frac{(\tau - \cos[(\pi \gamma/V_\infty) \sin(\pi - \varphi)]) [\cosh(\pi \gamma/V_\infty) - 1]}{(\tau + \cosh \pi \gamma/V_\infty) (1 - \cos[(\pi \gamma/V_\infty) \sin(\pi - \varphi)])}.$$

(See Figure 5) where

$$T_B = \frac{\cosh(\pi \gamma/V_\infty) - 1}{1 - \cos[(\pi \gamma/V_\infty) \sin(\pi - \varphi)]}$$

and

$$T_C = \frac{1 + \cos[(\pi \gamma/V_\infty) \sin(\pi + \varphi)]}{1 - \cos[(\pi \gamma/V_\infty) \sin(\pi - \varphi)]} \cdot \frac{\cosh(\pi \gamma/V_\infty) - 1}{\cosh(\pi \gamma/V_\infty) + 1}.$$

⁸⁾ If $\varphi = \pi/2$, this equation reduces to the one in Section 3.1.

On the interface ζ may be given as

$$\zeta = -\frac{1}{\gamma} i + \frac{1}{\gamma} \cot \alpha,$$

where α is the parameter previously introduced and α varies from $\pi - \varphi$ to 0; consequently,

$$\tau = -\cosh(\pi \gamma \xi) = -\cosh[\pi \gamma \zeta - \pi \gamma (\operatorname{Im} \zeta) \cot(\pi - \varphi)]$$

$$\left(\operatorname{Im} \zeta = \frac{V_y}{V^2} = -\frac{1}{\gamma}, \text{ and } \cot \alpha = \frac{dx}{dy} \right),$$

$$\tau = -\cosh[-\pi i + \pi \cot \alpha + \pi \cot(\pi - \varphi)]$$

$$= \cosh[\pi \cot \alpha + \pi \cot(\pi - \varphi)],$$

$$= \cosh(\pi \cot \alpha) \cosh[\pi \cot(\pi - \varphi)] + \sinh(\pi \cot \alpha) \sinh[\pi \cot(\pi - \varphi)].$$

The combined effect of the transformation on the interface is

$$W = \frac{V_\infty a}{\pi} \log T$$

or

$$\phi_{BC} = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \left\{ \frac{[K_1 \cosh(\pi dx/dy) + K_2 \sinh(\pi dx/dy) + K_3](K_4 - 1)}{[K_1 \cosh(\pi dx/dy) + K_2 \sinh(\pi dx/dy) + K_4](1 - K_3)} \right\}, \quad (29)$$

where

$$K_1 = \cosh[\pi \cot(\pi - \varphi)], \quad K_2 = \sinh[\pi \cot(\pi - \varphi)],$$

$$K_3 = \cos \left[\frac{\pi \gamma}{V_\infty} \sin(\pi - \varphi) \right], \quad \text{and} \quad K_4 = \cosh \left(\frac{\pi \gamma}{V_\infty} \right).$$

Recalling that $\phi_{BC} = \lambda \gamma + \text{constant}$, and using the condition $dy/dx = 0$ at B , one may obtain the following relationship:

$$\gamma y = \frac{V_\infty a}{\pi} \log \left\{ \frac{K_1 \cosh(\pi dx/dy) + K_2 \sinh(\pi dx/dy) + K_3}{K_1 \cosh(\pi dx/dy) + K_2 \sinh(\pi dx/dy) + K_4} \right\} \quad (30)$$

Using the identity

$$K_1 \cosh \left(\pi \frac{dx}{dy} \right) + K_2 \sinh \left(\pi \frac{dx}{dy} \right) = \sqrt{K_1^2 - K_2^2} \left\{ \cosh \left(\pi \frac{dx}{dy} + \tanh^{-1} \frac{K_2}{K_1} \right) \right\},$$

where $K_1^2 \geq K_2^2$, one may solve equation (30) by a single quadrature as

$$x = x_c + \frac{1}{\pi} \int_{y_c}^y \left[\cosh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{K_1^2 - K_2^2}} \cdot \frac{K_3 - K_4 e^{\pi \gamma y / V_\infty a}}{e^{\pi \gamma y / V_\infty a} - 1} \right) dy - \left(\tanh^{-1} \frac{K_2}{K_1} \right) (y - y_c) \right] \quad (31)$$

The boundary condition $y = y_c$ at $x = x_c$ may be determined from equation (31) by setting $dx/dy = \cot(\varphi - \pi)$ at point C . One obtains

$$y_c = \frac{V_\infty a}{\pi \gamma} \log \left\{ \frac{K_1^2 - K_2^2 + K_3}{K_1^2 - K_2^2 + K_4} \right\}, \quad \text{and} \quad x_c = y_c \cot(\varphi - \pi). \quad (32)$$

Conclusion

The problem of determining the free boundary between two fluids, in a bent channel, under dynamic conditions has been investigated. For a channel with a right-angle bend the possibility of the interface having an inflection point was also considered. This situation appeared to correspond to an unstable equilibrium, hence when the general problem (a channel with an arbitrary-angle bend) was attempted it was assumed that an inflection point could not occur. An ordinary, first-order, differential equation for the free-boundary was obtained, which was pointed out could be solved by a single quadrature.

Acknowledgement

R. P. GILBERT would like to thank Professor ALFRED SCHILD for originally suggesting this problem to him, and for helpful discussions.

REFERENCES

- [1] HUBBERT, M. K., *J. of Geology* 48, 785-944 (1940); BULL, A., *A. P. G.* 37, 1954-2026 (1953).
- [2] YUSTER, S. T., *Petr. Trans., A. I. M. E.* 148, 149-156 (1953).
- [3] HUGHES, R. V., *Report to Houston, Div. Supervisors, Gulf Oil Co.*, (Sept. 1954).
- [4] MUSKAT, M., *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, p. 129 (1937).

Zusammenfassung

Untersucht wird, wie in einem Kanal mit Abbiegung unter dynamischen Bedingungen die freien Randwerte zwischen zwei Flüssigkeiten zu bestimmen seien. Für einen Kanal mit rechtwinkliger Abbiegung wird insbesondere die Möglichkeit in Erwägung gezogen, dass die Zwischenfläche einen Wendepunkt besitzt. Dieser Sachverhalt bezieht sich auf einen instabilen Gleichgewichtszustand; für den allgemeinen Fall (Kanäle mit Abbiegungen in beliebigem Winkel) wird deshalb angenommen, Wendepunkte könnten nicht vorkommen. Gewonnen wird eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, für die sich herausstellt, dass sie durch eine einfache Quadratur gelöst werden kann.

(Received: January 11, 1960.)

A Type of Solution for Thin Shells in the Form of an Hyperbolic Paraboloid

By GILBERT H. BEGUIN, Genève

Introduction

Today some interest is being shown in the shallow shell theory [2, 4, 5]¹⁾. One interesting problem is that connected with the hyperbolic paraboloid, for this surface has a simple algebraic expression, and it is a surface of negative total curvature.

A system of differential equations which describe the state of stress and deformation of shallow shells has been indicated by MARGUERRE [3]; this system takes membrane, bending and non-linear effects into account. Russian authors [1, 4] have derived similar systems of differential equations for the linear case.

We recall that by 'shallow shell' is meant a shell whose middle surface $z(x, y)$ is such that the quantities

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

are negligible compared to unity over the entire region occupied by the shell. In practical applications the use of this 'shallow shell' theory is allowable as long as

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \leq \frac{1}{8} \quad \text{to} \quad \frac{1}{2},$$

depending upon the purpose of the analysis, and its required accuracy.

Statement of the Problem

For convenience we shall use the notation and the equations of shallow shell theory as presented by E. REISSNER in his article [5].

Oxy is a Cartesian system of coordinates, its origin 0 lies on the middle surface S of the shell; S is described by the equation

$$z = z(x, y) = \frac{c}{a b} x y. \quad (1)$$

¹⁾ Numbers in brackets refer to References, page 367.

This is a particular type of hyperbolic paraboloid, for its two directing planes are perpendicular. The z -axis is parallel to the intersection of the directing planes, and the generators of the surface (1) are projected onto the xy -plane as the lines $x = \text{constant}$, and $y = \text{constant}$. The lines of curvature project onto the same plane as the curves:

$$u \pm v = \text{constant}, \text{ with } \sinh u = \frac{c x}{a b}, \quad \sinh v = \frac{c y}{a b}.$$

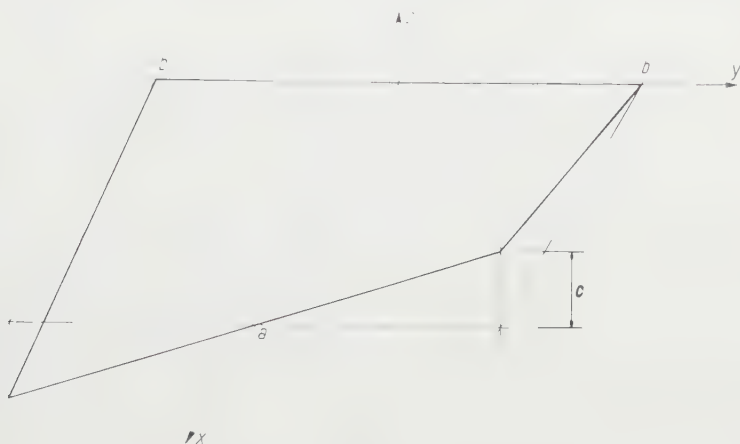


Figure 1
Middle surface of the shell.

We consider the portion of the surface (1) bounded by

$$x = 0, \quad x = a, \quad \text{and} \quad y = b, \quad y = -b. \quad (2)$$

The edges of this region are generators of the surface, and straight lines (Figure 1). This surface we take to be the middle surface of a thin shell with uniform thickness h .

The conditions of equilibrium of a small element yield 5 equations for the force and couple resultants:

$$\begin{aligned} N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} &= N_{yx}, & \text{tangential stress resultants,} \\ Q_x, Q_y, & & \text{transverse stress resultants,} \\ M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} &= M_{yx}, & \text{flexural and torsional couples.} \end{aligned}$$

The load is defined by its components in the x , y , and z -directions: q_x, q_y, q_z .

The force-displacement relationships in classical theory (LOVE's first approximation) yield 6 additional equations. All these equations can be reduced to a system of 2 simultaneous differential equations for the Airy stress function F and for the displacement component W .

In the case of the linear theory these 2 basic differential equations read as follows ($q_x = q_y = 0$):

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 W = q_z - \frac{2c}{ab} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \nabla^2 \nabla^2 F = E h \frac{2c}{ab} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

The problem is to find a set of 2 functions $F(x, y)$ and $W(x, y)$ satisfying (3) and some boundary conditions to be prescribed.

Remarks

It would be convenient to get rid of the term q_z . Thus we set:

$$W = W_1 + \theta, \quad F = F_1 + \Phi; \quad (4)$$

and substitute in (3). We note the following:

a) Whenever a function $F_1(x, y)$ can be found which satisfies both the equation of linear membrane theory (q_z : given loading):

$$q_z - \frac{2c}{ab} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad (5)$$

and the condition:

$$\nabla^2 \nabla^2 F_1 = 0; \quad (6)$$

then the system (3) can be reduced to the following:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= -\frac{2c}{abD} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -k_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= E h \frac{2c}{ab} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

The parameters k_1 and k_2 are given by the following expressions:

$$k_1 = \frac{2c}{abD}, \quad k_2 = \frac{2c}{ab} E h, \quad \text{with} \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (k_1, k_2, D > 0). \quad (8)$$

b) Whenever a function $W_1(x, y)$ can be found which satisfies both the equation of classical plate theory:

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 W_1 = q_z, \quad (9)$$

and the condition

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad (10)$$

then the system (3) can be reduced to the following:

$$\nabla^2 \nabla^2 \theta = -k_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \nabla^2 \nabla^2 F = k_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

From now on we assume the load to be such that one of the above reductions is possible.

Within the assumptions made above the problem of finding the state of stress and deformation of an hyperbolic paraboloid subjected to the load q_z – and supported in a way still to be prescribed – amounts to finding a set of 2 functions, say $W(x, y)$ and $\Phi(x, y)$, or $\theta(x, y)$ and $F(x, y)$, which satisfy the system (7) or (11), and appropriate boundary conditions. In the latter the contribution of F_1 , or W_1 , must not be forgotten.

Solutions (general considerations)

Let us assume that a solution of the system (7) exists. For the time being we disregard the boundary conditions. We call this solution $T(x, y)$:

$$T = [W(x, y); \Phi(x, y)],$$

T is a vector whose components are W and Φ .

Property 1: if \bar{T}_1 and \bar{T}_2 are solutions of the system (7), then $\bar{T}_1 + A \bar{T}_2$ is also a solution of the same system ($A = \text{constant}$).

Property 2: if W and Φ are the components of a vector T , which is solution of (7): $T = [W, \Phi]$, then

$$(W + k_1 l^2 \Phi) \quad \text{and} \quad (\Phi - k_2 l^2 W)$$

are also the components of a vector T_1 :

$$\bar{T}_1 = [(W + k_1 l^2 \Phi); (\Phi - k_2 l^2 W)],$$

which is also a solution of (7). The arbitrary parameter l has the dimension of a length.

The operator ∇^2 reduces to the following:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (12)$$

because of the assumption of shallowness and of the choice of coordinates.

Simple solutions in terms of polynomials are obtained by direct substitution and identification of coefficients. One type of solution reads as follows:

$$\Phi = y [a_1 x^5 + P_4(x)] - x [a_1 y^5 + Q_4(y)] + P_8(x) + Q_8(y),$$

$$W = y [c_1 x^5 + U_4(x)] - x [c_1 y^5 + V_4(y)] + U_8(x) + V_8(y).$$

$P_j(x)$, $Q_j(y)$, $U_j(x)$, $V_j(y)$ are polynomials of degree j in x and in y . The polynomials in the above expressions are not entirely arbitrary, some of their coefficients are interrelated. This type of solution is of limited interest.

A Solution of the Levy Type

In the plate problem, in classical theory it is customary for the case of a rectangular plate with 2 opposite edges simply supported to take, as shown by M. LEVY, the solution in the form:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} Y(n, y) \sin \frac{n \pi x}{a}.$$

For the problem of the hyperbolic paraboloid under consideration, in linear shell theory we take a solution in the form:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} W = w(y, \alpha) \sin \alpha x, \\ \Phi = \kappa f(y, \alpha) \cos \alpha x; \text{ with } \kappa^2 = E h D. \end{array} \right. \quad (13)$$

We substitute these expressions in (7) and obtain 2 simultaneous ordinary differential equations for the unknown functions $f(y)$ and $w(y)$. These equations read as follows:

$$L(f) = \frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \alpha^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha^4 f = k \alpha \frac{dw}{dy}, \quad (14)$$

$$L(w) = \frac{d^4 w}{dy^4} - 2 \alpha^2 \frac{d^2 w}{dy^2} + \alpha^4 w = k \alpha \frac{df}{dy}, \quad (15)$$

where the constant k is a positive number:

$$k = (k_1 k_2)^{1/2}. \quad (16)$$

The operator $L(\)$ applies both to $f(y)$ and $w(y)$. In order to obtain a solution for this system (14, 15) one can eliminate one of the unknown functions, say $w(y)$, and obtain an eighth order ordinary differential equation for the remaining function, say $f(y)$. However, we prefer to proceed as follows:

let us put

$$f(y) = a_j e^{\lambda_j y}, \quad w(y) = b_j e^{\lambda_j y}, \quad (17)$$

and substitute in the system (14, 15). This yields 2 simultaneous relationships which read:

$$a_j (\lambda^4 - 2 \alpha^2 \lambda^2 + \alpha^4) = a_j (\lambda^2 - \alpha^2)^2 = b_j k \alpha \lambda, \quad (18)$$

$$b_j (\lambda^4 - 2 \alpha^2 \lambda^2 + \alpha^4) = b_j (\lambda^2 - \alpha^2)^2 = a_j k \alpha \lambda. \quad (19)$$

There are 2 alternative possibilities:

$$a_j = b_j, \quad \text{and} \quad a_j = -b_j.$$

If we choose $a_j = b_j$, then the corresponding characteristic equation reads:

$$(\lambda^2 - \alpha^2)^2 - k \alpha \lambda = 0, \quad \text{case 1.}$$

If we choose $a_j = -b_j$, then the corresponding characteristic equation reads:

$$(\lambda^2 - \alpha^2)^2 + k \alpha \lambda = 0, \quad \text{case 2.}$$

We introduce 2 non-dimensional parameters ξ and β :

$$\lambda = \xi \alpha, \quad k = \beta \alpha^2, \quad \beta \text{ real} > 0;$$

and write the characteristic equations as follows:

$$(\xi^2 - 1)^2 \mp \beta \xi = 0. \quad (20)$$

In case 1 there are 2 real roots ξ_1, ξ_2 , and 2 complex conjugate roots $(-\xi_3), (-\xi_4)$, with negative real parts.

In case 2 there are 2 real roots $(-\xi_1), (-\xi_2)$, and 2 complex conjugate roots ξ_3, ξ_4 , with positive real parts.

It is possible to establish the following inequalities:

$$\text{a) if } \xi_1 = 1 + \varepsilon, \quad \text{and} \quad \xi_2 = 1 - \mu,$$

$$\text{then } 0 < \mu < 1; \quad 0 < \mu < \varepsilon; \quad (\varepsilon - \mu) < \varepsilon \mu;$$

$$\text{b) if } \xi_3 = \gamma + i \delta, \quad \text{and} \quad \xi_4 = \gamma - i \delta,$$

$$\text{then } 0 < \delta; \quad 0 < \delta^2 < \frac{1}{2} \beta; \quad 1 < \gamma.$$

In case 1 the following expression:

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) &= a_1 e^{\lambda_1 y} + a_3 e^{\lambda_2 y} + a_5 e^{-\tau y} \cos \sigma y + a_7 e^{-\tau y} \sin \sigma y \\ w_1(y) &\equiv f_1(y), \quad \text{where } \tau = \alpha \gamma, \quad \sigma = \alpha \delta, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

is a solution of the system (14, 15).

In case 2 the solution reads as follows:

$$f_2(y) = a_2 e^{-\lambda_1 y} + a_4 e^{-\lambda_2 y} + a_6 e^{\tau y} \cos \sigma y + a_8 e^{\tau y} \sin \sigma y, \quad w_2(y) \equiv -f_2(y). \quad (22)$$

With the postulate

$$W = w(y, \alpha) \sin \alpha x, \quad \Phi = \kappa f(y, \alpha) \cos \alpha x,$$

the general solution of the system (14, 15) is written

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y), \quad w(y) = w_1(y) + w_2(y).$$

The above expressions can be written in a fashion that brings out their odd and even parts:

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= a_1 \sinh \lambda_1 y + a_3 \sinh \lambda_2 y + a_5 \cos \sigma y \sinh \tau y + a_7 \sin \sigma y \cosh \tau y \\ &\quad + a_2 \cosh \lambda_1 y + a_4 \cosh \lambda_2 y + a_6 \cos \sigma y \cosh \tau y + a_8 \sin \sigma y \sinh \tau y; \\ w(y) &= a_2 \sinh \lambda_1 y + a_4 \sinh \lambda_2 y - a_6 \cos \sigma y \sinh \tau y - a_8 \sin \sigma y \cosh \tau y \\ &\quad + a_1 \cosh \lambda_1 y + a_3 \cosh \lambda_2 y - a_5 \cos \sigma y \cosh \tau y - a_7 \sin \sigma y \sinh \tau y. \end{aligned} \right\}$$

The coefficients a_j are determined by the boundary conditions.

Another Solution of the same Type

The postulate (13) may be replaced by the following:

$$T = \left\{ \begin{aligned} W &= w(y, \alpha) \cos \alpha x, \\ \Phi &= \kappa f(y, \alpha) \sin \alpha x; \quad \text{with} \quad \kappa^2 = E h D. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

This leads to a system of differential equations for the unknown functions $w(y)$ and $f(y)$, which reads:

$$\left. \begin{aligned} L(f) &= \frac{d^4 f}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha^4 f = -k\alpha \frac{dw}{dy}, \\ L(w) &= \frac{d^4 w}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 w}{dy^2} + \alpha^4 w = -k\alpha \frac{df}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

In a manner similar to the one used above, it is possible to derive for $f(y)$ and $w(y)$ the following expressions:

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= b_1 e^{\lambda_1 y} + b_2 e^{-\lambda_1 y} + b_3 e^{\lambda_2 y} + b_4 e^{-\lambda_2 y} \\ &\quad + b_5 e^{\tau y} \cos \sigma y + b_6 e^{\tau y} \sin \sigma y + b_7 e^{-\tau y} \cos \sigma y + b_8 e^{-\tau y} \sin \sigma y; \\ w(y) &= -b_1 e^{\lambda_1 y} + b_2 e^{-\lambda_1 y} - b_3 e^{\lambda_2 y} + b_4 e^{-\lambda_2 y} \\ &\quad + b_5 e^{\tau y} \cos \sigma y + b_6 e^{\tau y} \sin \sigma y - b_7 e^{-\tau y} \cos \sigma y - b_8 e^{-\tau y} \sin \sigma y. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

The parameters $\lambda_j = \alpha \xi_j$, $\tau = \alpha \gamma$, $\sigma = \alpha \delta$ are exactly the same quantities as above. The system (25) leads to a characteristic equation identical to (20); it reads:

$$(\xi^2 - 1)^2 \pm \beta \xi = 0.$$

For purposes of application we write the functions $f(y)$ and $w(y)$ in a way that shows their odd and even parts:

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= b_1 \sinh \lambda_1 y + b_3 \sinh \lambda_2 y + b_5 \cos \sigma y \sinh \tau y + b_7 \sin \sigma y \cosh \tau y \\ &\quad + b_2 \cosh \lambda_1 y + b_4 \cosh \lambda_2 y + b_6 \cos \sigma y \cosh \tau y + b_8 \sin \sigma y \sinh \tau y ; \\ w(y) &= -b_2 \sinh \lambda_1 y - b_4 \sinh \lambda_2 y + b_6 \cos \sigma y \sinh \tau y + b_8 \sin \sigma y \cosh \tau y \\ &\quad - b_1 \cosh \lambda_1 y - b_3 \cosh \lambda_2 y + b_5 \cos \sigma y \cosh \tau y + b_7 \sin \sigma y \sinh \tau y . \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

The coefficients b_j are determined by the boundary conditions.

An Immediate Extension

In our postulates (13) and (24), the parameter α was left arbitrary. A generalisation of (13) presents itself immediately in which the solution can be written as follows:

$$T = \left\{ \begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^{\infty} w(y, n) \sin \frac{n \pi x}{a} , \\ \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa f(y, n) \cos \frac{n \pi x}{a} . \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

The same holds true for (24).

It must be clearly understood that for each value of the index n there are 4 roots $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, of the characteristic equation (20), and in general 8 terms in the expressions for $f(y)$ and $w(y)$. The tabulation of the roots ξ_j is an involved task, for their magnitude depends on the geometry (form and thickness) of the shell under consideration. More precisely the magnitude of the roots ξ_j is governed by the parameter β which reads:

$$\beta = \frac{k}{\alpha^2} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi^2} \left(\frac{2ac}{bh} \right) \frac{1}{n^2} . \quad (29)$$

We note also that the boundary values of the various quantities (couple, displacements, etc.) along the edges $y = \text{constant}$ appear as ordinary trigonometric series. They can be handled in the usual fashion. However, along the edges $x = \text{constant}$, the boundary values as derived from (28) involve series of terms of the type (23). It is not known if an arbitrary function can be represented over $(-b, b)$ with the help of such terms. In specific cases one may have to seek an approximate expansion.

Application

Consider the portion of the hyperbolic paraboloid

$$z = \frac{1}{2a}xy \quad (30)$$

limited by the planes

$$x = 0, \quad x = a, \quad \text{and} \quad y = \pm \frac{a}{2}, \quad (\text{Figure 2})$$

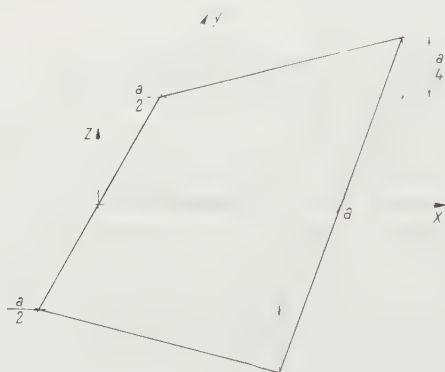


Figure 2
Portion of hyperbolic paraboloid.

With this choice the parameter β may be written

$$\beta = \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{\frac{12}{\pi^2} (1 - \nu^2)} \left(\frac{a}{h} \right) \right].$$

For the sake of simplicity we take the factor in the brackets to be an integer say 36. This corresponds to a shell thickness of about $h = 0.009\,65\,a$.

Then the roots of the following equation

$$(\xi^2 - 1)^2 + \frac{36}{n^2} \xi = 0,$$

must be determined.

Computations show these roots to have the following values:

$n = 1$:

$$\xi_1 = 1 + \varepsilon = 3.495\,357\dots; \quad \xi_2 = 1 - \mu = 0.027\,735\,0\dots;$$

$$\xi_3 = \gamma + i\delta = 1.761\,546\dots + i\,2.685\,556\dots; \quad \xi_4 = \gamma - i\delta.$$

$n = 2$:

$$\xi_1 = 2.370\,409\dots; \quad \xi_2 = 0.108\,509\,9\dots;$$

$$\xi_3 = \gamma + i\delta = 1.439\,459\dots + i\,1.347\,510\dots; \quad \xi_4 = \gamma - i\delta.$$

$n = 3$:

$$\xi_1 = 1.946\,965\dots; \quad \xi_2 = 0.225\,270\,4\dots;$$

$$\xi_3 = \gamma + i\delta = 1.086\,117\dots + i\,1.048\,981\dots; \quad \xi_4 = \gamma - i\delta.$$

The shell is assumed uniformly loaded:

$$q_x = q_y = 0, \quad q_z = p = \text{constant}.$$

Along the edges $x = 0$ and $x = a$, we choose to impose the following boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \quad \text{and} \quad x = a: \quad W = 0, \quad M_{xx} = 0, \quad \text{i.e. simple support;} \\ u = 0, \quad N_{xy} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

i.e. edge stiff in the x -direction.

The appropriate form of the solution is as follows:

$$T = \left\{ \begin{aligned} W &= \sum w(y, \alpha) \sin \alpha x + W_1(x, y); \\ \Phi &= \kappa \sum f(y, \alpha) \cos \alpha x, \quad \text{with} \quad \kappa^2 = E h D. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

The conditions (31) are automatically satisfied provided we take

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad W_1(0, y) = W_1(a, y) \equiv 0,$$

and at $x = 0$ and $x = a$:

$$\left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right]_{x=a} \equiv 0.$$

The function $W_1(x, y)$ must also satisfy the conditions (9) and (10); it is then a function of x alone which reads:

$$W_1(x, y) = W_1(x) = \frac{p}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4p a^4}{\pi^5 D} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (33)$$

where n is an odd integer: $n = 1, 3, 5, \dots$.

For $w(y, \alpha)$ we take an even function of y in order to obtain the same boundary values on both edges $y = \pm a/2$:

$$w(y, \alpha) = a_1 \cosh \lambda_1 y + a_2 \cosh \lambda_2 y + \dots; \quad (34)$$

the corresponding general expression for $f(y, \alpha)$ reads:

$$f(y, \alpha) = a_1 \sinh \lambda_1 y + a_2 \sinh \lambda_2 y + \dots \quad (34')$$

The arbitrary constants a_j will be determined with the help of the boundary conditions at $y = \pm a/2$, still to be prescribed. These conditions involve stresses, couples, and displacements. For these quantities we have the following general expressions:

$$\begin{aligned} N_{yy} &= \kappa \sum (-\alpha^2) f(y, \alpha) \cos \alpha x, \quad N_{yx} = \kappa \sum \alpha f'(y, \alpha) \sin \alpha x, \\ M_{yy} &= -D \left[\sum \left(f''(y, \alpha) - \nu \alpha^2 f(y, \alpha) \right) \sin \alpha x + \nu W_1''(x) \right], \\ M_{yx} &= -(1 - \nu) D \sum \alpha w'(y, \alpha) \cos \alpha x, \\ u &= \frac{\kappa}{E h} \sum \frac{1}{\alpha} \left(f''(y, \alpha) + \nu \alpha^2 f(y, \alpha) \right) \sin \alpha x - \frac{c}{a b} y W(x, y) + \text{const}, \\ v &= \frac{\kappa}{E h} \sum \left(-\alpha^2 \int f(y, \alpha) dy - \nu f'(y, \alpha) \right) \cos \alpha x - \frac{c}{a b} x W(x, y) + l(x), \end{aligned}$$

where uniform convergence of the trigonometric series has been assumed. The arbitrary function $l(x)$ is related to $W_1(x)$ in the following manner:

$$l(x) = \frac{2c}{ab} \int W_1(x) dx. \quad (35)$$

We are now in a position to impose at $y = \pm a/2$ boundary conditions compatible with the postulates (32) and (34). We may require e.g. these edges to be simply supported:

$$\begin{aligned} W \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) &= \sum w \left(\pm \frac{a}{2}, \alpha \right) \sin \alpha x + W_1(x) \equiv 0, \\ M_{yy} \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) &= 0, \quad \text{or} \quad \sum w'' \left(\pm \frac{a}{2}, \alpha \right) \sin \alpha x \equiv 0. \end{aligned}$$

We may also require these edges to be stiff in the y -direction:

$$v \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) \equiv 0 \quad \text{and} \quad N_{yx} \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) \equiv 0.$$

These 2 requirements lead to the following equations:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{E h} \sum \left(-\alpha^2 \int_{-a/2}^{a/2} f(y, \alpha) dy - \nu f' \left(\pm \frac{a}{2}, \alpha \right) \right) \cos \alpha x + l(x) &\equiv 0, \\ \sum \alpha f' \left(\pm \frac{a}{2}, \alpha \right) \sin \alpha x &\equiv 0. \end{aligned}$$

As an approximation we take only the first harmonic ($n = 1$). Thus we get 4 equations in 4 unknowns for the coefficients entering the solution (32). Computations show these coefficients to have the following values:

$$a_j = \frac{4}{\pi^5} \frac{p}{D} a'_j, \quad \text{with}$$

$$a'_1 = 10^{-6} \cdot 19.536 \dots; \quad a'_2 = -0.997 \, 519 \dots;$$

$$a'_3 = -10^{-3} \cdot 0.277 \, 8 \dots; \quad a'_4 = 10^{-3} \cdot 0.714 \, 5 \dots$$

The expressions for the stress resultants and the couples are then easily written.

Remark: It is seen that the boundary-conditions as imposed in the above example lead to a state of stress which is unlike that of a flat plate.

REFERENCES

- [1] AMBARTSUMYAN, S. A., *On the calculation of shallow shells* (*K Raschetu Plogikhh Obolochek*), NACA TM 1425, Dec. 1956. Translation from Prikl. Mat. Mekh. 11 (1947).
- [2] CONRAD, D. A., *Singular solutions in the theory of shallow shells*. Doctoral dissertation, University of Stanford (1957).
- [3] MARGUERRE, K., *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung*. Proc. 5th Int. Congress Appl. Mech., 93–101 (1938).
- [4] NAZAROV, A. A., *On the theory of thin shallow shells* (*K Teorii Tonkikh Plogikhh Obolochek*), NACA TM 1426, Dec. 1956. Translation from Prikl. Mat. Mekh. 13 (1949).
- [5] REISSNER, E., *On some aspects of the theory of thin elastic shells*. Journal Boston Soc. Civ. Eng. 42, Nr. 2, 100–133 (1955).

Résumé

Pour le problème du paraboloïde hyperbolique une solution est présentée qui se base sur la théorie linéaire des voiles minces peu incurvés. La solution prend en considération l'effet de la flexion; c'est une extension du type de solution indiqué par M. LÉVY pour la plaque rectangulaire (théorie classique). Un exemple d'application termine cette étude.

(Received: August 5, 1959.)

The Minimum Weight Design of Circular Sandwich Plates

By GEORGE EASON, Newcastle upon Tyne, Great Britain¹⁾

1. Introduction

The minimum weight design of circular plates was first discussed by HOPKINS and PRAGER [1, 2] for the Tresca yield condition. FREIBERGER and TEKINALP [2] assumed the von Mises yield condition to obtain the solution for a simply supported, fully loaded plate. Design for minimum weight was first made systematic by DRUCKER and SHIELD [3, 4]. The direct design procedures developed by them were used in [5] to solve the problem of the minimum weight design of sandwich and solid circular plates assuming the Tresca yield condition and the associated flow rule.

The direct methods due to DRUCKER and SHIELD are used here to investigate the minimum weight design of a circular sandwich plate when the von Mises yield condition and its associated flow rule are assumed. The material of the plate is assumed to be perfectly plastic, non-hardening and uniform so that the design for minimum weight is the same as that for minimum volume. The minimum weight design is to be such that the whole plate is about to collapse. The plate is assumed to be simply supported or built-in at its edge and is uniformly loaded over an axially symmetric area. The results obtained for the case of simple support are identical with those for the Tresca yield condition. When the plate is built-in the results are more complicated and appear as integrals which have to be evaluated numerically. Comparison is made with the results for the Tresca yield condition when the plate is fully loaded and built-in. The results for the two yield conditions are very similar in general nature and in view of this the much simpler results of the Tresca yield condition are likely to be adequate in a practical design.

2. The Basic Equations

The plate is assumed to be horizontal and to have radius R . With radial co-ordinate r the equations of equilibrium when the applied load has axial symmetry are

$$\frac{d}{dr}(r Q) + r p = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr}(r M) - N = r Q, \quad (2)$$

¹⁾ King's College, Department of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 375.

where M is the radial bending moment, N the circumferential bending moment, Q the shear force and p the applied load, considered positive when it acts downwards.

The von Mises yield condition for plates is

$$f = M^2 - M N + N^2 - M_0^2 = 0, \quad (3)$$

where M_0 is the fully plastic bending moment. Associated with the bending moments M and N are the curvature rates κ and λ given by

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dr^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial M} = \mu (2M - N), \quad (4)$$

$$\lambda = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = \mu \frac{\partial f}{\partial N} = \mu (2N - M), \quad (5)$$

where μ is a non-negative parameter and \dot{w} is the downward velocity of the plate. Equations (4) and (5) may be combined to give

$$\frac{d^2 w}{dr^2} (2N - M) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} (2M - N). \quad (6)$$

The sandwich plate considered here has a central core of constant thickness H and two identical face sheets of thickness t ($t \ll H$). The central core carries no bending stress so that the fully plastic bending moment is given by

$$M = \sigma_0 H t, \quad (7)$$

where σ_0 is the yield stress of the face sheets. We wish to determine the minimum volume of the face sheets, allowing the thickness t to vary. The rate of dissipation of energy per unit volume of the face sheets of the plate due to plastic action is given by

$$\frac{D}{t} = \frac{M\kappa + N\lambda}{t} \quad (8)$$

where D is the rate of dissipation of energy per unit area of the middle surface. It has been shown in [2, 3, 4] that D/t is constant for a minimum volume design.

The yield condition (3) is satisfied by the relations

$$M = -\frac{2M_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right), \quad N = \frac{2M_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{6}\pi + \theta\right), \quad (9)$$

where the parameter θ has the value $\pi/2$ when $M = N = M_0$. Using the relations (9) and (7), equation (2) now becomes

$$r t \frac{d\theta}{dr} \cos\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) - r \frac{dt}{dr} \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) - t \cos \theta = \frac{r Q V^3}{2 \sigma_0 H}, \quad (10)$$

and equation (6) takes the form

$$\frac{d^2w}{dr^2} \cos\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \cos\left(\frac{1}{6}\pi + \theta\right) = 0. \quad (11)$$

Equation (8) results in

$$\frac{d^2w}{dr^2} \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \sin\left(\frac{1}{6}\pi + \theta\right) = \frac{A\sqrt{3}}{2}, \quad (12)$$

where A is an undetermined constant. Equations (11) and (12) may be combined to give

$$\frac{d^2w}{dr^2} = A \cos\left(\frac{1}{6}\pi + \theta\right), \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = -A \cos\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right), \quad (14)$$

and eliminating w between these equations results in

$$r \frac{d\theta}{dr} \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) + \sqrt{3} \cos \theta = 0. \quad (15)$$

3. Solution of the Basic Equations

In this section solutions of equations (10), (14) and (15) will be obtained. The procedure is to solve equation (15) for r in terms of θ so that equations (10) and (14) may then be solved for t and w respectively. Two solutions of equation (15) are required here, and these will now be considered.

(i) Particular solution.

One solution of equation (15) is obtained by assuming that θ is constant so that

$$\theta = \frac{1}{2}\pi. \quad (16)$$

Equation (14) now gives

$$w = B - \frac{1}{4} A r^2, \quad (17)$$

where B is a constant. An expression for t is obtained from equation (10) in the form

$$\sigma_0 H t = \int Q dr + C, \quad (18)$$

where C is a constant and Q is determined by equation (1).

(ii) General solution.

In general of course θ is not constant and writing equation (15) in the form

$$\frac{2}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \tan \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

results in

$$r^2 = D \sec \theta \exp\left(-\frac{\theta}{\sqrt{3}}\right), \quad (19)$$

where D is a constant. Using equation (15) it is possible to rewrite equation (14) in the form

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{A D \cos(\pi/6 - \theta) \sin(\pi/6 - \theta)}{\sqrt{3} \cos^2 \theta} e^{-\theta/\sqrt{3}},$$

so that

$$w = E - \frac{1}{4} A D \left\{ 2\sqrt{3} e^{-\theta/\sqrt{3}} + \tan \theta e^{-\theta/\sqrt{3}} + \sqrt{3} \int \tan \theta e^{-\theta/\sqrt{3}} d\theta \right\}, \quad (20)$$

where E is a constant. Similarly equation (10) may be written in the form

$$\frac{dt}{d\theta} - t \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} + \cot\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) \right\} = \frac{r Q}{2\sigma_0 H \cos \theta},$$

so that

$$\sigma_0 H t \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) e^{-\theta/\sqrt{3}} = F + \frac{1}{2} \int r Q \sin\left(\frac{1}{6}\pi - \theta\right) \sec \theta e^{\theta/\sqrt{3}} d\theta, \quad (21)$$

where F is a constant.

4. Particular Problems

The general results obtained in the previous section will now be applied to some particular cases of interest.

(i) Simply supported plate, central loading.

The problem to be considered is the minimum weight design of a simply supported circular plate of radius R which is loaded uniformly over a central region of radius a with the remainder of the plate unloaded. Thus p is constant for $0 \leq r < a$ and p is zero for $a < r \leq R$. The conditions to be satisfied at the edge of the plate are $M = 0$ and $w = 0$. The quantities Q , M , w and dw/dr must be continuous at $r = a$. The condition $M = 0$ at $r = R$ is satisfied by taking $t = 0$ at the edge of the plate. The solution of this problem is obtained by assuming $\theta = \pi/2$ everywhere. Applying the conditions given above to equations (1), (17) and (18) leads in a straightforward manner to the results

$$\theta = \frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$w = \frac{1}{4} A (R^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$r Q = \begin{cases} -\frac{1}{2} p r^2, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{1}{2} p a^2, & a \leq r \leq R, \end{cases}$$

$$\sigma_0 H t = \begin{cases} \frac{1}{4} p (a^2 - r^2) + \frac{1}{2} p a^2 \log \frac{R}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{1}{2} p a^2 \log \frac{R}{r}, & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

These expressions are identical with those obtained by ONAT et al. [5] assuming the Tresca yield condition and the associated flow rule. The results for the special case of the fully loaded plate ($a = R$) were previously obtained by FREIBERGER and TEKINALP [2].

(ii) Built-in plate, central loading.

We now consider the problem of a built-in circular plate of radius R which is loaded uniformly over a central region of radius a with the remainder of the plate unloaded. The conditions at the edge of the plate are $w = 0$ and $dw/dr = 0$. The second of these conditions implies that the edge of the plate corresponds to the point on the yield surface at which M has its minimum value and $\theta = -\pi/3$.

The solution of the problem is obtained by assuming that $\theta = \pi/2$ in a central region of the plate of radius b and that outside this region $\theta \geq -\pi/3$. The bending moment M must be continuous at $r = b$, and this condition is satisfied by taking $t = 0$ at $r = b$ and allowing θ to be discontinuous there. It was shown in [5] that dw/dr must be continuous at $r = b$. These conditions are all satisfied by allowing θ to have the value $\pi/2$ as b is approached from below and to have the value $-\pi/6$ as b is approached from above, so that from equation (14)

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{2} A r \quad \text{at } r = b.$$

The quantities Q and w must be continuous at $r = b$ and also M , Q , w and dw/dr are continuous at $r = a$.

Using the condition $r = R$ when $\theta = -\pi/3$ equation (19) gives

$$r^2 = s R^2 \sec \theta \exp\left(-\frac{\theta}{\sqrt{3}}\right), \quad b < r < R, \quad (22)$$

where

$$s = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

Since $r = b$ when $\theta = -\pi/6$ it is found that

$$\frac{b^2}{R^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right),$$

so that $b/R = 0.653$ in contrast with the value of $2/3$ obtained in [5] for the Tresca yield condition.

The remaining analysis is straightforward and it is found that equations (1) and (17) in the region $0 \leq r \leq b$, and equations (1) and (20) in the region $b \leq r \leq R$ lead to the results

$$w = \begin{cases} \frac{1}{4} A (b^2 - r^2) + \frac{A s R^2}{4 \sqrt{3}} \left\{ 3 e^{\pi/3 \sqrt{3}} - 5 e^{\pi/6 \sqrt{3}} - 3 I_1 \left(-\frac{1}{6} \pi \right) \right\}, & 0 \leq r \leq b, \\ \frac{1}{4} A s R^2 \left\{ \sqrt{3} e^{\pi/3 \sqrt{3}} - 2 \sqrt{3} e^{-\theta/\sqrt{3}} - \tan \theta e^{-\theta/\sqrt{3}} - \sqrt{3} I_1(\theta) \right\}, & b \leq r \leq R. \end{cases}$$

$$r Q = \begin{cases} -\frac{1}{2} p r^2, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{1}{2} p a^2, & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

for the deflection and shear force, after writing

$$I_1(\theta) = \int_{\pi/3}^{\theta} \tan \theta \exp \left(-\frac{\theta}{\sqrt{3}} \right) d\theta.$$

For $a \leq b$, equations (18) and (21) give

$$\sigma_0 H t = \begin{cases} \frac{1}{4} p (a^2 - r^2) + \frac{1}{2} p a^2 \log \frac{b}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{1}{2} p a^2 \log \frac{b}{r}, & a \leq r \leq b, \\ \frac{p a^2 \sqrt{3} e^{\theta/\sqrt{3}}}{8 \sin(\pi/6 - \theta)} \left\{ e^{-\theta/\sqrt{3}} - e^{\pi/6 \sqrt{3}} - I_1 \left(-\frac{1}{6} \pi \right) + I_1(\theta) \right\}, & b \leq r \leq R. \end{cases}$$

For $a \geq b$ equations (18) and (21) lead to

$$\sigma_0 H t = \begin{cases} \frac{1}{4} p (b^2 - r^2), & 0 \leq r \leq b, \\ \frac{p R^2 s e^{\theta/\sqrt{3}}}{4 \sin(\pi/6 - \theta)} I_2(\theta), & b \leq r \leq a, \\ \frac{p a^2 \sqrt{3} e^{\theta/\sqrt{3}}}{8 \sin(\pi/6 - \theta)} \left\{ e^{-\theta/\sqrt{3}} - e^{-a/\sqrt{3}} - I_1(\alpha) + I_1(\theta) \right\} \\ \quad + \frac{p R^2 s e^{\theta/\sqrt{3}}}{4 \sin(\pi/6 - \theta)} I_2(\alpha), & a \leq r \leq R, \end{cases}$$

where $I_2(\theta)$ is defined by

$$I_2(\theta) = \int_{\theta}^{-\pi/6} \frac{\sin(\pi/6 - \theta) e^{-2\theta/\sqrt{3}} d\theta}{\cos^2 \theta},$$

and $\theta = \alpha$ when $r = a$. Equation (22) gives a relationship between a and α of the form

$$a^2 = s R^2 \sec \alpha \exp \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right).$$

The variation of $\sigma_0 H t/p R^2$ with r/R for both the Tresca and von Mises yield conditions is shown in the table for the case in which the whole plate is loaded.

The volume of material in the face sheets is given by

$$V = 4 \pi \int_0^R r t dr,$$

so that for a fully loaded built-in plate

$$\sigma_0 H V = \frac{1}{4} \pi p b^4 + \frac{2 \pi p R^4 s^2}{\sqrt{3}} \int_{-\pi/3}^{-\pi/6} \frac{\sin(\pi/6 - \theta) \cos(\pi/6 - \theta) e^{-2\theta/\sqrt{3}} d\theta}{\cos^3 \theta} = 0.111 \pi p R^4,$$

in contrast with the value of $0.117 \pi p R^4$ for $\sigma_0 H V$ obtained in [5] for the Tresca yield condition. The case of a point force of magnitude P is obtained as a limiting case of the above by letting $\pi p a^2 \rightarrow P$ as $a \rightarrow 0$. The volume for this case is found to be

$$\sigma_0 H V = \frac{1}{2} P b^2 + \frac{1}{2} P R^2 s \sqrt{3} \left\{ e^{\pi/3 \sqrt{3}} - \frac{5}{3} e^{\pi/6 \sqrt{3}} - I_1 \left(-\frac{1}{6} \pi \right) \right\} = 0.324 P R^2,$$

in contrast with the value of $PR^2/3$ obtained in [5] for the Tresca yield condition.

It remains to be shown that the parameter μ appearing in equations (4) and (5) is non-negative. In the problems considered here the parameter θ lies between $-\pi/3$ and $\pi/2$ so that $\cos(\pi/6 - \theta) \geq 0$. Hence, the parameter μ appearing in equation (5) will be non-negative if the constant A appearing in equation (14) is non-negative. In all the problems considered here, A has the same sign as the velocity, which due to the conditions of loading will be positive. Since μ is non-negative the velocity fields are admissible velocity fields.

(iii) Annular loading.

Results for a plate which is simply supported or built-in, and loaded over the region $a \leq r \leq R$ only, may be obtained by methods similar to those used above. As for the Tresca yield condition (see [5]), the thickness t is constant in

the region $0 \leq r \leq a$ for both methods of support and in particular if $a \geq b$ the thickness is zero in the region $0 \leq r \leq a$ for built-in support.

The variation of $\sigma_0 H t / p R^2$ with r/R for uniform loading ($a = R$).

r/R	$\sigma_0 H t / p R^2$ for the Tresca yield condition	$\sigma_0 H t / p R^2$ for the von Mises yield condition
0	0.1111	0.1067
0.1	0.1086	0.1042
0.2	0.1011	0.0967
0.3	0.0886	0.0842
0.4	0.0711	0.0667
0.5	0.0486	0.0442
0.6	0.0211	0.0167
0.653	0.0044	0
0.667	0	
0.697	0.0100	0.0135
0.749	0.0276	0.0290
0.814	0.0497	0.0482
0.895	0.0783	0.0740
0.962	0.1028	0.0970
1.00	0.1173	0.1112

REFERENCES

[1] H. G. HOPKINS and W. PRAGER, *Limits of Economy of Material in Plates*, J. Appl. Mech. 22, 372-374 (1955).
[2] W. FREIBERGER and B. TEKINALP, *Minimum Weight Design of Circular Plates*, J. Mech. Phys. Solids 4, 294-299 (1956).
[3] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Design for Minimum Weight*, Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics (Brussels 1956).
[4] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Bounds on Minimum Weight Design*, Quart. appl. Math. 15, 269-281 (1957).
[5] E. T. ONAT, W. SCHUMANN and R. T. SHIELD, *Design of Circular Plates for Minimum Weight*, J. appl. Math. Phys. (Zamp) 8, 485-499 (1957).

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions le problème statique du choix des dimensions suivant: Comment doit varier l'épaisseur de point en point dans les plaques circulaires fléchies du type sandwich, pourque leur poids soit minimum, mais sans qu'il existe du fluage illimité? Comme hypothèse de base, nous avons pris la condition de plasticité de VON MISES et la règle de fluage associée. Les plaques sont simplement posées ou encastrees le long de leur contour et portent une charge répartie symétriquement par rapport à l'axe. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du problème analogue, où l'on utilise la condition de plasticité de TRESCA. Nous avons présenté finalement quelques résultats numériques.

(Received: February 16, 1960.)

On Rank-Diminishing Operations and their Applications to the Solution of Linear Equations

By EUGEN EGERVÁRY, Budapest, Hungary¹⁾

Notations

$A = [a_{ij}]$	matrix composed of the elements a_{ij} ,
A^*	transpose of A ,
a	column-vector,
a^*	row-vector,
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	diagonal matrix,
E	unit matrix,
$\rho(A)$	rank of A ,
$ A $	determinant of A .

Many special finite iterative methods for solving linear equations have been discussed by various writers²⁾. The methods used apply for the most part to the special problems considered by each writer.

In this paper we shall develop a general finite iterative method which consists in the repetition of a rank-diminishing operation and which will enable us to give a unified treatment for various iterative procedures occurring in the solution of linear equations.

These iterative procedures can be classified in two categories:

1. iteration of the rank-diminishing operation in order to obtain a dyadic decomposition of the matrix of a given system of equations,
2. iteration of the rank-diminishing operation in order to reduce the whole vector space (the unit matrix) to the subspace (to the matrix of lower rank) which constitutes the solution of the given system.

The first category includes 1. the triangular factorisation of GAUSS-BANACHIEWICZ and its generalization, 2. the recursive method for the inversion of a matrix and its application to the solution of boundary value problems, 3. the method of conjugate directions and the establishment of a general inversion formula including the inversion formula of STIEFEL-HESTENES.

The procedures belonging to the second category may be interpreted as general projection methods of which the vector method of PURCELL-MOTZKY

¹⁾ Institut de Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie. A posthumous paper prepared for publication by P. Rózsa.

²⁾ See References [1] - [8] on page 386.

and the author's method for solving a system of diophantine equations are particular cases.

All these methods require the repetition of simple, elementary routines, hence they seem to be suitable for machine computation.

1. Simple Rank-Diminishing Operations

The well-known inequalities

$$\varrho(A) - 1 = \varrho(A) - \varrho(\mathbf{b} \mathbf{c}^*) \leq \varrho(A - \mathbf{b} \mathbf{c}^*) \leq \varrho(A) + \varrho(\mathbf{b} \mathbf{c}^*) = \varrho(A) + 1$$

show that by the subtraction of a dyadic $\mathbf{b} \mathbf{c}^*$ from a given matrix \mathbf{A} the rank of \mathbf{A} increases or decreases just by one or it remains constant. It is easy to see that by this procedure the rank of \mathbf{A} cannot decrease unless the left factor \mathbf{b} is in the column space of \mathbf{A} and the right factor \mathbf{c}^* is in the row space of \mathbf{A} . But in the latter case \mathbf{b} has the form $\mathbf{A} \mathbf{u}$ and \mathbf{c}^* has the form $\mathbf{v}^* \mathbf{A}$, hence we have only to investigate the rank of $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{A}$, λ being a scalar parameter.

Let $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C}^*$ be a basic factorisation (see e. g. [2]) of \mathbf{A} . Then we have

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{A} = \mathbf{B} (\mathbf{E} - \lambda \mathbf{C}^* \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{B}) \mathbf{C}^*; \quad \varrho(\mathbf{E}) = \varrho(\mathbf{A}).$$

Here \mathbf{B} is invertable from the left, \mathbf{C}^* is invertable from the right and

$$\varrho(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{C}^* \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{B}) \geq \varrho(\mathbf{A}) - 1.$$

The value of the determinant

$$|\mathbf{E} - \lambda \mathbf{C}^* \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{B}| = 1 - \lambda \mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u}$$

shows that

$$\varrho(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{C}^* \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{B}) = \varrho(\mathbf{A}) - 1$$

if and only if $\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u} \neq 0$ and $\lambda = (\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u})^{-1}$. Hence we have the

Lemma. *By the subtraction of a dyadic $\mathbf{b} \mathbf{c}^*$ from a given matrix \mathbf{A} , the rank of \mathbf{A} decreases just by one if and only if $\mathbf{b} \mathbf{c}^*$ has the form*

$$\frac{\mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{v}^* \mathbf{A}}{\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u}}, \quad (1)$$

where \mathbf{u} and \mathbf{v}^* are arbitrary vectors subject only to the restriction $\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u} \neq 0$.

Starting now from an arbitrary matrix \mathbf{A} of rank r , we can decompose it into a sum of r dyadics by the following iterative procedure

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1}}, \quad (2)$$

where \mathbf{u}_{k+1} and \mathbf{v}_{k+1}^* are arbitrary vectors subject only to the restrictions

$\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1} \neq 0$. Then the dyadic decomposition of \mathbf{A} will be given by

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1}}. \quad (3)$$

2. Multiple Rank-Diminishing Operations

In this section we shall prove that the result \mathbf{A}_x of x successive simple rank-diminishing operations (1.2) can be obtained by the following multiple rank-diminishing operation

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}_x (\mathbf{V}_x^* \mathbf{A} \mathbf{U}_x)^{-1} \mathbf{V}_x^* \mathbf{A}, \quad (1)$$

where

$$\mathbf{U}_x = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_x]; \quad \mathbf{V}_x^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_x^* \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{V}_x^* \mathbf{A} \mathbf{U}_x| \neq 0.$$

Suppose that (1) is proved for $x = 1, 2, \dots, k$. Then we have by definition

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1} (\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1})^{-1} \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}_k.$$

Substituting \mathbf{A}_k from (1) this becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}_k (\mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \\ &\quad - \frac{\{\mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}_k (\mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A}\} \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^* \{\mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}_k (\mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A}\}}{\mathbf{v}_{k+1}^* \{\mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}_k (\mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A}\} \mathbf{u}_{k+1}}. \end{aligned}$$

Now we have to prove that the formula (1) for $x = k+1$ yields the same expression for \mathbf{A}_{k+1} . Writing \mathbf{U}_{k+1} and \mathbf{V}_{k+1}^* as partitioned matrices

$$\mathbf{U}_{k+1} = [\mathbf{U}_k, \mathbf{u}_{k+1}]; \quad \mathbf{V}_{k+1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^* \\ \mathbf{v}_{k+1}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k, & \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k, & \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix}$$

the formula (1) for $x = k+1$ takes the form

$$\mathbf{A} - [\mathbf{A} \mathbf{U}_k, \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k, & \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{U}_k, & \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^* \mathbf{A} \\ \mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \end{bmatrix}. \quad (3')$$

The inversion formula (2.2) for partitioned matrices gives

$$\begin{bmatrix} V_k^* A U_k & V_k^* A u_{k+1} \\ v_{k+1}^* A U_k & v_{k+1}^* A u_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (V_k^* A U_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -(V_k^* A U_k)^{-1} V_k^* A u_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_{k+1}^* A U_k (V_k^* A U_k)^{-1} & 1 \end{bmatrix}}{v_{k+1}^* A u_{k+1} - v_{k+1}^* A U_k (V_k^* A U_k)^{-1} V_k^* A u_{k+1}}$$

and substituting this in (3) we see that both expressions for A_{k+1} coincide. Thus we have proved the validity of (1) by induction.

If the rank of A is r then A_r vanishes and we have the following representation of A

$$A = [A u_1, \dots, A u_r] [v_i^* A u_j]^{-1} \begin{bmatrix} v_1^* A \\ \vdots \\ v_r^* A \end{bmatrix}. \quad (4)$$

3. The Triangular Factorisation of Gauss-Banachiewicz and its Generalization

It is known [1] that any matrix can be decomposed into the product of two triangular matrices provided that the upperleft principal minors are non-singular. In order to obtain the triangular factorisation of an $n \times m$ matrix of rank r by means of rank-diminishing operations one can proceed as follows.

Choose in the general formula

$$u_i = e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{(n)}; \quad v_i^* = f_i^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{(m)}; \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

Then $A e_1$ is the first column, $f_1^* A$ is the first row of A and $f_1^* A e_1 = a_{11} \neq 0$ by assumption. Applying (1.2) with these vectors, obviously we get a matrix of rank $r - 1$

$$A_1 = A - \frac{A e_1 f_1^* A}{f_1^* A e_1},$$

the first column and first row of which vanish.

The first non-vanishing column of A_1 is $A_1 e_2$, its first non-vanishing row is $f_2^* A_1$ and the scalar $f_2^* A_1 e_2 = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})/a_{11} \neq 0$ by assumption. Hence we can form the matrix of rank $r-2$

$$A_2 = A_1 - \frac{A_1 e_2 f_2^* A_1}{f_2^* A_1 e_2},$$

which has two 0-columns and two 0-rows.

Continuing in this way we find $A_r = 0$ and the result can be written as follows:

$$A = [A e_1, A_1 e_2, \dots, A_{r-1} e_r, f_1^* A e_1, \dots, f_r^* A_{r-1} e_r] \begin{bmatrix} f_1^* A \\ f_2^* A_1 \\ \vdots \\ f_r^* A_{r-1} \end{bmatrix}.$$

The triangular form of the factors is implied by the 0-columns and 0-rows of the matrices A_k .

This particular method of factorisation fails if any of the left-upper principal minors of A is singular. A more general treatment [2] is possible in which the unit vectors e_i, f_i^* are taken in any order. In this case the final factor matrices will, in general, not be triangular, but will be triangular matrices with their rows and columns in some way interchanged.

4. The Recursive Method for the Inversion of a Matrix and its Application to the Solution of Boundary Value Problems

The rank-diminishing operation used in the preceding section furnishes a particularly simple result when applied to the inverse of a non-singular matrix. We write the given non-singular n -th order matrix in the partitioned form

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a_n \\ a^n & a_{nn} \end{bmatrix}$$

and suppose $|A_{n-1}| \neq 0$. Then we shall prove that

$$A_n^{-1} = \frac{A_n^{-1} e_n e_n^* A_n^{-1}}{e_n^* A_n^{-1} e_n} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Indeed, the elements of the left upper block are proportional to the second order determinants formed with the elements of A_n^{-1} , hence in virtue of a theorem of JACOBI they turn out to be equal to the corresponding elements of A_{n-1}^{-1} .

The relation (1), in its original form, can be used to compute the inverse of a minor matrix, when the inverse of the original matrix is known. Hence it can be applied e.g. to the solution of a difference equation with modified boundary conditions if the original boundary value problem is solved [8].

On the other hand, the relation (1) can be written in such a form, in which it is used in the escalator method for the inversion of a matrix. Indeed we have

$$A_n \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} & a_n \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a_n \\ a^n & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} & a_n \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_{nn} - a^n A_{n-1}^{-1} a_n),$$

hence

$$A_n^{-1} e_n = \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} & a_n \\ & 1 \end{bmatrix} (a_{nn} - a^n A_{n-1}^{-1} a_n)^{-1}.$$

Similarly

$$e_n^* A_n^{-1} = [-a^n A_{n-1}^{-1}, 1] (a_{nn} - a^n A_{n-1}^{-1} a_n)^{-1}.$$

Finally

$$e_n^* A_n^{-1} e_n = (a_{nn} - a^n A_{n-1}^{-1} a_n)^{-1}.$$

Substituting these expressions in (1) we obtain

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a_n \\ a^n & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} & a_n \\ & 1 \end{bmatrix} [-a^n A_{n-1}^{-1}; 1]}{a_{nn} - a^n A_{n-1}^{-1} a_n} \quad (2)$$

and this coincides with the well-known formula of the escalator method [3]. Thus it turns out that the escalator method furnishes the triangular factorisation of the inverse.

5. The Method of Conjugate Directions. The Generalized Inverse. The Inversion Formula of Stiefel-Hestenes

The dyadic decomposition (1.3) assumes a particularly simple form if one uses two sets of vectors u_1, \dots, u_r and v_1^*, \dots, v_r^* which are conjugate with respect to A , i.e.

$$v_i^* A u_j = 0 \quad \text{for } i \neq j; \quad v_i^* A u_i = 0. \quad (1)$$

In this case the matrix $[v_i^* A u_j]$ in (2.4) will be diagonal and the formula reduces to

$$A = \sum_{k=1}^r \frac{A u_k v_k^* A}{v_k^* A u_k}. \quad (2)$$

This decomposition can be used for the computation of a generalized inverse of an arbitrary (rectangular) matrix A of rank r . A generalized inverse

is defined as a common solution of the equations [5]

$$A X A = A \quad \text{and} \quad X A X = X. \quad (3)$$

Now it is easy to see that in consequence of equations (1) the matrix of rank r

$$X = A^{(-1)} = \sum_1^r \frac{u_k v_k^*}{v_k^* A u_k} \quad (4)$$

satisfies equations (3), thus it is a generalized inverse of A .

If A is an n -th order, non-singular matrix, then multiplication of both sides of (2) by A^{-1} from the left and from the right gives immediately

$$A^{-1} = \sum_1^n \frac{u_k v_k^*}{v_k^* A u_k}$$

and this is the basic inversion formula of STIEFEL-HESTENES [4].

6. Geometric Interpretation of the Rank-Diminishing Operation and Simultaneous Solution of two Systems of Equations

The resulting matrix $A - A u (v^* A u)^{-1} v^* A$ of a rank-diminishing operation can be factorised as follows

$$\left(E - \frac{A u v^*}{v^* A u} \right) A \quad \text{or} \quad A \left(E - \frac{u v^* A}{v^* A u} \right).$$

Evidently $E - (v^* A u)^{-1} A u v^*$ is a projector, hence the factorisation on the left admits the following geometric interpretation:

By the rank-diminishing operation (1.1) all column vectors of A are projected parallel to $A u$ on the hyperplane $v^ x = 0$.*

A similar argument shows that

by the same rank-diminishing operation (1.1) all row vectors of A are projected parallel to $v^ A$ on the hyperplane $x^* u = 0$.*

This observation gives us the tool for solving simultaneously two systems of linear homogeneous equations by a projection method (provided that some restrictive conditions are satisfied).

Consider the following two homogeneous systems

$$\begin{array}{ll} a_1^* X = 0 & X b_1 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_r^* X = 0 & X b_r = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1a); \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} (1b), \\ \\ \\ \end{array}$$

where $\mathbf{a}_1^*, \dots, \mathbf{a}_r^*$ are linearly independent n -dimensional row-vectors, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ are linearly independent n -dimensional column vectors and \mathbf{X} is the unknown n -th order matrix. If we succeed in finding a solution matrix of rank $n - r$ then the columns of \mathbf{X} furnish a complete solution of the system (1a) and the rows of \mathbf{X} supply a complete solution of the system (1b).

We can find a matrix \mathbf{X}_1 of rank $n - 1$ satisfying the first pair of the equations (1) by the following rank-diminishing operation

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1}$$

provided that $\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1 \neq 0$. We have obviously $\mathbf{a}_1^* \mathbf{X} = 0$; $\mathbf{X} \mathbf{b}_1 = 0$.

Suppose now that $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2 \neq 0$. Then the matrix

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2}$$

has the rank $n - 1$ and satisfies the first two pairs of the equations (1).

Continuing in this way and supposing that the scalars $\mathbf{a}_{k+1}^* \mathbf{X}_k \mathbf{b}_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, r - 1$) are different from zero we arrive finally at a matrix

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{X}_{r-1} - \frac{\mathbf{X}_{r-1} \mathbf{b}_r \mathbf{a}_r^* \mathbf{X}_{r-1}}{\mathbf{a}_r^* \mathbf{X}_{r-1} \mathbf{b}_r}$$

which has the rank $n - r$ and satisfies both systems (1). Thus its columns, or its rows, constitute a complete solution of the two systems.

These results will be applied in the following sections to obtain the solution matrix of *one* of the given systems in a computationally convenient form.

7. Solution of an Arbitrary Homogeneous System by a Projection Method. The Vector Method of Purcell-Motzkin

Two subspaces of the n -dimensional vector space are given: the subspace \mathfrak{A} spanned by the linearly independent column vectors of the matrix

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r] \quad (1)$$

and the subspace \mathfrak{B} , defined as the intersection of the hyperplanes

$$\mathbf{b}_1^* \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{b}_2^* \mathbf{x} = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{b}_s^* \mathbf{x} = 0 \quad (2)$$

(the \mathbf{b}_k^* 's are not necessarily linearly independent).

It is necessary to find a basis for the intersection of \mathfrak{A} and \mathfrak{B} .

Let $\mathbf{b}_{v_1}^*$ be the first vector in the sequence (2) for which $\mathbf{b}_{v_1}^* \mathbf{A} \neq 0$ and choose a non-vanishing element $\mathbf{b}_{v_1}^* \mathbf{A} \mathbf{e}_{\mu_1}$ of $\mathbf{b}_{v_1}^* \mathbf{A}$. Then by the rank-dimin-

ishing operation

$$A_1 = A - \frac{A e_{\mu_1} b_{\nu_1}^* A}{b_{\nu_1}^* A e_{\mu_1}}$$

we obtain a matrix A_1 which has the rank $r - 1$ and satisfies the equations

$$b_{\nu}^* A_1 = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_1.$$

Furthermore it satisfies $A_1 e_{\mu_1} = 0$, hence its μ_1 -th column vanishes, consequently its remaining $r - 1$ columns are linearly independent.

Let $b_{\nu_2}^*$ be the first vector in the sequence (2) for which $b_{\nu_2}^* A_1 \neq 0$ and choose a non-vanishing element $b_{\nu_2}^* A_1 e_{\mu_2}$ of $b_{\nu_2}^* A_1$. The matrix

$$A_2 = A_1 - \frac{A_1 e_{\mu_2} b_{\nu_2}^* A_1}{b_{\nu_2}^* A_1 e_{\mu_2}}$$

has the rank $r - 2$, it satisfies the equations

$$b_{\nu}^* A_2 = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_2.$$

Furthermore it satisfies the equations $A_2 e_{\mu_1} = 0$, $A_2 e_{\mu_2} = 0$, hence its μ_1 -th and μ_2 -th columns vanish, the remaining $r - 2$ columns being linearly independent.

Continuing in this way, we arrive finally at a matrix of rank $r - \sigma$ (or to the 0-matrix if the intersection of \mathfrak{A} and \mathfrak{B} is 0-dimensional)

$$A_{\sigma} = A_{\sigma-1} - \frac{A_{\sigma-1} e_{\mu_{\sigma}} b_{\nu_{\sigma}}^* A_{\sigma-1}}{b_{\nu_{\sigma}}^* A_{\sigma-1} e_{\mu_{\sigma}}}$$

which satisfies all the equations

$$b_{\nu}^* A_{\sigma} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, s.$$

The μ_1 -th, μ_2 -th, \dots , μ_{σ} -th columns of A_{σ} vanish and the remaining $r - \sigma$ columns constitute a basis for the intersection of \mathfrak{A} and \mathfrak{B} .

The method described here admits various applications. First, it supplies an algorithm for 'purifying' a given set $[a_1, \dots, a_r]$ of vectors from components lying in the directions b_1^*, \dots, b_s^* .

Furthermore if \mathfrak{A} is the whole vector space, i.e. if A is a non-singular matrix (most conveniently the unit matrix) then this algorithm furnishes an independent set of $n - \sigma$ solution vectors for the general homogeneous system (2). Moreover the algorithm eliminates automatically such equations (2) which are consequences of the preceding ones.

In the special case when

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^* \end{bmatrix}$$

is an $n \times n + 1$ matrix belonging to a regular inhomogeneous system (written in homogeneous form) and we choose A to be the $n + 1$ -th order unit matrix then our algorithm reduces to the 'vector method' of PURCELL and MOTZKIN [6].

8. The Solution of a Homogeneous System of Diophantine Equations [7]

Let now a_1, a_2, \dots represent n -dimensional vectors the components of which are integers. We shall denote by $\Delta(a)$ the greatest common divisor of the components of a .

We consider the system

$$\begin{aligned} a_1^* X &= 0 \\ &\vdots \\ a_r^* X &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where X denotes the unknown n -th order matrix the elements of which are integers, and suppose provisionally that a_1^*, \dots, a_r^* are linearly independent.

First we choose a vector b_1 , fixed once for all, such that $a_1^* b_1 = \Delta(a_1^*)$ and then compute the matrix of rank $n - 1$

$$X_1 = E - \frac{b_1 a_1^*}{a_1^* b_1}$$

all the elements of which are integers. This matrix evidently satisfies the first equation $a_1^* X_1 = 0$.

a_2^* being linearly independent of a_1^* , we have $a_2^* X_1 \neq 0$ thus we can choose a fixed vector b_2 , such that $a_2^* X_1 b_2 = \Delta(a_2^* X_1)$ and compute the matrix of rank $n - 2$

$$X_2 = X_1 - \frac{X_1 b_2 a_2^* X_1}{a_2^* X_1 b_2}$$

all the elements of which are also integers. X_2 satisfies $a_1^* X_2 = 0$ and $a_2^* X_2 = 0$.

Continuing in this way, we arrive finally at a matrix of rank $n - r$

$$X_r = X_{r-1} - \frac{X_{r-1} b_r a_r^* X_{r-1}}{a_r^* X_{r-1} b_r}; \quad a_r^* X_{r-1} b_r = \Delta(a_r^* X_{r-1})$$

which satisfies all the equations (1). Any set of $n - r$ columns, which are linearly independent, constitutes a complete set of solutions of the diophantine system (1). The general solution of (1) can be represented also in the form

$$x = X_r t,$$

where t denotes an n -dimensional vector whose components are arbitrary integers.

If the vectors $\mathbf{a}_1^*, \dots, \mathbf{a}_r^*$ are not linearly independent then some of the vectors $\mathbf{a}_k^* \mathbf{X}_l$, $k > l$ vanish. This means evidently that the corresponding equations $\mathbf{a}_k^* \mathbf{X} = 0$ are consequences of the former ones and thus they must be neglected.

REFERENCES

- [1] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Springer-Verlag, Berlin 1950), S. 248.
- [2] E. EGERVÁRY, *Über die Faktorisierung von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen*. Z. angew. Math. Mech. 35, 111 (1955).
- [3] A. FRAZER, J. DUNCAN, and R. COLLAR, *Elementary matrices* (Cambridge Univ. Press 1938), p. 112.
- [4] M. R. HESTENES and E. STIEFEL, *Method of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Res. Nat. Bur. Standards, 49, 409 (1952).
- [5] R. PENROSE, *A generalized inverse for matrices*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 51, 406 (1955).
- [6] E. PURCELL, *The vector method of solving simultaneous linear equations*, J. Math. Phys. 32, 180 (1953).
- [7] E. EGERVÁRY, *Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen*, Publ. math., Debrecen, 4, 481 (1955–56).
- [8] E. EGERVÁRY, *Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960).

Zusammenfassung

Es sind in der Literatur (siehe [1] bis [8]) verschiedene iterative Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme bekannt, die jedoch im allgemeinen nur bei den speziellen Problemen angewandt wurden, welche die einzelnen Verfasser betrachteten.

In der vorliegenden Arbeit wird eine allgemeine finite iterative Methode entwickelt, die aus der wiederholten Durchführung einer rangvermindernden Operation besteht. Diese Methode ermöglicht die einheitliche Betrachtung verschiedener Verfahren, welche bei der Lösung linearer Gleichungssysteme auftreten.

Diese iterativen Verfahren können in zwei Kategorien eingereiht werden: 1. Iteration der rangvermindernden Operation zur Gewinnung der dyadischen Zerlegung der Koeffizientenmatrix eines gegebenen Gleichungssystems; 2. Iteration der rangvermindernden Operation zur Reduktion des ganzen Vektorenraumes (der Einheitsmatrix auf den Unterraum, die Matrix niedrigeren Ranges), welcher die Lösung des gegebenen Gleichungssystems bildet.

Die erste Kategorie enthält:

1. die Zerlegung der Koeffizientenmatrix in das Produkt von zwei Dreiecksmatrizen (GAUSS-BANACHIEWICZ) und die Verallgemeinerung dieser Faktorisierung;
2. die rekursive Methode für das Invertieren einer Matrix und ihre Anwendung auf die Lösung gewisser Randwertaufgaben;
3. die Methode der konjugierten Richtungen und die Aufstellung einer allgemeinen Inversionsformel, welche die Formel von STIEFEL-HESTENES enthält.

Die Verfahren der zweiten Kategorie können als allgemeine Projektionsmethoden interpretiert werden, welche die vektorielle Methode von PURCELL-MOTZKIN und die Methode des Verfassers für die Lösung diophantischer Gleichungssysteme als Sonderfälle enthalten.

(Received: February 3, 1960.)

Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum

Par JOSEPH HERSCH, Genève¹⁾

Table des matières

§ 1.	L'évaluation par défaut de PAYNE-WEINBERGER	387
§ 2.	Méthode plus générale: comparaison à des cordes vibrantes inhomogènes	389
§ 3.	Une expression du principe de maximum	390
§ 4.	L'expression vectorielle du principe. Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires.	392
§ 5.	Un travail de M. H. PROTTER	395
§ 6.	Méthodes analogues dans le plan	395
§ 7.	Expressions du principe dans l'espace à 3 dimensions	397
§ 8.	Quelques exemples d'applications	399
§ 9.	Relations avec le principe de THOMSON	406
§ 10.	Interprétation physique	409
§ 11.	Adaptation à l'équation de SCHRÖDINGER	411
	Bibliographie	412
	Summary	413

§ 1. L'évaluation par défaut de Payne-Weinberger

Nous étudions la première valeur propre λ_1 d'une membrane vibrante couvrant un domaine G du plan et élastiquement liée le long de son contour Γ . (La fréquence fondamentale est $\sqrt{\lambda_1}$.) La fonction propre fondamentale $u(x, y)$ satisfait à $\Delta u + \lambda_1 u = 0$ et $u > 0$ dans G , $\partial u / \partial n + k(s) u = 0$ sur Γ (s est la longueur de l'arc, \mathbf{n} la normale extérieure). — Aux points de Γ où $k(s) = \infty$, nous avons la condition $u = 0$ (contour *fixé*); là où $k(s)$ s'annule, le contour est dit *libre*.

Une borne supérieure pour λ_1 peut être obtenue, à partir de toute fonction $v(x, y)$ continue et suffisamment régulière dans G , grâce au *principe de Rayleigh*

$$\lambda_1 = \text{Min}_v \frac{D(v) + \oint_{\Gamma} k(s) v^2 ds}{\iint_G v^2 dA},$$

¹⁾ Institut Battelle, Genève, et Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

où $D(v)$ désigne l'intégrale de DIRICHLET $\iint_G (v_x^2 + v_y^2) dA$ et $dA = dx dy$ l'élément d'aire. Le minimum est atteint par la première fonction propre $u(x, y)$.

L. E. PAYNE et H. F. WEINBERGER [6]²⁾ ont obtenu des évaluations par défaut pour λ_1 en comparant le problème donné à celui de cordes vibrantes homogènes. Cette idée d'utiliser des problèmes auxiliaires à une dimension est à la base du présent travail; comme on le verra au § 9, elle est intimement liée au principe de Thomson (problèmes de la capacité et de la rigidité à la torsion, cf. [8]).

Pour simplifier l'exposé, je résumerai la méthode de PAYNE-WEINBERGER dans le cas d'une membrane fixée: $k \equiv \infty$, c'est-à-dire $u = 0$ sur Γ . — Sur tout segment horizontal γ_{y_0} : $y = y_0$, $a < x < b$ dans G , de longueur $\delta_{y_0} = b - a$ et à extrémités sur Γ , ils considèrent le problème de la corde vibrante: $f''(x) + v f(x) = 0$, $f(a) = f(b) = 0$; $v_1 = \pi^2/\delta_{y_0}^2$ étant la première valeur propre de ce problème auxiliaire, on a le principe de minimum

$$v_1 = \frac{\pi^2}{\delta_{y_0}^2} = \text{Min}_{v(v)} \frac{\int_a^b v'^2 dx}{\int_a^b v^2 dx} \quad \text{avec} \quad v(a) = v(b) = 0;$$

nous avons donc en particulier, en posant $v(x) = u(x, y_0)$, l'inégalité

$$\int_a^b u_x^2(x, y_0) dx \geq \left(\frac{\pi^2}{\delta_{y_0}^2} \right) \int_a^b u^2(x, y_0) dx.$$

Une inégalité analogue est valable pour les segments verticaux dans G , à extrémités sur Γ . — En sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$\lambda_1 \iint_G u^2 dA = D(u) \geq \pi^2 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \iint_G u^2 dA,$$

où L_x est la borne supérieure des longueurs des segments horizontaux dans G , L_y celle des segments verticaux; d'où

$$\lambda_1 \geq \pi^2 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right). \quad (11)$$

PAYNE et WEINBERGER traitent, d'une façon analogue, la membrane élastiquement liée.

²⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 412.

§ 2. Méthode plus générale: comparaison à des cordes vibrantes inhomogènes

Le raisonnement ci-dessus peut être modifié en considérant, sur γ_{y_0} , un problème auxiliaire

$$f''(x) + v \alpha(x, y_0) f(x) = 0, \quad f(a) = f(b) = 0,$$

$\alpha(x, y)$ étant une fonction choisie de x et y ; le principe de minimum pour la première valeur propre $\nu_1(y_0)$ est

$$\nu_1(y_0) = \text{Min}_{v(x)} \frac{\int_a^b v'^2(x) dx}{\int_a^b \alpha(x, y_0) v^2(x) dx} \quad \text{avec} \quad v(a) = v(b) = 0; \quad (2)$$

d'où

$$\int_a^b u_x^2(x, y_0) dx \geq \nu_1(y_0) \int_a^b \alpha(x, y_0) u^2(x, y_0) dx.$$

De même, choisissons une fonction $\beta(x, y)$ et considérons, sur un segment vertical γ_{x_0} : $x = x_0$, $a < y < b$, à extrémités sur Γ , le problème auxiliaire $g''(y) + \sigma \beta(x_0, y) g(y) = 0$, $g(a) = g(b) = 0$; le principe de minimum pour $\sigma_1(x_0)$ est

$$\sigma_1(x_0) = \text{Min}_{\sigma(y)} \frac{\int_a^b \sigma'^2(y) dy}{\int_a^b \beta(x_0, y) \sigma^2(y) dy};$$

d'où

$$\int_a^b u_y^2(x_0, y) dy \geq \sigma_1(x_0) \int_a^b \beta(x_0, y) u^2(x_0, y) dy.$$

En sommant toutes ces inégalités, nous obtenons

$$\lambda_1 \iint_G u^2 dA = D(u) \geq \iint_G [\nu_1(y) \alpha(x, y) + \sigma_1(x) \beta(x, y)] u^2 dA,$$

d'où

$$\iint_G [\lambda_1 - \nu_1(y) \alpha(x, y) - \sigma_1(x) \beta(x, y)] u^2 dA \geq 0;$$

par conséquent, nous avons la borne inférieure

$$\lambda_1 \geq \inf_{(x,y) \in G} [\nu_1(y) \alpha(x, y) + \sigma_1(x) \beta(x, y)] . \quad (3)$$

Remarque. Si une horizontale $y = y_0$ a, dans G , plusieurs segments distincts $\gamma_{y_0 1}$ et $\gamma_{y_0 2}$, le lecteur rectifiera de façon évidente la simplification excessive de notre notation $\nu_1(y)$: on aura une valeur de $\nu_1(y_0)$ sur $\gamma_{y_0 1}$, une autre sur $\gamma_{y_0 2}$.

En spécialisant $\alpha(x, y) \equiv \beta(x, y) \equiv 1$, on obtient une évaluation légèrement meilleure que (1):

$$\lambda_1 \geq \pi^2 \inf_{(x,y) \in G} \left(\frac{1}{\delta_y^2} + \frac{1}{\delta_x^2} \right) \geq \pi^2 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) . \quad (1')$$

§ 3. Une expression du principe de maximum

L'inégalité (3) est d'un usage malaisé: α et β étant choisis, on ne peut pas en général déterminer exactement les valeurs propres ν_1 et σ_1 des problèmes auxiliaires à une dimension.

3.1. Retournons donc les problèmes auxiliaires unidimensionnels!

Choisissons, pour chaque y_0 , une fonction continue et deux fois dérivable $f(x) = f(x, y_0) > 0$; puis déterminons $\alpha(x, y_0)$ telle que $f(x, y_0)$ soit l'extrémale du problème de variation (2): nous devons donc prendre

$$\nu_1(y_0) \alpha(x, y_0) = - \frac{f_{xx}(x, y_0)}{f(x, y_0)} ;$$

il est bien entendu que la fonction auxiliaire $f(x, y)$ n'est pas nécessairement continue en y . Choisissons de même une fonction $g(x, y) > 0$ continue en y (mais non pas nécessairement en x !) et deux fois partiellement dérivable par rapport à y ; et prenons $\sigma_1(x) \beta(x, y) = - g_{yy}/g$; nous avons alors, au lieu de (3) l'inégalité

$$\lambda_1 \geq \inf_G \left(- \frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right) . \quad (4)$$

3.2. Démonstration générale pour une membrane élastiquement liée

Choisissons [3] dans G deux fonctions positives: $f(x, y)$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à x , $g(x, y)$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à y , satisfaisant sur Γ à la condition

$$- \frac{f_x}{f} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{g_y}{g} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \leq k(s) , \quad (5)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure, et le coefficient $k(s)$ a été défini au § 1.

On a alors la borne inférieure (4).

Liberté essentielle (en vue des applications): f peut être discontinue en y , et g peut être discontinue en x .

Démonstration. Comme $f \neq 0$ dans G , on a

$$u_x^2 + \frac{f_{xx}}{f} u^2 = \left(\frac{f_x}{f} u^2 \right)_x + u_x^2 + \frac{f_x^2}{f^2} u^2 - 2 \frac{f_x}{f} u u_x = \left(\frac{f_x}{f} u^2 \right)_x + \left(u_x - \frac{f_x}{f} u \right)^2; \quad (6)$$

et de même

$$u_y^2 + \frac{g_{yy}}{g} u^2 = \left(\frac{g_y}{g} u^2 \right)_y + \left(u_y - \frac{g_y}{g} u \right)^2;$$

d'où, en intégrant,

$$D(u) + \iint_G \left(\frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} \right) u^2 dA = \oint_{\dot{G}} \left(\frac{f_x}{f} u^2 \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{g_y}{g} u^2 \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds + \iint_G \left\{ \left(u_x - \frac{f_x}{f} u \right)^2 + \left(u_y - \frac{g_y}{g} u \right)^2 \right\} dA;$$

en tenant compte des égalités

$$D(u) + \oint_{\dot{G}} k(s) u^2 ds = \lambda_1 \iint_G u^2 dA, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial n},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\lambda_1 + \frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} \right) u^2 dA &= D(u) + \oint_{\dot{G}} k(s) u^2 ds + \iint_G \left(\frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} \right) u^2 dA \\ &\geq D(u) + \oint_{\dot{G}} \left(-\frac{f_x}{f} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{g_y}{g} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \right) u^2 ds + \iint_G \left(\frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} \right) u^2 dA \geq 0, \end{aligned}$$

d'où (4).

Si l'on a choisi $f(x, y) = \Phi(y) u(x, y)$ et $g(x, y) = \Psi(x) u(x, y)$ (les fonctions Φ et Ψ étant $\neq 0$ quelconques, continues ou non), le membre de droite dans (4) devient $- \Delta u / u - \lambda_1$, on a donc l'égalité; nous avons donc le *principe de maximum*

$$\lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\text{choix de } f \text{ et } g \\ \text{satisfaisant (5)}}} \inf_{(x,y) \in G} \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right). \quad (7)$$

3. 3. Remarques

3.3.1. La borne inférieure fournie par (4) sera particulièrement bonne si l'on choisit f et g en sorte que $(-f_{xx}/f - g_{yy}/g)$ soit constant (ou presque constant) dans G .

3.3.2. Contrairement à ce qui se passe pour le principe de RAYLEIGH, la condition (5) est d'autant plus restrictive que le contour de la membrane est plus libre. Il devait bien en être ainsi: le *Maximum* diminue. Si le contour est fixé ($u = 0$ sur Γ), on a $k = \infty$ et la condition disparaît; on choisira alors avec avantage, sur Γ , $f = g = 0$.

3.3.3. Si l'on choisit $f(x, y) = g(x, y) > 0$ (donc fonction continue de x et de y), la condition (5) devient $\partial f / \partial n + k(s) f \geq 0$ et l'inégalité (4) donne $\lambda_1 \geq \inf_G (-\Delta f / f)$; c'est essentiellement l'une des bornes de BARTA-PÓLYA pour λ_1 :

Si $f > 0$ dans G et $\partial f / \partial n + k(s) f = 0$ sur Γ , on a

$$\inf_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right) \leq \lambda_1 \leq \sup_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right).$$

Démonstration directe:

$$\begin{aligned} \iint u (\Delta f + \lambda_1 f) dA &= \iint (u \Delta f - f \Delta u) dA = \oint \left(u \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \oint k(s) (-u f + f u) ds = 0, \end{aligned}$$

d'où les deux inégalités ci-dessus. Ainsi, toute fonction régulière f , positive dans G et s'annulant sur Γ , fournit des bornes inférieure et supérieure pour la première valeur propre de la membrane à contour fixé ($u = 0$ sur Γ). — Ce dernier théorème est cependant d'une application pratique malaisée.

3.3.4. Les fonctions $v_1 \alpha(x, y) = -f_{xx}/f$ et $\sigma_1 \beta(x, y) = -g_{yy}/g$ peuvent parfaitement être par endroits négatives. Les cordes vibrantes auxiliaires que nous considérons (cf. § 2) peuvent donc avoir par endroits une masse spécifique *négative*!

§ 4. L'expression vectorielle du principe. — Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

4.1. Passage de l'expression précédente à la forme vectorielle

A partir des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ choisies au § 3.2, définissons le champ vectoriel

$$\mathbf{p} = \left\{ -\frac{f_x}{f}; \quad -\frac{g_y}{g} \right\};$$

il satisfait à la *condition* sur le contour

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \leq k(s), \quad (5')$$

où de nouveau \mathbf{n} est le vecteur unitaire indiquant la normale extérieure. —

On calcule sans peine $\operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2 = -f_{xx}/f - g_{yy}/g$, donc

$$\lambda_1 \geq \inf_G (\operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2). \quad (4')$$

Liberté importante pour les applications: le champ \mathbf{p} n'est pas nécessairement continu; sa première composante p_1 doit être continue en x et dérivable par rapport à x ; la seconde p_2 doit être continue en y et dérivable par rapport à y .

La condition $f > 0, g > 0$ dans G se traduit ici par $|\mathbf{p}| < \infty$.

Ce passage à la forme vectorielle correspond au passage classique d'une équation de STURM-LIOUVILLE à une équation de RICCATI.

4.2. Démonstration directe

$$\begin{aligned} 0 \leq (\operatorname{grad} u + u \mathbf{p})^2 &= \operatorname{grad}^2 u + \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} (u^2) + u^2 \mathbf{p}^2 \\ &= \operatorname{grad}^2 u + \operatorname{div} (u^2 \mathbf{p}) + u^2 (-\operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{p}^2), \end{aligned}$$

avec égalité à gauche si et seulement si $\mathbf{p} = -\operatorname{grad} u/u$; d'où par intégration

$$\begin{aligned} 0 \leq D(u) + \oint u^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \, ds + \iint (-\operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{p}^2) u^2 \, dA \\ < D(u) - \int k(s) u^2 \, ds + \iint (-\operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{p}^2) u^2 \, dA = \iint (\lambda_1 - \operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{p}^2) u^2 \, dA; \end{aligned}$$

d'où (4').

Si l'on a choisi $\mathbf{p} = -\operatorname{grad} u/u$, la condition (5') est satisfaite et le membre de droite dans (4') devient $-Du/u = \lambda_1$, on a donc l'égalité; d'où le principe de maximum

$$\lambda_1 = \operatorname{Max}_{\substack{\text{choix de } \mathbf{p} \\ \text{satisfaisant (5')}}} \inf_{(x,y) \in G} (\operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2). \quad (7')$$

4.3. Remarques

4.3.1. Pour obtenir une bonne borne inférieure (4'), on construira de préférence un champ \mathbf{p} réalisant $\operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2 = \text{const}$ dans G , et $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = k(s)$ sur Γ (il en est ainsi pour le champ extrémal $-\operatorname{grad} u/u$); si $k = \infty$ (membrane à contour fixé), la condition (5') tombe; mais on fera un usage judicieux de sa liberté en choisissant \mathbf{p} singulier sur Γ .

4.3.2. Les discontinuités admises pour le champ vectoriel \mathbf{p} sont les mêmes qu'admet le principe de Thomson (électrostatique, rigidité à la torsion, etc.). Pour les applications, la règle suivante suffira: lors du passage à travers une courbe analytique (dans G), la composante normale de \mathbf{p} doit être continue; la composante tangentielle peut être discontinue.

4.3.3. L'expression vectorielle du principe n'est pas restreinte aux coordonnées cartésiennes. En outre, elle permet d'abrégier légèrement les calculs. En revanche, l'énoncé donné au § 3 est plus intuitif et proche d'une interprétation physique (cf. § 10); il laisse aussi mieux apparaître les relations qui existent avec la méthode de PAYNE-WEINBERGER [6] et les inégalités de BARTA-PÓLYA (§ 3.3.3).

4.4. Coordonnées cartésiennes

$\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$, $p_1(x, y)$ continue en x et dérivable en x , $p_2(x, y)$ continue en y et dérivable en y ; satisfaisant à la condition $p_1 \partial x / \partial n + p_2 \partial y / \partial n \leq k(s)$. — Posons

$$\begin{aligned} \chi_1(x, y) &= \frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1^2 \\ \chi_2(x, y) &= \frac{\partial p_2}{\partial y} - p_2^2 \end{aligned}; \text{ alors } \lambda_1 \geq \inf_{(x, y) \in G} [\chi_1(x, y) + \chi_2(x, y)]. \quad (8)$$

Si l'on choisit $\chi_1(x, y_0)$ et $\chi_2(x_0, y)$, ce sont là des équations du type de RICCATI pour $p_1(x, y_0)$ et $p_2(x_0, y)$. Nous avons ici rejoint l'énoncé de M. H. PROTTER [9], mais avec des conditions de continuité plus générales (cf. § 5 ci-dessous). Là où $\partial u / \partial x = 0$, on choisira avec avantage $p_1 = 0$; là où $\partial u / \partial y = 0$, on choisira $p_2 = 0$.

Champs particuliers (en vue des applications):

$$\begin{aligned} \text{Si } p_1(x, y_0) &= c, & \text{alors } \chi_1(x, y_0) &= -c^2; \\ \text{si } p_1(x, y_0) &= k \operatorname{tg}(k x), & \text{alors } \chi_1(x, y_0) &= k^2; \\ \text{si } p_1(x, y_0) &= -k \operatorname{ctg}(k x), & \text{alors } \chi_1(x, y_0) &= k^2; \\ \text{si } p_1(x, y_0) &= -\kappa \operatorname{tgh}(\kappa x), & \text{alors } \chi_1(x, y_0) &= -\kappa^2; \\ \text{si } p_1(x, y_0) &= -\kappa \operatorname{ctgh}(\kappa x), & \text{alors } \chi_1(x, y_0) &= -\kappa^2; \end{aligned}$$

cas intermédiaire $k = \kappa = 0$:

$$\text{si } p_1(x, y_0) = -\frac{1}{x}, \quad \text{alors } \chi_1(x, y_0) = 0.$$

4.5. Coordonnées polaires

$\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$, ici p_1 = composante radiale, p_2 = composante azimutale.

$p_1(r, \theta)$ continue en r et dérivable par rapport à r ;

$p_2(r, \theta)$ continue en θ et dérivable par rapport à θ ;

satisfaisant à la condition $p_1 \partial r / \partial n + r p_2 \partial \theta / \partial n \leq k(s)$; définissons

$$\begin{aligned} \chi_1(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r p_1) - p_1^2 \\ \chi_2(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \theta} - p_2^2 \end{aligned}; \text{ alors } \lambda_1 \geq \inf_{(r, \theta) \in G} [\chi_1(r, \theta) + \chi_2(r, \theta)]; \quad (8')$$

on a l'égalité si et seulement si $p_1 = -u_r/u$ et $p_2 = -1/r u_\theta/u$.

Champs particuliers

Si, $Z_q(r)$ étant une fonction cylindrique d'ordre q ,

$$p_1(r, \theta_0) = -\frac{1}{Z_q(kr)} \cdot \frac{d}{dr} Z_q(kr), \quad \text{alors} \quad \chi_1(r, \theta_0) = k^2 - \frac{q^2}{r^2};$$

$$\text{si } p_2(r_0, \theta) = \frac{q}{r_0} \cdot \operatorname{tg}(q\theta), \quad \text{alors} \quad \chi_2(r_0, \theta) = \frac{q^2}{r_0^2};$$

$$\text{si } p_2(r_0, \theta) = -\frac{q}{r_0} \cdot \operatorname{ctg}(q\theta), \quad \text{alors} \quad \chi_2(r_0, \theta) = \frac{q^2}{r_0^2}.$$

§ 5. Un travail de M. H. Protter

Dans un « Technical Report » [9], non encore publié et dont j'ai eu connaissance récemment, M. H. PROTTER a énoncé et démontré en 1958 le théorème suivant pour la membrane fixée :

« Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continûment différentiables dans le domaine G . Alors, tout nombre λ tel que $P_x + Q_y - \lambda > P^2 + Q^2$ dans tout G , est une borne inférieure pour λ_1 : $\lambda_1 \leq \lambda$. » M. H. PROTTER indique aussi la généralisation à une membrane élastiquement liée.

En d'autres termes, $\lambda_1 \geq \inf_G (P_x + Q_y - P^2 - Q^2)$, ce qui n'est autre que la formulation de notre principe de maximum donnée au § 4.4 (poser $p_1 = P$, $p_2 = Q$); à cela près, cependant: comme nous l'avons vu, les conditions de continuité (et de dérivabilité) imposées par PROTTER à $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont plus strictes qu'il n'est nécessaire: cela restreint les applications du principe, et c'est pourquoi les exemples qu'il indique (cf. aussi § 5) ne sont pas très concluants (la meilleure méthode connue à comparer, pour le cas du losange, à celle qui nous intéresse, est certainement la convexité de PÓLYA-SCHIFFER [7]). Il n'en reste pas moins qu'à M. H. PROTTER revient le mérite d'avoir découvert, le premier, une inégalité du type que nous étudions ici; il y est parvenu bien que, de toute évidence, il n'ait pas eu connaissance du travail, légèrement antérieur, de L. E. PAYNE et H. F. WEINBERGER [6]. Celui-ci ouvrait la voie et c'est vraiment, comme le montrent les §§ 1, 2, 3 et 4, le point de départ du présent mémoire.

§ 6. Méthodes analogues dans le plan

Au lieu de choisir deux directions privilégiées (orthogonales) \mathbf{x} et \mathbf{y} , comme nous l'avons fait aux §§ 2 et 3, on peut également en choisir davantage.

6.1. Par exemple, considérons trois directions privilégiées ξ, η, ζ formant deux à deux des angles de 120° . Je désigne de nouveau par $u(x, y)$ la fonction propre fondamentale de la membrane G élastiquement liée le long de son contour Γ : $\Delta u + \lambda_1 u = 0$ et $u > 0$ dans G , $\partial u / \partial n + k(s) u = 0$ sur Γ .

Notation: Pour toute fonction f dans le plan, le symbole f_{ξ} désignera la dérivée partielle de f dans la direction ξ . On vérifie facilement que $u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2 + u_{\zeta}^2 = 3/2 \text{ grad}^2 u$.

Considérons dans G trois fonctions *positives*:

f = fonction continue en ξ et deux fois dérivable par rapport à ξ le long de toute parallèle à ξ ; g = fonction continue en η , etc.; h = fonction continue en ζ , etc.; satisfaisant en outre à la *condition*

$$-\frac{f_{\xi}}{f} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{g_{\eta}}{g} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial n} - \frac{h_{\zeta}}{h} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial n} \leq \frac{3}{2} k(s). \quad (5'')$$

En chaque point de G , nous avons trois relations du type (6), cf. § 3.2; en les sommant et intégrant, on obtient

$$\iint_G \left(\frac{3}{2} \lambda_1 + \frac{f_{\xi\xi}}{f} + \frac{g_{\eta\eta}}{g} + \frac{h_{\zeta\zeta}}{h} \right) u^2 dA \geq 0;$$

donc, sous la condition (5''),

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{3} \inf_G \left(-\frac{f_{\xi\xi}}{f} - \frac{g_{\eta\eta}}{g} - \frac{h_{\zeta\zeta}}{h} \right). \quad (4'')$$

Si $f = g = h$, on retrouve de nouveau l'inégalité de BARTA-PÓLYA

$$\lambda \geq \inf_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right).$$

On a l'égalité en particulier si $f = g = h = u$.

6.2. Cas limite: toutes les directions sont «privilegiées», à poids égaux. Pour simplifier, restreignons-nous aux membranes liées: $k = \infty$, $u = 0$ sur Γ .

Spécifions une direction $\xi^{(\theta)}$ par l'angle θ ($0 \leq \theta < \pi$); pour chaque valeur de θ , nous choisissons une fonction $f^{(\theta)}$, qui doit être, sur chaque segment de direction θ , continue et deux fois dérivable. Alors

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{\pi} \inf_G \int_0^\pi \left(-\frac{1}{f^{(\theta)}} \cdot \frac{\partial^2 f^{(\theta)}}{\partial \xi^{(\theta)2}} \right) d\theta. \quad (4''')$$

La démonstration est analogue à la précédente et tient compte de l'égalité

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^{(\theta)}} \right)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ grad}^2 u.$$

En particulier: Appelons $L(P, \theta)$ la longueur (finie ou infinie) du segment rectiligne dans G , passant par un point $P \in G$ et de direction θ . Si ce segment

est fini, on peut y choisir $f^{(\theta)} = \text{arc de sinus} \theta$, en sorte que

$$-\frac{f_{\xi(\theta)}^{(\theta)}}{f^{(\theta)}} = \frac{\pi^2}{L^2(P, \theta)};$$

d'où

$$\lambda_1 \geq 2\pi \inf_{P \in G} \int_0^\pi \frac{d\theta}{L^2(P, \theta)}. \quad (9)$$

De façon encore plus grossière: soit $L(\theta)$ la borne supérieure des longueurs des segments dans G et de direction θ ; alors

$$\lambda_1 \geq 2\pi \int_0^\pi \frac{d\theta}{L^2(\theta)}. \quad (9')$$

Si G est une bande infinie de largeur a , $L(\theta) = a/\sin \theta$, d'où

$$\lambda_1 = 2\pi \frac{\pi}{2a^2} = \frac{\pi^2}{a^2},$$

ce qui est la valeur exacte.

§ 7. Expressions du principe pour l'espace à trois dimensions

Nous considérons le problème classique caractérisé par les équations $\Delta u + \lambda_1 u = 0$ et $u > 0$ dans G , $\partial u / \partial n + k(Q) u = 0$ sur Γ , où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et $k(Q)$ est une fonction donnée sur la frontière Γ de G . \mathbf{n} est de nouveau la normale extérieure.

7.1. Transposons notre principe de maximum tel qu'il est énoncé au § 3.2. Choisissons dans G trois fonctions *positives*

$f(x, y, z)$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à x ,
 $g(x, y, z)$ continue en y et deux fois dérivable par rapport à y ,
 $h(x, y, z)$ continue en z et deux fois dérivable par rapport à z ,

satisfaisant en outre, sur Γ , à la condition

$$-\frac{f_x}{f} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{g_y}{g} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{h_z}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial n} \leq k(Q). \quad (5^{\text{IV}})$$

On a alors la borne inférieure

$$\lambda_1 \geq \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} - \frac{h_{zz}}{h} \right). \quad (4^{\text{IV}})$$

La démonstration utilise l'égalité $D(u) + \oint_F k(Q) u^2 dS = \lambda_1 \iiint_G u^2 dV$, où dS désigne l'élément de surface, dV l'élément de volume et $D(u)$ l'intégrale de DIRICHLET $\iiint_G \text{grad}^2 u dV$. Comme au § 3.2, on obtient en intégrant la relation (6) et en lui ajoutant les deux relations analogues en g et y , h et z :

$$\iiint_G \left(\lambda_1 + \frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} + \frac{h_{zz}}{h} \right) u^2 dV \geq 0,$$

d'où (4^{IV}).

On a l'égalité si $f(x, y, z) = \Phi(y, z) u(x, y, z)$, $g(x, y, z) = \Psi(z, x) u(x, y, z)$ et $h(x, y, z) = \Omega(x, y) u(x, y, z)$.

7.2. Au lieu de comparer notre problème à trois dimensions à celui de cordes vibrantes (inhomogènes), orientées dans 3 directions, nous pouvons également le comparer à celui de *cordes vibrantes* (inhomogènes) *orientées dans une direction et de membranes vibrantes* (inhomogènes aussi) *situées dans les plans perpendiculaires à cette direction*. On rejoint alors la spécialisation suivante du § 7.1:

Prenons z comme direction privilégiée; posons alors, dans le § 7.1 ci-dessus, $f(x, y, z) = g(x, y, z)$; nous avons à présent deux fonctions *positives*:

$f(x, y, z)$ continue en x et y et deux fois dérivable par rapport à x et y , $h(x, y, z)$ continue en z et deux fois dérivable par rapport à z , satisfaisant, \mathbf{n}_{xy} étant, dans un plan horizontal, la normale extérieure à la section plane de Γ , la condition

$$-\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \cdot \frac{\partial n_{xy}}{\partial n} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial n} \leq k(Q); \quad (5^V)$$

sous cette condition,

$$\lambda_1 \geq \inf_G \left(-\frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} - \frac{h_{zz}}{h} \right). \quad (4^V)$$

On a l'égalité si $f(x, y, z) = \Phi(z) u(x, y, z)$ et $h(x, y, z) = \Omega(x, y) u(x, y, z)$.

7.3. Il y a évidemment encore d'autres possibilités pour construire des problèmes auxiliaires à une et à deux dimensions (par exemple de façon analogue au § 6). Nous allons encore considérer la comparaison du problème donné à celui de *membranes vibrantes inhomogènes et respectivement parallèles aux trois plans* (x, y) , (y, z) , (z, x) .

Considérons trois fonctions *positives* dans G :

$f(x, y, z)$ continue en x et y et 2 fois dérivable par rapport à x et y ,
 $g(x, y, z)$ continue en y et z et 2 fois dérivable par rapport à y et z ,
 $h(x, y, z)$ continue en z et x et 2 fois dérivable par rapport à z et x ,

satisfaisant sur Γ à la condition

$$-\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \cdot \frac{\partial n_{xy}}{\partial n} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial n_{yz}} \cdot \frac{\partial n_{yz}}{\partial n} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial n_{zx}} \cdot \frac{\partial n_{zx}}{\partial n} \leq 2k(Q); \quad (5^{VII})$$

alors

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2} \inf_G \left(-\frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} - \frac{g_{yy} + g_{zz}}{g} - \frac{h_{zz} + h_{xx}}{h} \right). \quad (4^{VI})$$

Démonstration. En vertu de (6),

$$u_x^2 + u_y^2 + \frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} u^2 \geq \operatorname{div}_{xy} \left\{ \frac{f_x}{f} u^2; \frac{f_y}{f} u^2 \right\} = \operatorname{div}_{xy} \left(\frac{u^2}{f} \operatorname{grad}_{xy} f \right)$$

et deux expressions analogues pour g et h ; d'où en intégrant

$$\iiint_G \left(2\lambda_1 + \frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} + \frac{g_{yy} + g_{zz}}{g} + \frac{h_{zz} + h_{xx}}{h} \right) u^2 dV \geq 0,$$

d'où (4^{VI}).

On a l'égalité si

$$f(x, y, z) = \Psi_3(z) u(x, y, z), \quad g(x, y, z) = \Psi_1(x) u(x, y, z)$$

et

$$h(x, y, z) = \Psi_2(y) u(x, y, z).$$

7.4. Expression vectorielle. Les formules (5') et (4') du § 4 restent valables pour trois dimensions; ici, $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$, p_1 est continue en x et dérivable par rapport à x , p_2 est continue en y , etc. *Mutatis mutandis*, la démonstration du § 4.2 reste valable, ainsi que les remarques du § 4.3.

§ 8. Quelques exemples d'applications

8.1. Théorème. Soient G un domaine convexe du plan et ϱ le rayon du plus grand cercle inscrit dans G . Alors

$$\frac{\pi^2}{4} \leq \varrho^2 \lambda_1(G) \leq j_0^2,$$

où $j_0 = 2,4048$ est le premier zéro de la fonction de BESSEL d'ordre zéro, et λ_1 se rapporte à la membrane à contour fixé. Ces bornes ne peuvent pas être améliorées: On a l'égalité, à gauche, si G est une bande infinie; à droite, si G est un cercle.

Démonstration. L'inégalité de droite est une conséquence immédiate du fait que λ_1 est une fonctionnelle de domaine monotone. Pour démontrer l'inégalité de gauche, cherchons où sont les points de contact de la circonférence C_p du plus grand cercle inscrit avec le contour Γ de G .

Tout arc connexe α d'angle $> \pi$ sur la circonférence C_ρ , contient au moins un point de Γ . En effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait translater le cercle d'une longueur finie à l'intérieur de G , puis on pourrait augmenter le rayon ρ d'une longueur finie également, sans que le cercle quitte G ; cela contredit la définition de ρ .

Soit β l'angle du plus grand arc de C_ρ sans point commun avec Γ ; nous venons de voir que $\beta \leq \pi$. Si $\beta = \pi$, G (étant convexe) est inclus dans une bande infinie de largeur 2ρ ; donc (monotonie!) $\lambda_1(G) \geq (\pi/2\rho)^2$. Si au contraire $\beta < \pi$, G est inclus dans un triangle T circonscrit au cercle C_ρ ; $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(T)$ (monotonie); il reste seulement à montrer que $\lambda_1(T) \geq (\pi/2\rho)^2$.

Pour cela, traçons les trois segments rectilignes (bissectrices) joignant le centre de C_ρ aux trois sommets de T ; on a découpé ainsi $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$; désignons par t_1, t_2, t_3 les côtés correspondants de T . Appelons ξ_i la première valeur propre d'une membrane sur T_i , fixée le long de t_i et libre le long des deux «coupures» qui bordent T_i ; $\lambda_1(T) \geq \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: car le plus petit ξ_i n'est autre que la première valeur propre de la membrane T découpée le long des trois segments intérieurs. (Cf. la «méthode de découpage» [2], [4]). Nous allons évaluer ξ_i à l'aide du principe du § 3: prenons-y t_i comme axe des x ; choisissons dans T_i : $f(x, y) \equiv 1$; $g(x, y) = \sin(\pi y/2\rho)$; la condition (5) est satisfaite (sur t_i , on a $k = \infty$; sur les deux coupures, $k = 0$ et $g > 0$, $g_y > 0$, $\partial y/\partial n > 0$); d'où en vertu de (4), $\xi_i \geq (\pi/2\rho)^2$; donc

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(T) \geq \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \geq \frac{\pi^2}{4\rho^2},$$

ce qui achève la démonstration.

8.2. *Fréquence fondamentale d'une membrane en L (fig. 1), fixée le long de son contour.*

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = a + b.$$

8.2.1. Pour calculer des bornes inférieures pour λ_1 , nous appliquerons le principe de maximum sous la forme du § 4.4. Je partage le domaine G en trois régions I, II, III comme l'indique la figure, j'y définis $p_1(x, y)$ et $p_2(x, y)$ ainsi

$$\begin{aligned} \text{Dans I: } & p_1 = -k_1 \operatorname{ctg}(k_1 x_1), & \text{d'où } \chi_1 &= k_1^2; & \chi_1 + \chi_2 &= 2k_1^2. \\ & p_2 = -k_1 \operatorname{ctg}(k_1 y_1), & \text{d'où } \chi_2 &= k_1^2; \\ \text{Dans II: } & p_1 = -k_2 \operatorname{ctg}(k_2 x_2), & \text{d'où } \chi_1 &= k_2^2; & \chi_1 + \chi_2 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_2^2. \\ & p_2 = -\frac{\pi}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{a} y_1\right), & \text{d'où } \chi_2 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2; \\ \text{Dans III: } & p_1 = -\frac{\pi}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{a} x_1\right), & \text{d'où } \chi_1 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2; & \chi_1 + \chi_2 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_2^2. \\ & p_2 = -k_2 \operatorname{ctg}(k_2 y_2), & \text{d'où } \chi_2 &= k_2^2; \end{aligned}$$

Pour que le champ p ainsi défini soit admissible, il faut que p_1 soit continue en x et p_2 continue en y , d'où la condition

$$-k_1 \operatorname{ctg}(k_1 a) = +k_2 \operatorname{ctg}(k_2 b). \quad (10)$$

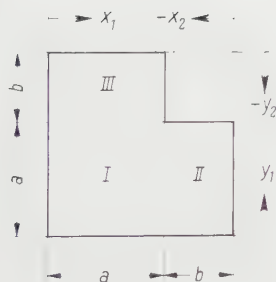


Figure 1

Membrane en L , à contour fixé.

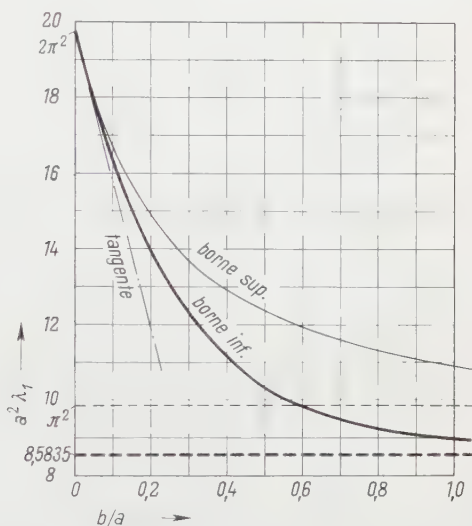


Figure 2

La borne inférieure est fournie par la méthode proposée.

Conformément à une remarque faite au § 4.3.1, nous obtiendrons une *meilleure borne inférieure* pour λ_1 en choisissant k_1 et k_2 en sorte que $\chi_1 + \chi_2 = \text{const}$ dans G , c'est-à-dire

$$2k_1^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_2^2. \quad (11)$$

Les deux relations (10) et (11) déterminent k_1 et k_2 en fonction de a et b . Lorsqu'elles sont satisfaites, on a la borne inférieure $\lambda_1(G) < 2k_1^2$. Posons encore

$$\xi = k_1 a, \quad \zeta = k_2 b;$$

nos deux relations s'écrivent alors

$$a \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi} = -b \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\zeta} \quad \text{et} \quad \left(\zeta \frac{a}{b}\right)^2 = 2\xi^2 - \pi^2; \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}^2 \zeta = (2\xi^2 - \pi^2) \left(\frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}\right)^2.$$

Je prends maintenant ξ comme paramètre; j'en tirerai d'une part ζ , puis b/a ; d'autre part, la borne $a^2 \lambda_1 \geq 2 \xi^2$.

$$1^\circ \text{ Cas } \xi \geq \frac{\pi}{2} :$$

$$\operatorname{tg} \zeta = -\sqrt{2 \xi^2 - \pi^2} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}; \quad \frac{b}{a} = \frac{\zeta}{\sqrt{2 \xi^2 - \pi^2}}.$$

$$2^\circ \text{ Cas } \xi \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} :$$

$$\zeta = i \eta, \quad \eta \text{ réel}; \quad \operatorname{tg} \zeta = i \operatorname{tgh} \eta; \quad \operatorname{tgh} \eta = -\sqrt{\pi^2 - 2 \xi^2} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}; \quad \frac{b}{a} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi^2 - 2 \xi^2}}.$$

8.2.2. Il est facile (méthode de PÓLYA) d'obtenir une borne supérieure pour $\lambda_1(G)$, donnée par la première valeur propre du rectangle de côtés a et $a + 2b$; en effet, sa fonction propre fondamentale fournit, par transplantation, une fonction concurrente pour le principe de RAYLEIGH de G . Donc

$$\lambda_1(G) \leq \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a + 2b)^2} \right).$$

8.2.3. *Cas limite* $b/a \rightarrow 0$. Pour $b = 0$, on sait que $a^2 \lambda_1 = 2\pi^2$; prenons $\xi = \pi - \varepsilon$; alors

$$\operatorname{tg} \zeta \approx -\pi \frac{\varepsilon}{\pi} = -\varepsilon; \quad \zeta \approx -\varepsilon; \quad \frac{b}{a} \approx \frac{\varepsilon}{\pi};$$

$$a^2 \lambda_1 \geq 2(\pi - \varepsilon)^2 \approx 2\pi^2 - 4\pi\varepsilon \approx 2\pi^2 - 4\frac{b}{a}\pi^2.$$

D'autre part, nous avons

$$a^2 \lambda_1 \leq \pi^2 \left[1 + \left(1 + 2\frac{b}{a} \right)^2 \right] \approx 2\pi^2 + 4\frac{b}{a}\pi^2.$$

Par conséquent:

$$a^2 \lambda_1 \approx 2\pi^2 + 4\frac{b}{a}\pi^2.$$

La courbe donnant $a^2 \lambda_1$ en fonction de b/a est inconnue; mais on connaît sa tangente au point $b/a = 0$.

8.2.4. Le rapport b/a varie de 0 à ∞ lorsque le paramètre ξ diminue de π à environ 2,07165 (valeur pour laquelle $\operatorname{tgh} \eta = 1$ et $\eta = \infty$).

Pour $\xi = \pi$, nous obtenons $b/a = 0$ et $a^2 \lambda_1 = 2\pi^2$;

pour $\xi = \pi/\sqrt{2} = 2,22144$: $b/a = 0,5914$ et $\pi^2 < a^2 \lambda_1 < 1,210\pi^2$;

pour $\xi \approx 2,07165$: $b/a = \infty$ et $8,5835 < a^2 \lambda_1 < \pi^2$.

La figure 2 donne les évaluations par défaut et par excès pour $a^2 \lambda_1$ en fonction de b/a .

8.3. *Membrane circulaire de rayon 1, fixée le long de sa circonférence et sur le segment réel* — $-1 \leq x \leq \varrho$ (fig. 3).

Nous calculerons des bornes inférieures pour λ_1 à l'aide du § 4.5. Partageons G en I et II par le cercle concentrique de rayon $|\varrho|$. Nous devons considérer séparément les cas $\varrho \leq 0$ et $\varrho \geq 0$.

8.3.1. *Bornes inférieures pour le cas* $\varrho \leq 0$.

Définissons les composantes radiale p_1 et azimutale p_2 du champ auxiliaire \mathbf{p} ainsi:

$$\text{Dans I: } p_1(r, \theta) = -\frac{1}{J_0(k_1 r)} \cdot \frac{d}{dr} J_0(k_1 r) = +k_1 \frac{J_1(k_1 r)}{J_0(k_1 r)}, \quad \text{d'où } \chi_1(r, \theta) = k_1^2;$$

$$p_2(r, \theta) = 0, \quad \text{d'où } \chi_2(r, \theta) = 0; \quad \chi_1 + \chi_2 = k_1^2.$$

$$\text{Dans II: } p_1(r, \theta) = \frac{1}{Z_{1/2}(k_2 r)} \cdot \frac{d}{dr} Z_{1/2}(k_2 r) = k_2 \left\{ \mp \frac{1}{2 k_2 r} \frac{Z_{-1/2}(k_2 r)}{Z_{1/2}(k_2 r)} \right\},$$

$$\text{d'où } \chi_1(r, \theta) = k_2^2 - \frac{1}{r^2}; \quad Z_{1/2} \propto J_{1/2} + \beta N_{1/2};$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \quad N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x;$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x; \quad N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

$$p_2(r, \theta) = \frac{1}{2r} \operatorname{tg} \theta, \quad \text{d'où } \chi_2(r, \theta) = \frac{1}{4r^2}; \quad \chi_1 + \chi_2 = k_2^2.$$

Pour que ce champ \mathbf{p} soit admissible, il faut que $p_1(r, \theta)$ soit continue en $r = -\varrho$, d'où la condition:

$$k_2 \left\{ -\frac{1}{2 k_2 \varrho} - \frac{Z_{-1/2}(-k_2 \varrho)}{Z_{1/2}(-k_2 \varrho)} \right\} = k_1 \frac{J_1(-k_1 \varrho)}{J_0(-k_1 \varrho)}.$$

Nous obtiendrons une *meilleure borne* (cf. § 4.3.1) en choisissant $\chi_1 + \chi_2 = \text{const}$ dans tout G , c'est-à-dire en prenant

$$k_1 = k_2;$$

et en choisissant p_1 singulier en $r = 1$, c'est-à-dire

$$Z_{1/2}(k_2 \cdot 1) = 0.$$

Nous avons donc trois relations qui déterminent k_1 , k_2 et $\alpha: \beta$ en fonction de ϱ . Posons

$$-k \varrho = v,$$

nous obtenons

$$\operatorname{ctg}(k - v) = \frac{J_1(v)}{J_0(v)} - \frac{1}{2v}. \quad (12)$$

Prenons maintenant v comme paramètre: à l'aide de (12), nous déterminons d'abord la borne $k \leq \sqrt{\lambda_1}$, puis $\varrho = -v/k$.

Lorsque v décroît de $j_0 = 2,4048$ à zéro, ϱ croît de -1 à zéro et k croît de j_0 à π . Nous constatons que $\sqrt{\lambda_1} = k$ pour $\varrho = -1$ et pour $\varrho = 0$.

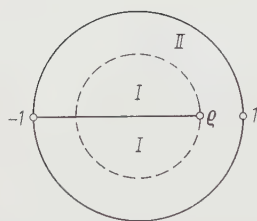


Figure 3
(Cas $\varrho > 0$).

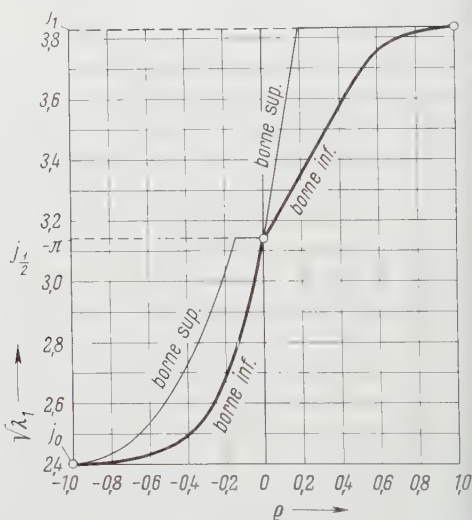


Figure 4
La borne inférieure est fournie par la méthode proposée.

8.3.2. Bornes supérieures pour le cas $\varrho \leq 0$.

On sait [8] que $\sqrt{\lambda_1} \leq j_0/r$, où r est le *rayon conforme maximum*. Ici, $\varrho \leq 0$ le maximum r est atteint en un point réel x ($0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$). La représentation conforme fournit les relations entre ϱ , x et \dot{r} :

$$\frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 - x)^2 (1 + \frac{1}{2}x)} \quad \text{et} \quad \dot{r} = 2 \frac{1 - x^2}{2 + x}.$$

Prenons donc x comme paramètre, nous calculerons les valeurs correspondantes de ϱ , \dot{r} et $j_0/\dot{r} \geq \sqrt{\lambda_1}$.

D'autre part, il est clair (monotonie) que $\lambda_{1(\varrho < 0)} < \lambda_{1(\varrho = 0)} = \pi^2$.

8.3.3. Bornes inférieures pour le cas $\varrho \geq 0$.

Définissons un champ auxiliaire \mathbf{p} par ses composantes radiale p_1 et azimutale p_2 (cf. § 4.5).

$$\text{Dans I: } p_1(r, \theta) = -\frac{1}{J_1(k_1 r)} \cdot \frac{d}{dr} J_1(k, r) = k_1 \left\{ -\frac{1}{k_1 r} - \frac{J_0(k_1 r)}{J_1(k_1 r)} \right\},$$

$$\text{d'où } \chi_1(r, \theta) = k_1^2 - \frac{1}{r^2};$$

$$p_2(r, \theta) = -\frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad \text{d'où } \chi_2(r, \theta) = \frac{1}{r^2}; \quad \chi_1 + \chi_2 = k_1^2.$$

$$\text{Dans II: } p_1(r, \theta) = -\frac{1}{Z_{1/2}(k_2 r)} \cdot \frac{d}{dr} Z_{1/2}(k_2 r) = k_2 \left\{ +\frac{1}{2 k_2 r} - \frac{Z_{-1/2}(k_2 r)}{Z_{1/2}(k_2 r)} \right\},$$

$$\text{d'où } \chi_1(r, \theta) = k_2^2 - \frac{1}{4 r^2};$$

$$p_2(r, \theta) = \frac{1}{2 r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \text{d'où } \chi_2(r, \theta) = \frac{1}{4 r^2}; \quad \chi_1 + \chi_2 = k_2^2.$$

Pour que ce champ \mathbf{p} soit admissible, $p_1(r, \theta)$ doit être continue en $r = \varrho$, d'où la condition:

$$k_1 \left\{ \frac{1}{k_1 \varrho} - \frac{J_0(k_1 \varrho)}{J_1(k_1 \varrho)} \right\} = k_2 \left\{ \frac{1}{2 k_2 \varrho} - \frac{Z_{-1/2}(k_2 \varrho)}{Z_{1/2}(k_2 \varrho)} \right\}.$$

Pour obtenir une meilleure borne, nous choisissons $\chi_1 + \chi_2 = \text{const}$ dans tout le domaine, donc $k_1 = k_2$, et p_1 singulier en $r = 1$, donc $Z_{1/2}(k_2) = 0$. En posant $k \varrho = w$, nous obtenons

$$\operatorname{ctg}(k - w) = \frac{1}{2 w} - \frac{J_0(w)}{J_1(w)}. \quad (12')$$

Prenons w comme paramètre, nous pourrions calculer les valeurs correspondantes de la borne $k \leq \sqrt{\lambda_1}$ et de $\varrho = w/k$.

Lorsque w croît de zéro à $j_1 = 3,8317$, ϱ croît de zéro à 1 et k croît de π à j_1 . On voit que $\sqrt{\lambda_1} = k$ pour $\varrho = 0$ et pour $\varrho = 1$.

8.3.4. Bornes supérieures pour le cas $\varrho \geq 0$.

A cause de la monotonie de λ_1 , une borne supérieure est fournie par la première valeur propre d'une membrane circulaire de rayon $1 - \varrho$, fixée le long de sa circonférence et sur un rayon: $\sqrt{\lambda_1} \leq \pi/(1 - \varrho)$. D'autre part, également à cause de la monotonie, $\sqrt{\lambda_1(\varrho)} \leq \sqrt{\lambda_1(1)} = j_1 = 3,8317$.

8.3.5. La figure 4 indique les bornes inférieures et supérieures obtenues pour $\sqrt{\lambda_1}$, en fonction de ϱ . On remarquera que la borne inférieure (fournie par le principe de maximum) se confond avec la valeur exacte pour $\varrho = -1$, $\varrho = 0$ et $\varrho = +1$.

8.4. Comparaison de la fréquence fondamentale d'une membrane avec celles que l'on obtient en déformant linéairement le domaine dans trois directions

8.4.1. L'inégalité suivante est une conséquence immédiate du § 7.3:

Soit \tilde{G} un domaine de l'espace à trois dimensions, de surface $\tilde{\Gamma}$; appelons $\lambda_{\tilde{G}}$ la première valeur propre du problème $\Delta u + \lambda u = 0$ dans \tilde{G} , $u = 0$ sur $\tilde{\Gamma}$; appelons λ_{z_0} la première valeur propre de la membrane (fixée) couvrant l'intersection de \tilde{G} par le plan $z = z_0$, et $\lambda_{xy} = \inf_{z_0} \lambda_{z_0}$; définissons de façon analogue λ_{yz} et λ_{zx} ; alors

$$\lambda_{xy} + \lambda_{yz} + \lambda_{zx} \leq 2 \lambda_{\tilde{G}}. \quad (13)$$

Cette inégalité est, très simplement, l'une des transpositions possibles, pour trois dimensions, de l'inégalité initiale de PAYNE-WEINBERGER [6]. On a l'égalité si \tilde{G} est un parallélépipède rectangle, d'arêtes parallèles aux axes Ox , Oy , Oz .

8.4.2. Soit G un domaine du plan, $\lambda_1(G)$ la première valeur propre de la membrane fixée qui le recouvre. Construisons, dans l'espace, le prisme infini \tilde{G} de section droite G . On sait que $\lambda_{\tilde{G}} = \lambda_1(G)$. Tout plan σ non parallèle aux génératrices du prisme, coupe \tilde{G} suivant un domaine A_σ qui n'est autre qu'une déformation affine de G , orthogonale à l'intersection des deux plans.

Il suffit de choisir trois plans σ_1 , σ_2 , σ_3 , orthogonaux deux à deux, pour que l'inégalité (13) donne

$$\lambda_1(A_{\sigma_1}) + \lambda_1(A_{\sigma_2}) + \lambda_1(A_{\sigma_3}) \leq 2 \lambda_1(G). \quad (13')$$

Cette inégalité est à rapprocher de la propriété de *convexité* de λ_1 (cf. PÓLYA-SCHIFFER [7]). Si l'on choisit σ_3 parallèle aux génératrices du prisme, $\lambda_1(A_{\sigma_3})$ est à remplacer par π^2/L^2 , où L est la borne supérieure des longueurs des segments dans G et parallèles à la trace de σ_3 .

§ 9. Relations avec le principe de Thomson

Pour montrer que le principe de maximum qui fait l'objet de ce travail est très proche du principe de THOMSON, je vais rejoindre celui-ci, pour les problèmes de la capacité électrostatique et de la rigidité à la torsion, en raisonnant comme aux §§ 2-4: en comparant le problème donné à des problèmes auxiliaires à une seule dimension.

9.1. Capacité électrostatique

9.1.1. G est un condensateur dans l'espace, Γ_0 et Γ_1 ses électrodes (surfaces supposées suffisamment régulières). Le problème de DIRICHLET: $\Delta u = 0$ dans G , $u = 0$ sur Γ_0 , $u = 1$ sur Γ_1 , permet de définir la capacité C par

$$4 \pi C = D(u) = \iiint_G \text{grad}^2 u \, dV = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS.$$

9.1.2. Construisons des problèmes auxiliaires à une dimension: choisissons dans G trois fonctions $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$. Sur chaque segment $\tau \parallel Ox$ dans G , à extrémités sur Γ_0 , supposons résolu le problème aux limites: $f(x, y_0, z_0) = 0$ aux extrémités, $f_{xx}(x, y_0, z_0) = \alpha(x, y_0, z_0)$; la solution $f(x, y_0, z_0)$ de ce problème est aussi l'extrémale du problème de variation: $v(x, y_0, z_0) = 0$ aux extrémités, $\int_{\tau} (v_x^2 + 2\alpha v) dx = \min$. La solution u du problème initial dans l'espace est concurrente, sur τ , pour ce problème auxiliaire; donc

$$\int_{\tau} (u_x^2 + 2\alpha u) dx \geq \int_{\tau} (f_x^2 + 2\alpha f) dx. \quad (14)$$

Si τ était à extrémités sur Γ_1 , on aurait imposé $f = 1$ aux extrémités; si τ reliait Γ_0 à Γ_1 , on aurait imposé $f = 0$ à l'extrémité sur Γ_0 , $f = 1$ à l'extrémité sur Γ_1 .

Appelons $g(x_0, y, z_0)$ les solutions des problèmes analogues, à une dimension, sur les segments $\parallel Oy$, avec $g_{yy} = \beta(x_0, y, z_0)$; et $h(x_0, y_0, z)$ les solutions des problèmes analogues sur les segments $\parallel Oz$, avec $h_{zz} = \gamma(x_0, y_0, z)$. En intégrant et sommant toutes les inégalités du type (14) ci-dessus, nous obtenons, si la condition

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 0 \quad (15)$$

est partout satisfaite, l'évaluation

$$\left. \begin{aligned} 4\pi C = D(u) &\geq \iiint_G (u_x^2 + 2\alpha u + u_y^2 + 2\beta u + u_z^2 + 2\gamma u) dV \\ &\geq \iiint_G (f_x^2 + 2\alpha f + g_y^2 + 2\beta g + h_z^2 + 2\gamma h) dV. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

9.1.3. Cette inégalité est d'un usage malaisé, car il faudrait encore résoudre tous les problèmes auxiliaires à une dimension. De façon analogue au § 3, retournons donc les problèmes auxiliaires: partons de leur solution! Choisissons trois fonctions: $f(x, y, z)$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à x ; $g(x, y, z)$ continue en y , etc.; $h(x, y, z)$ continue en z , etc.; valant toutes zéro sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 et satisfaisant à la condition

$$f_{xx} + g_{yy} + h_{zz} \leq 0. \quad (15')$$

Alors nous choisissons

$$\alpha(x, y, z) = f_{xx}; \quad \beta(x, y, z) = g_{yy}; \quad \gamma(x, y, z) = h_{zz},$$

et nous obtenons

$$4\pi C \geq \iiint_G (f_x^2 + 2f f_{xx} + g_y^2 + 2g g_{yy} + h_z^2 + 2h h_{zz}) dV,$$

soit, en intégrant par parties,

$$4\pi C \geq 2 \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS - \iiint_G (f_x^2 + g_y^2 + h_z^2) dV, \quad (16')$$

sous la condition (15').

9.1.4. Définissons le champ vectoriel

$$\mathbf{p} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial g}{\partial y}; \frac{\partial h}{\partial z} \right\}; \quad (17)$$

la condition (15') devient

$$\operatorname{div} \mathbf{p} \leq 0 \quad (15'')$$

et notre évaluation (16'):

$$4\pi C \geq 2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_G \mathbf{p}^2 dV. \quad (16'')$$

C'est le principe de THOMSON, appliqué ici aux champs \mathbf{p} définis par (17) avec $f, g, h = 0$ sur Γ_0 , $= 1$ sur Γ_1 .

Pour obtenir de bonnes évaluations, on appliquera (16') de préférence à des fonctions f, g, h satisfaisant même $f_{xx} + g_{yy} + h_{zz} = 0$ dans tout G .

9.2. Rigidité à la torsion

9.2.1. G est un domaine plan simplement connexe, de contour Γ ; $u(x, y)$ est déterminée par $\Delta u = -2$ dans G , $u = 0$ sur Γ ; la rigidité à la torsion est: $P = D(u) = 2 \iint_G u dA$.

9.2.2. Problèmes auxiliaires à une dimension: choisissons deux fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$; sur tout segment $\tau \parallel Ox$ dans G , à extrémités sur Γ , résolvons le problème aux limites: $f(x, y_0) = 0$ aux extrémités, $f_{xx}(x, y_0) = \alpha(x, y_0)$; f a une propriété extrémale, d'où $\int_{\tau} (u_x^2 + 2\alpha u) dx \geq \int_{\tau} (f_x^2 + 2\alpha f) dx$. De même, imposons $g(x_0, y) = 0$ sur Γ et $g_{yy}(x_0, y) = \beta(x_0, y)$. Intégrons et sommions les inégalités:

$$[1 + \max_G (\alpha + \beta)] P \geq \iint_G (f_x^2 + 2\alpha f + g_y^2 + 2\beta g) dA.$$

9.2.3. Retournons les problèmes auxiliaires: choisissons $f(x, y)$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à x ; $g(x, y)$ continue en y , etc.; toutes deux s'annulant sur Γ .

Prenons alors $\alpha(x, y) = f_{xx}$, $\beta(x, y) = g_{yy}$; nous obtenons

$$[1 + \max_G (f_{xx} + g_{yy})] P \geq \iint_G (f_x^2 + 2f f_{xx} + g_y^2 + 2g g_{yy}) dA = - \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA$$

$$P \leq [\min_G (-f_{xx} - g_{yy}) - 1]^{-1} \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA. \quad (18)$$

Cette évaluation est optimisée, parmi les multiples (kf, kg) du couple de fonctions (f, g) par le choix $k = 2/\min_G (-f_{xx} - g_{yy})$; d'où

$$P \leq 4 \frac{\iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA}{\min_G (-f_{xx} - g_{yy})^2}; \quad (18')$$

ou bien, en normant $\min_G (-f_{xx} - g_{yy}) = 2$:

$$\text{Si } -f_{xx} - g_{yy} \geq 2 \text{ dans } G, \text{ alors } P \leq \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA. \quad (18'')$$

On a deux fois l'égalité si $f(x, y) = g(x, y) = u(x, y)$.

9.2.4. Définissons le champ vectoriel

$$\mathbf{p} = \{-f_x; -g_y\}; \quad (19)$$

nous avons: Si $\text{div } \mathbf{p} \leq 2$ dans tout G , alors $P \leq \iint_G \mathbf{p}^2 dA$, c'est le principe de

THOMSON pour le problème de la torsion [8], appliqué à nos champs \mathbf{p} définis par (19) avec $f = g = 0$ sur Γ .

Pour obtenir de bonnes bornes supérieures, on appliquera (18'') de préférence à des fonctions f, g satisfaisant $-f_{xx} - g_{yy} = 2$ dans tout G .

Remarque. En vertu de (18'), le principe de THOMSON peut aussi s'écrire

$$\frac{2}{\sqrt{P}} = \text{Max}_{\text{choix de } f \text{ et } g} \frac{\min_G (-f_{xx} - g_{yy})}{\sqrt{\iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA}},$$

forme analogue à notre (7).

§ 10. Interprétation physique

10.1. Considérons, pour simplifier, une *membrane* G *fixée*: $u = 0$ sur le contour Γ . Le problème de la fréquence fondamentale est généralement énoncé ainsi:

«Quelle est la première valeur propre λ_1 d'une membrane homogène de masse spécifique (par cm^2) 1 sur le domaine G ?»

Une question équivalente est la suivante:

«Quelle est la masse spécifique λ_1 d'une membrane homogène sur G , vibrant à la fréquence fondamentale 1?»

10.2. *Interprétation des inégalités de Barta-Pólya.* Soit (cf. § 3.3.3) $f(x, y)$ une fonction positive continue et deux fois dérivable dans G , nulle sur I' . On sait alors que la membrane sur G , fixée sur son contour et de masse spécifique $-\Delta f/f$, vibre à la fréquence fondamentale 1, la fonction propre correspondante étant $f(x, y)$.

En effet, soit $v(x, y)$ continue et dérivable dans G , et nulle sur I' , alors

$$\begin{aligned} \text{grad}^2 v + \frac{\Delta f}{f} v^2 &= \text{div} \left(\frac{v^2}{f} \text{grad} f \right) + \text{grad}^2 v + \frac{v^2}{f^2} \text{grad}^2 f - 2 \frac{v}{f} \text{grad} v \text{ grad} f \\ &= \text{div} \left(\frac{v^2}{f} \text{grad} f \right) + \left(\text{grad} v - \frac{v}{f} \text{grad} f \right)^2, \end{aligned}$$

d'où en intégrant:

$$D(v) + \iint_G \frac{\Delta f}{f} v^2 dA \geq 0;$$

$$R_{\text{masse spécifique}} = (-\Delta f/f)[v] \equiv \frac{D(v)}{\iint_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right) v^2 dA} \geq 1,$$

tandis que $R_{\text{masse spécifique}} = (-\Delta f/f)[f] = 1$.

Nous utilisons maintenant un principe général sur les systèmes vibrants (COURANT-HILBERT I [1], p. 357): une diminution des masses ne peut qu'élever la fréquence, une augmentation des masses ne peut que l'abaisser; par conséquent, une membrane homogène sur G , vibrant à la fréquence fondamentale 1 doit avoir une densité de masse λ_1 comprise entre

$$\inf_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right) \leq \lambda_1 \leq \sup_G \left(-\frac{\Delta f}{f} \right).$$

Ces inégalités ne sont autres que celles de BARTA-PÓLYA (cf. § 3.3.3).

10.3. Nous considérons maintenant (cf. § 3.2) deux fonctions positives données: $f(x, y)$ continue en x , etc.; $g(x, y)$ continue en y , etc.; pour simplifier, supposons $f = g = 0$ sur I' .

Découpons un exemplaire du domaine G en lanières horizontales de largeur dy ; chacune sera assimilée à une corde vibrante de masse spécifique (par unité de longueur) $= (-f_{xx}/f) dy$ et de module d'élasticité (à une dimension) $= 1 dy$; toutes ces cordes vibrantes ont la fréquence fondamentale 1 et la fonction propre correspondante $f(x, y_0)$:

$$f_{xx} + 1 \left(-\frac{f_{xx}}{f} \right) f = 0;$$

de même, découpons un autre exemplaire de G en lanières verticales de largeur

dx ; chacune sera assimilée à une corde vibrante de masse spécifique $-(g_{yy}/g) dx$ et de module d'élasticité $= 1 dx$; ces cordes vibrantes, elles aussi, ont toutes la fréquence fondamentale 1. Nous avons donc un système de cordes indépendantes; le système entier vibre avec la fréquence fondamentale 1. (La valeur propre 1 a une dégénérescence $\rightarrow \infty$ lorsque $dx \rightarrow 0$ et $dy \rightarrow 0$.)

10.4. Modifions maintenant le système vibrant en lui imposant des contraintes supplémentaires: nous «soudons» en chaque point (x_0, y_0) la corde horizontale d'ordonnée y_0 et la corde verticale d'abscisse x_0 . Quelle est l'influence de ces contraintes supplémentaires sur la fréquence fondamentale? En vertu d'un autre principe général sur les systèmes vibrants (cf. [1], p. 354), celle-ci ne peut en être qu'augmentée. Nous obtenons donc une membrane (inhomogène en général) de masse spécifique $-f_{xx}/f - g_{yy}/g$ et de fréquence fondamentale ≥ 1 (le module d'élasticité étant égal à 1).

Comme une diminution des masses ne peut provoquer qu'une nouvelle augmentation de la fréquence fondamentale ([1], p. 357), nous avons le théorème:

Toute membrane inhomogène de masse spécifique $\varrho(x, y) \leq -f_{xx}/f - g_{yy}/g$ (et de module d'élasticité 1):

$$\Delta u + \mu \varrho(x, y) u = 0 \quad \text{dans } G \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

a une première valeur propre $\mu_1 \geq 1$.

10.5. Il en est ainsi pour la membrane homogène de masse spécifique $\varrho \equiv \inf_G (-f_{xx}/f - g_{yy}/g)$; donc:

Une membrane homogène sur G , vibrant à la fréquence fondamentale 1, doit avoir une masse spécifique $\lambda_1 \geq \inf_G (-f_{xx}/f - g_{yy}/g)$.

Cette interprétation est très voisine du raisonnement qui sert de base à la «méthode de découpage» ([2], cf. aussi [4]). On n'oubliera cependant pas la remarque 3.3.4: les cordes vibrantes auxiliaires peuvent avoir, par endroits, une masse spécifique négative.

10.6. Notre principe se laisserait peut-être généraliser par l'introduction d'une liaison élastique, en chaque point (x_0, y_0) , entre les deux cordes auxiliaires qui s'y croisent: ce qui serait analogue aux «problèmes intermédiaires» de WEINSTEIN et ARONSZAJN. De ce fait, la dégénérescence (cf. § 10.3) serait levée: le principe deviendrait applicable également aux valeurs propres supérieures.

§ 11. Adaptation à l'équation de Schrödinger

L'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps est de la forme

$$\Delta u(x, y, z) + [\lambda - W(x, y, z)] u(x, y, z) = 0,$$

où $W(x, y, z)$ est une fonction donnée dans l'espace; en outre, on doit imposer à $u(x, y, z)$ des conditions aux limites, qui assurent l'intégration par parties

$$D(u) = \iiint (\lambda_1 - W) u^2 dV.$$

Adaptons par exemple l'expression du principe donnée au § 3: Soient de nouveau $f(x, y, z) > 0$ continue en x et deux fois dérivable par rapport à x , $g(x, y, z) > 0$ continue en y , etc., $h(x, y, z) > 0$ continue en z , etc. *Sous réserve des conditions aux limites à imposer à f, g, h* , on obtient à partir de (6):

$$0 \leq D(u) + \iiint \left(\frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} + \frac{h_{zz}}{h} \right) u^2 dV \\ = \iiint \left(\lambda_1 - W + \frac{f_{xx}}{f} + \frac{g_{yy}}{g} + \frac{h_{zz}}{h} \right) u^2 dV;$$

d'où

$$\lambda_1 \geq \inf \left[W(x, y, z) - \frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} - \frac{h_{zz}}{h} \right]. \quad (20)$$

Comme au § 7.1, on a l'égalité si $f(x, y, z) = \Phi(y, z) u(x, y, z)$
 $g(x, y, z) = \Psi(z, x) u(x, y, z)$, $h(x, y, z) = \Omega(x, y) u(x, y, z)$.

L'expression vectorielle du § 4 s'adapte ainsi, *sous réserve des conditions aux limites*:

$$\lambda_1 \geq \inf [W(x, y, z) + \operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2]. \quad (20')$$

On a l'égalité si $\mathbf{p} = -\operatorname{grad} u/u$.

On se reportera au § 4.3 pour les discontinuités admises du champ \mathbf{p} . Une bonne borne inférieure sera obtenue si l'on définit \mathbf{p} en sorte que

$$W(x, y, z) + \operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p}^2 = \text{constante}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Vol. I (Springer, Berlin 1931).
- [2] J. HERSCH, *Une interprétation du principe de Thomson et son analogue pour la fréquence fondamentale d'une membrane. Application*. C. R. Acad. Sci. Paris 248, 2060 (1959).
- [3] J. HERSCH, *Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane*. C. R. Acad. Sci. Paris 249, 1074 (1959).
- [4] J. HERSCH, *Sur quelques principes extrémaux de la physique mathématique*. (Leçon inaugurale à l'E. P. F.) «L'Enseignement Mathématique», 2^e série, 5, 249-257 (1959).
- [5] W. HOOKER et M. H. PROTTER, *Bounds for the first eigenvalue of a rhombic membrane*. Tech. Report No. 3, AFOSR, Univ. of California, Berkeley (1959).
- [6] L. E. PAYNE et H. F. WEINBERGER, *Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates*. J. Soc. Indust. Appl. Math. 5, 171-182 (1957).
- [7] G. PÓLYA et M. SCHIFFER, *Convexity of functionals by transplantation*. J. d'Ana. Math. 3, 2^e partie, 245-345, Jérusalem (1953/54).

- [8] G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press (1951).
- [9] M. H. PROTTER, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations and related topics*, Tech. Report No. 8, AFOSR, Univ. of California, Berkeley (1958).

Summary

The starting point of the present paper is a simple method of PAYNE-WEINBERGER to obtain lower bounds for the first eigenvalue of a membrane through comparison with the Rayleigh principle for homogeneous strings. A generalization of this idea to auxiliary non-homogeneous strings leads to a maximum principle (7) (of which an inequality of BARTA-PÓLYA is a special case) or (7'); in its form (8), it was essentially known (although with some unnecessary restrictive hypotheses) to M. H. PROTTER in 1958. — This principle is closely related to the Thomson principle of boundary value problems; in particular, the allowed discontinuities of the concurrent vector fields (in the formulation (7')) are the same as in THOMSON's principle. Some applications of the principle to the calculation of rather sharp lower bounds are indicated, as well as an intuitive physical interpretation (in terms of variation of masses and constraints). It is valid in three dimensions as well; we indicate its extension to SCHRÖDINGER's equation.

Post-scriptum

(a) Complément au § 4.3.3 et au § 10: la formulation vectorielle du principe de maximum admet également une interprétation physique simple.

(b) On aura avantage à lire aussi le travail, très voisin, de M. H. PROTTER: *Vibration of a nonhomogeneous membrane*, Pacific J. Math. 9, 1249–1255 (1959).

(Reçu: le 6 février 1960.)

Über den Zusammenhang zwischen der Fließbedingung eines starrplastischen Körpers und seinem Fließgesetz

VON HANS ZIEGLER, ETH, Zürich

1. Einleitung

In der Plastizitätstheorie wird heute angenommen, dass zwischen der Fließbedingung eines Körpers und seinem Fließgesetz eine enge Verknüpfung bestehe. Diese ist erstmals von R. v. MISES [1]¹⁾ postuliert worden und wird gewöhnlich als Theorie des plastischen Potentials bezeichnet. Man kann sie, wenn man sich auf starrplastische Körper beschränkt, in der von W. PRAGER ([2], S. 18) verallgemeinerten Gestalt, aber ohne Verwendung der Potentialfunktion, etwa wie folgt formulieren:

1) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 426.

Es seien q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) die verallgemeinerten Verformungen des starrplastischen Körpers, das heisst ein Satz von Lagekoordinaten, welcher seine Deformation mit der gewünschten Genauigkeit beschreibt. Ferner sei (unter Verwendung der bekannten Summationsregel)

$$dA = Q_k dq_k \quad (1.1)$$

die elementare Deformations- bzw. Dissipationsarbeit. Dann kann man die Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) als verallgemeinerte Kräfte bzw. nach W. PRAGER als verallgemeinerte Spannungen bezeichnen. Sowohl der Verformungs- wie der Spannungszustand lassen sich durch Punkte mit den Fahrstrahlen q bzw. Q im n -dimensionalen euklidischen Spannungsraum R_n darstellen. Definiert man hier zum Zwecke der Metrisierung das Skalarprodukt zweier Vektoren mit

$$Q \cdot q = Q_k q_k, \quad (1.2)$$

so ist die elementare Dissipationsarbeit (1.1) durch

$$dA = Q \cdot dq \quad (1.3)$$

gegeben. Es entspricht dann jedem verallgemeinerten Verformungs- bzw. Spannungszustand q_k bzw. Q_k ein Vektor q bzw. Q oder, wie wir im folgenden auch sagen werden, ein Punkt q bzw. Q in R_n und umgekehrt.

Betrachtet man den Körper in einem gegebenen Stadium des Verformungsprozesses, so lassen sich vom momentanen Spannungszustand aus gewisse andere ohne plastischen Fluss realisieren. Diese sollen als *aplastische Spannungszustände* und die Gesamtheit ihrer Bildpunkte in R_n als *aplastischer Bereich* R_a bezeichnet werden. Ferner sei unter einem *aplastischen Spannungsinkrement* dQ^* ein solches verstanden, das zwei benachbarte *aplastische* Spannungszustände Q und Q' ineinander überführt. Die *Fliessgrenze*, eine Hyperfläche in R_n , wird dann als Oberfläche des *aplastischen Bereiches* durch diejenigen *aplastischen* Punkte Q gebildet, für die nicht jedes hinreichend kleine Spannungsinkrement dQ *aplastisch* ist. Liegen die benachbarten Punkte Q und Q' an der Fliessgrenze, dann nennt man das *aplastische Spannungsinkrement* dQ^* *neutral*. Liegt von den beiden Punkten genau einer an der Fliessgrenze, dann stellt dQ^* eine Entlastung bzw. Belastung dar.

Für die im *aplastischen Bereich* R_a , aber nicht an der Fliessgrenze liegenden Spannungspunkte ist das Verformungssinkrement dq null. Für die Punkte an der Fliessgrenze kann es gleich oder ungleich null sein. Bezüglich seiner Richtung gelten folgende Sätze:

Satz 1: Mit Q' und Q'' ist auch jeder Spannungszustand

$$Q = Q' + a (Q'' - Q'), \quad (0 < a < 1) \quad (1.4)$$

aplastisch. Mit anderen Worten: Mit zwei beliebigen Punkten Q' und Q'' liegt auch ihre ganze Verbindungsstrecke im aplastischen Bereich, das heisst der aplastische Bereich ist konvex.

Satz 2: Ist Q ein Spannungszustand an der Fliessgrenze und dQ^* ein beliebiges aplastisches Spannungsinkrement, das vom wirklichen Spannungsinkrement dQ völlig unabhängig ist, so gilt

$$dQ^* \cdot dq \leq 0. \quad (1.5)$$

Mit andern Worten: Die Normalprojektion des Verformungsinkrements auf jedes mit dem wirklichen Spannungszustand verträgliche, aplastische Spannungsinkrement ist nichtpositiv.

Satz 3: Für das wirkliche Spannungsinkrement dQ gilt

$$dQ \cdot dq \geq 0. \quad (1.6)$$

Das heisst: Die Normalprojektion des Verzerrungsinkrements auf das wirkliche Spannungsinkrement ist nichtnegativ.

Die hier gewählte Gestalt der Sätze 1 bis 3 ist mit einer Formulierung von D. C. DRUCKER [3] äquivalent. Sie vermeidet die Benützung der Fliessfläche mit ihren allfälligen Singularitäten und ins Unendliche reichenden Teilen und lässt sich zudem leicht auf den Funktionenraum übertragen. Wird R_n in Q durch ein reguläres Stück der Fliessfläche begrenzt, so folgt aus (1.5), dass dq in ihre äussere Normale fällt. Hat die Fliessfläche in Q eine Kante oder Ecke, so kann diese nach (1.4) nur ausspringend sein; dq wird durch (1.5) auf den Winkelraum beschränkt, der durch die Grenzlagen der äusseren Normale bei der Annäherung an Q gebildet wird, und schliesst zudem nach (1.6) mit dQ einen nichtstumpfen Winkel ein.

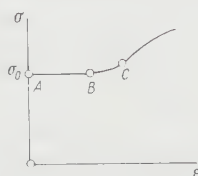
2. Problemstellung

R. v. MISES hat den durch die Sätze 1 bis 3 beschriebenen Sachverhalt anders ausgesprochen. Hervorzuheben ist vor allem, dass er ihn ausdrücklich als Hypothese und zudem unter Beschränkung auf ein Raumelement statuiert hat, indem er als Verformungen q_k und Spannungen Q_k die lokalen Verzerrungskomponenten ε_{ij} und die Spannungskomponenten σ_{ij} benützte. Es ist das Verdienst von W. PRAGER, die Theorie im Sinne von Abschnitt 1 verallgemeinert zu haben. Gegenüber der v. Misesschen Fassung bedeutet dies eine wesentliche Erweiterung, deren praktische Bedeutung auf der Hand liegt; am hypothetischen Charakter der Theorie ändert aber diese Neufassung nichts.

Es sind bisher drei Versuche unternommen worden, die Sätze 1 bis 3 zu begründen. Zunächst haben J. F. W. BISHOP und R. HILL [4] gezeigt, dass die

Sätze 1 und 2 für das polykristalline Raumelement aus einer plausiblen Hypothese über das Verhalten des Einkristalls beim plastischen Gleiten folgen.

Sodann hat D. C. DRUCKER [3] nachgewiesen, dass sie in der v. Misesschen Fassung richtig sind, wenn man über das Verhalten des Raumelements zwei Voraussetzungen machen darf. Er postuliert, dass dann, wenn man am beliebig vorbelasteten Element eine zusätzliche Belastung langsam anbringt und wieder entfernt, die durch diese Zusatzlasten geleistete Arbeit während der Belastung positiv und über den ganzen Prozess nichtnegativ sei. Diese Voraussetzungen sind indessen nicht ganz so selbstverständlich, wie sie scheinen mögen. So ist zum Beispiel ein Element aus einem Material mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Figur 1, wenn es in einachsigen Zug bis an



Figur 1

Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines starrplastischen Materials mit Verfestigung.

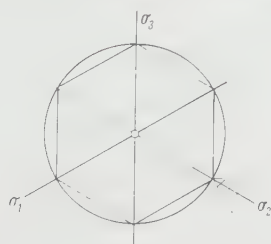
die Fließgrenze σ_0 vorbelastet wird, unter konstant gehaltener Belastung im labilen Gleichgewicht, da sich mit dem Beginn des Fließens infolge der Querkontraktion die Normalspannung erhöht. Um den Vorgang quasistationär zu halten, muss eine zusätzliche Druckkraft eingeführt werden, und wenn die bei B einsetzende Verfestigung genügend stark ist, gibt es auf dem zugehörigen Teil des Diagramms einen Punkt C, in dem die Zusatzlast wieder auf null absinkt. Ihre Arbeit ist sowohl während des Aufbringens wie über den ganzen Zyklus negativ und erfüllt damit keines der beiden Postulate.

Ein Versuch ganz anderer Art, die Sätze 1 und 2 zu begründen, wurde vom Verfasser [5] unternommen, und zwar im Rahmen einer Erweiterung der Theorie irreversibler Prozesse von L. ONSAGER [6]. Auch diese Beweisführung beruht auf zwei Postulaten, nämlich auf der Annahme, dass sich irreversible Vorgänge unter mikroskopischen Schwankungen abspielen, die erstens selbst reversibel und zweitens im Vergleich zu den Molekularbewegungen langsam sind. Das sind im wesentlichen die Voraussetzungen, die schon der Onsager'schen Theorie zugrunde liegen. Aus ihnen kann meines Erachtens auf die Richtigkeit der Sätze 1 und 2 direkt in ihrer verallgemeinerten Pragerschen Form geschlossen werden. Die in [6] angewandte Schlussweise macht aber vor statistisch-thermodynamischen Anschauungen Gebrauch und liegt damit ausserhalb der Mechanik im engeren Sinn. Sie ist zudem zweifellos im einzelnen noch verbesserungsfähig. Tatsache ist jedenfalls, dass sie zurzeit noch nicht als anerkannt gelten kann, auch wenn sie kaum auf Kritik gestossen ist.

In dieser Situation scheint es nicht unangebracht, sich für einmal zu bescheiden und unter Verzicht auf alle physikalischen Postulate wenigstens in aller Strenge nachzuweisen, dass aus der Annahme, die Sätze 1 bis 3 seien in der v. MISSESchen Fassung, das heisst für das Raumelement richtig, auch ihre Gültigkeit in der PRAGERSchen Verallgemeinerung, das heisst im Sinne von Abschnitt 1 folgt. Dieser Nachweis soll im folgenden gebracht werden, und zwar unter Verwendung einer neulich von J. L. SYNGE [7] in anderem Zusammenhang beschriebenen Darstellungsart.

3. Ein Beispiel

Zunächst soll ein Beispiel, das von W. PRAGER ([2], S. 44) diskutiert worden ist, die Sätze 1 bis 3 illustrieren und gleichzeitig als Testfall für die weitere Orientierung dienen. Für ein einzelnes Raumelement kann man als Verformungen die Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und als Spannungen die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ verwenden, da $dA = \sigma_i d\varepsilon_i$ die elementare Dissipationsarbeit ist. Unter der bekannten Fließbedingung von R. v. MISES ist der aplastische Bereich R_3 ein Kreiszylinder vom Radius $(2/3)^{1/2} \sigma_0$, wenn σ_0 die Fließgrenze für den linearen Spannungszustand bezeichnet, und die Achse dieses Zylinders bildet mit den positiven Koordinatenachsen in R_3 gleiche Winkel. Unter der Fließbedingung von H. TRESCA dagegen ist R_3 ein reguläres Prisma mit hexagonalem Querschnitt, das dem v. MISSESchen Zylinder eingeschrieben ist. Figur 2 zeigt beide Körper, in axialer Richtung betrachtet, und

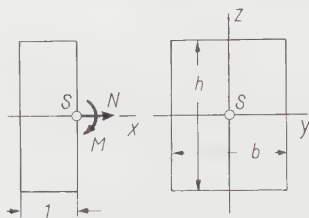


Figur 2

Aplastische Bereiche nach R. v. MISES bzw. H. TRESCA im Hauptspannungsraum.

zwar unter der Annahme, dass noch keine Verfestigung stattgefunden habe. Satz 1 ist offensichtlich in beiden Fällen erfüllt, und nach Satz 2 ist der Vektor $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ des Verzerrungsinkrements entweder normal zur Oberfläche nach aussen gerichtet, oder er ist normal zu einer Kante, liegt im äusseren Winkelraum, der durch die Normalebenen durch diese Kante zu den anschliessenden Seiten gebildet wird, und zwar so, dass der Winkel zwischen ihm und dem Vektor $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ nicht stumpf ist.

Es sei nun ein Balken mit rechteckigem Querschnitt aus diesem von jetzt an als idealplastisch vorausgesetzten Material auf Zug und Biegung beansprucht und hievon in Figur 3 eine Scheibe der Dicke 1 betrachtet.



Figur 3

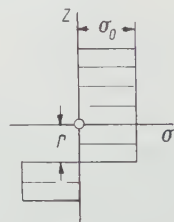
Elementarscheibe des auf Zug und Biegung beanspruchten Balkens.

Der Verformungs- und der Spannungszustand in dieser Scheibe sind in Wirklichkeit kompliziert und werden, falls man die Längeneinheit hinreichend klein gewählt hat, durch je sechs von y und z abhängige Verzerrungs- bzw. Spannungskomponenten beschrieben. Man kann aber das Problem im Sinne der Festigkeitslehre durch die Annahme vereinfachen, dass die Querschnitte bei der Verformung eben bleiben und sich wie starre Körper bewegen. Um mit der Inkompressibilität des Materials nicht in Konflikt zu kommen, muss man sich dabei freilich vorstellen, dass der Zusammenhang zwischen den Längsfasern gelöst sei, und das ist natürlich nur dann erlaubt, wenn der Spannungszustand im wesentlichen linear mit x als Achse ist. Wie Figur 4 zeigt, wird die Verformung der Scheibe in dieser Näherung durch die Dehnung ϵ sowie die Krümmung der elastischen Linie, nämlich den Winkel κ zwischen den beiden Stirnflächen, beschrieben, und die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen sind die Normalkraft N sowie das Biegemoment M , da die elementare Dissipationsarbeit durch $dA = N d\epsilon + M d\kappa$ gegeben ist.



Figur 4

Verformung der Scheibe.



Figur 5

Plastische Spannungsverteilung in der Scheibe.

Da das Material als starrplastisch vorausgesetzt ist, kommt es zur Verformung gemäss Figur 4 erst dann, wenn der ganze Querschnitt plastisch geworden ist. Die Lage der neutralen Faserschicht ist durch r gegeben, und die Normalspannung ist bei Beginn des Flusses gemäss Figur 5 über den Querschnitt

verteilt. Dabei gilt, wie man leicht 6berpr6uft,

$$\varepsilon = r \varkappa \quad (3.1)$$

und

$$N = \pm 2 b r \sigma_0, \quad M = \pm \frac{b}{4} (h^2 - 4 r^2) \sigma_0 \quad \left(-\frac{h}{2} \leq r \leq \frac{h}{2} \right) \quad (3.2)$$

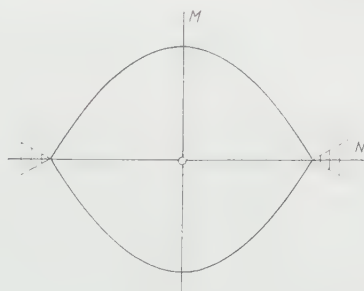
bzw.

$$N = \pm b h \sigma_0, \quad M = 0 \quad \left(r \leq -\frac{h}{2}, \quad r \geq \frac{h}{2} \right). \quad (3.3)$$

Der aplastische Bereich R_2 wird also (Figur 6) durch die beiden Parabeln

$$M = \pm \frac{b h^2}{4} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{N}{4 b h \sigma_0} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

begrenzt. Er ist konvex, und man 6berzeugt sich leicht davon, dass das Verformungsinkrement $d\varepsilon$, $d\varkappa$ in die 6ussere Normale bzw. in einen der beiden schraffierten Winkelr6ume, beim Abwandern des Spannungspunktes aus einer Ecke aber auf den n6heren Rand des zugeh6rigen Winkelraumes f6llt, so dass auch in dieser Darstellung die S6tze 1 bis 3 gelten.



Figur 6

Aplastischer Bereich f6r die auf Zug und Biegung beanspruchte Scheibe.

Wie in diesem Beispiel, so wird auch in jedem anderen Fall der 6bergang vom wirklichen Problem zur vereinfachten Darstellung gem6ss Abschnitt 1 dadurch vollzogen, dass man den Freiheitsgrad des K6rpers beschr6nkt und nur Verformungen in Betracht zieht, die sich durch wenige Parameter q_k beschreiben lassen. Diese speziellen Verformungen brauchen nicht kinematisch zul6ssig, das heisst mit den kinematischen Randbedingungen, den Kontinuit6tsbedingungen und allenfalls der Forderung der Inkompressibilit6t vertr6glich zu sein, auch wenn die Vereinfachung nat6rlich um so brauchbarer ist, je weniger von diesen Bedingungen verletzt werden und je besser die zugeh6rigen Spannungszust6nde mit den wirklichen 6bereinstimmen. Die verallgemeinerten Spannungen Q_k , welche den Verformungen q_k entsprechen, ergeben sich aus der

Darstellung (1.1) der elementaren Dissipationsarbeit und werden im allgemeinen nicht statisch zulässig, das heisst mit allen dynamischen Randbedingungen sowie den Gleichgewichtsforderungen im Einklang sein.

Um den aplastischen Bereich R_n zu erhalten, muss man diejenigen Spannungszustände im Körper angeben können, welche für verschiedene Verhältnisse der Q_k erstens an der Fließgrenze liegen und zweitens mit den gewählten speziellen Verformungszuständen verträglich sind. Das ist um so leichter, je einfacher die durch die q_k dargestellten Verformungszustände sind; auf alle Fälle steht und fällt mit dieser Möglichkeit die Brauchbarkeit der Vereinfachung. Es mag gelegentlich von Vorteil sein, wenn man den Körper als elastisch-plastisch betrachtet und von der elastischen Spannungsverteilung aus auf diejenige an der Fließgrenze schliesst. Für das Folgende ist indessen nur die Spannungsverteilung an der Fließgrenze von Bedeutung, und es ändert sich an den Ergebnissen nichts, wenn man sich vorstellt, dass bei gegebenem Verhältnis zwischen den Q_k der Spannungsverlauf unterhalb und an der Fließgrenze nur in der Intensität, nicht aber in der Form verschieden sei.

Der plastische Fluss setzt im besprochenen Beispiel erst dann ein, wenn alle Elemente der Scheibe an der Fließgrenze angelangt sind. Im allgemeinen ist dies nicht nötig. Wenn etwa der ganze Balken betrachtet und angenommen wird, dass nur die Scheibe von Figur 3 gefährdet sei, dann liegt ein Beispiel für den Fall vor, wo der Körper als solcher die Fließgrenze erreicht, ohne dass dies alle seine Elemente tun.

4. Der lokale Spannungszustand

Um den am Schluss von Abschnitt 2 in Aussicht gestellten Beweis zu erbringen, seien die Verzerrungs- und Spannungskomponenten in einem beliebigen Element des betrachteten Körpers mit ε_{ij} bzw. σ_{ij} bezeichnet und durch die Vektoren \mathbf{e} bzw. \mathbf{s} im neundimensionalen euklidischen Spannungsraum R_9 dargestellt. Definiert man hier das Skalarprodukt mit

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (4.1)$$

so ist die elementare Dissipationsarbeit je Raumeinheit durch

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \mathbf{s} \cdot d\mathbf{e} \quad (4.2)$$

gegeben.

Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Tensoren ε_{ij} und σ_{ij} liegen die Vektoren \mathbf{e} und \mathbf{s} in Wirklichkeit in einem sechsdimensionalen linearen Unterraum R_6 von R_9 . Hier entspricht jedem Verzerrungs- bzw. Spannungszustand ε_{ij} bzw. σ_{ij} ein Vektor \mathbf{e} bzw. \mathbf{s} und umgekehrt, und der aplastische Bereich wird wie in Abschnitt 1 definiert. Er kann sich wie in den Fällen von Figur 2 ins Unendliche erstrecken; so schliesst man ja gewöhnlich plastischen Fluss unter einem hydrostatischen Spannungszustand aus.

Es sei von jetzt an vorausgesetzt, dass für den lokalen Spannungszustand und das zugehörige Verzerrungsinkrement die Sätze 1 bis 3 gelten. Dann ist erstens nach (1.4) mit \mathbf{s}' und \mathbf{s}'' auch jeder Spannungszustand

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}' + a(\mathbf{s}'' - \mathbf{s}'), \quad (0 < a < 1)$$

oder in anderer Schreibweise mit σ'_{ij} und σ''_{ij} auch jeder Spannungszustand

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + a(\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}), \quad (0 < a < 1) \quad (4.3)$$

aplastisch. Zweitens gilt nach (1.5), wenn \mathbf{s} bzw. σ_{ij} ein Spannungszustand an der Fließgrenze und $d\mathbf{s}^*$ bzw. $d\sigma_{ij}^*$ ein beliebiges aplastisches Spannungsinkrement ist, für das wirkliche Verzerrungsinkrement $d\mathbf{e}$ bzw. $d\epsilon_{ij}$ die Ungleichung $d\mathbf{s}^* \cdot d\mathbf{e} \leq 0$ oder

$$d\sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij} \leq 0. \quad (4.4)$$

Drittens gilt nach (1.6) für das wirkliche Spannungsinkrement $d\mathbf{s}$ bzw. $d\mathbf{e}$ die Ungleichung $d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{e} \geq 0$ bzw.

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \geq 0. \quad (4.5)$$

Diese Voraussetzungen sind insbesondere in den beiden Fällen erfüllt, die in Abschnitt 3 im Zusammenhang mit Figur 2 diskutiert worden sind.

5. Der globale Spannungszustand

Der Verformungs- und der Spannungszustand des ganzen Körpers werden durch die von den Koordinaten x , y und z abhängigen Funktionen ϵ_{ij} bzw. σ_{ij} dargestellt, und diese lassen sich [7] als Vektoren \mathbf{E} bzw. \mathbf{S} im Funktionenraum F interpretieren. Da die elementare Dissipationsarbeit durch das über den ganzen Körper K erstreckte Raumintegral

$$dA = \int_K \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dv \quad (5.1)$$

gegeben ist, empfiehlt es sich, für die Metrisierung des Funktionenraums das Skalarprodukt hier durch

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_K \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \quad (5.2)$$

zu definieren. Diese Definition ist zulässig (vgl. [7], S. 37), da ihr zufolge, wie man leicht überprüft, das kommutative Gesetz $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$, das distributive Gesetz $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}'$, die Beziehung $\mathbf{S} \cdot \mathbf{O} = 0$ für die Multiplikation mit dem Nullvektor und schliesslich das assoziative Gesetz $(a\mathbf{S}) \cdot \mathbf{E} = a(\mathbf{S} \cdot \mathbf{E})$ für die Multiplikation mit einem Skalar gilt. Die Metrik in F ist dann positiv

definit, und die elementare Dissipationsarbeit (5.1) ist durch

$$dA = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} \quad (5.3)$$

gegeben.

Jedem Verformungs- bzw. Spannungszustand im Körper K entspricht ein Vektor im Funktionenraum. Dabei beschränkt sich diese Darstellung keineswegs auf kinematisch zulässige Verformungs- und statisch zulässige Spannungszustände; vielmehr sollen alle denkbaren Zustände zugelassen sein, für welche die Integrale (5.1) und (5.2) existieren. Der applastische Bereich F im Funktionenraum wird analog wie in Abschnitt 1 definiert. Er kann sich ins Unendliche erstrecken; so nimmt man ja gewöhnlich an, dass kein plastischer Fluss auftrete, wenn der Spannungszustand überall in K hydrostatisch ist. Im allgemeinen werden gewisse Elemente des Körpers K schon für Spannungszustände \mathbf{S} plastisch, die noch nicht an der Fließgrenze liegen. Plastischer Fluss ist aber erst möglich, wenn ein genügend grosses Teilgebiet von K plastifiziert ist, und bei Fließbeginn befinden sich im allgemeinen die Elemente von K in gewissen Teilbereichen an ihrer Fließgrenze, in anderen noch darunter.

Es sei nun angenommen, dass Satz 1 zwar für jedes Element von K , aber nicht für den ganzen Spannungszustand gelte. Dann gibt es zwei applastische Spannungszustände \mathbf{S}' und \mathbf{S}'' sowie einen Wert a so, dass der Spannungszustand

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + a(\mathbf{S}'' - \mathbf{S}'), \quad (0 < a < 1) \quad (5.4)$$

nicht applastisch ist. Das ist aber nur möglich, wenn in wenigstens einem Element von K die Fließgrenze überschritten, mithin im Widerspruch zur ersten Annahme von Abschnitt 4 der Spannungszustand (4.3) nicht applastisch ist, obschon es die Spannungszustände σ'_{ij} und σ''_{ij} sind.

Ebenso einfach ist der Nachweis, dass für einen Spannungszustand \mathbf{S} an der Fließgrenze, ein beliebiges applastisches Spannungsinkrement $d\mathbf{S}^*$ und das wirkliche Verformungsinkrement $d\mathbf{E}$ die Ungleichung

$$d\mathbf{S}^* \cdot d\mathbf{E} \leq 0 \quad (5.5)$$

bzw. nach (5.2)

$$\int_K d\sigma^*_{ij} d\epsilon_{ij} dv \leq 0 \quad (5.6)$$

besteht, falls für jedes Element von K Satz 2 richtig ist. Man kann nämlich diese Elemente in zwei Gruppen einteilen, je nachdem sie unter dem wirklichen Spannungsinkrement $d\mathbf{S}$ fließen oder nicht. Für die Elemente der zweiten Gruppe ist $d\epsilon_{ij} = 0$; sie liefern also keine Beiträge zum Integral (5.6). Für diejenigen der ersten Gruppe gilt (4.4), da $d\mathbf{S}^*$ nur mit allen $d\sigma^*_{ij}$ applastisch ist, ihre Beiträge zu (5.6) sind demnach nichtpositiv.

Schliesslich folgt aus der Gültigkeit von Satz 3 für jedes Element von K , dass für das wirkliche Spannungsinkrement $d\mathbf{S}$ die Ungleichung

$$d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} \geq 0 \quad (5.7)$$

bzw.

$$\int_{\dot{K}} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \geq 0 \quad (5.8)$$

besteht. Die unter $d\mathbf{S}$ nichtfliessenden Elemente leisten nämlich keine, die übrigen nach (4.5) nichtnegative Beiträge zum Integral (5.8).

Somit hat man

Satz 4: Gelten die Sätze 1 bis 3 für das Raumelement, dann sind sie auch für die Darstellung des ganzen Verformungs- und Spannungszustandes im Funktionenraum richtig.

6. Behandlung im linearen Unterraum

Wie in Abschnitt 3 ausgeführt wurde, bedeutet der Übergang vom wirklichen Problem zur vereinfachten Darstellung von Abschnitt 1 die Beschränkung auf Verzerrungszustände, die sich durch Überlagerung aus n speziellen, voneinander unabhängigen Zuständen gewinnen lassen. Im Funktionenraum bedeutet dies stets die Restriktion auf einen linearen Unterraum F_n (vgl. [7, S. 28]), der den Ursprung enthält und durch eine orthonormale Basis \mathbf{I}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) dargestellt werden kann, so dass

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_k) \mathbf{I}_k \quad (6.1)$$

ist. Die zugehörigen Spannungszustände werden im allgemeinen nicht durch Vektoren \mathbf{S} aus F_n dargestellt. Indessen kann ein beliebiger Spannungszustand \mathbf{S} (vgl. [7], S. 61) gemäss

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{S}' = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}_k) \mathbf{I}_k \quad (6.2)$$

in seine Normalprojektion \mathbf{S}' auf F_n und einen zu F_n orthogonalen Vektor \mathbf{S}_0 zerlegt werden, und da nach (5.3), (6.1) und (6.2) die elementare Dissipationsarbeit durch

$$dA = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}_k) (d\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_k) = \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{E} \quad (6.3)$$

gegeben ist, liegt die Vermutung nahe, dass dennoch die Behandlung im linearen Unterraum F_n möglich sei.

Diejenigen Vektoren \mathbf{S}' , die durch Normalprojektion aus aplastischen Spannungszuständen \mathbf{S} hervorgehen, bilden die Normalprojektion F' des aplastischen Bereiches F auf F_n . Ein Punkt, der F' nicht angehört, kann nicht durch Projektion eines Punktes aus F erhalten werden. Somit gilt

Satz 5: Die Normalprojektion $d\mathbf{S}^*$ jedes aplastischen Spannungsinkrements $d\mathbf{S}^*$ liegt im Bereich F' .

Ferner ist nach (6.2) die Normalprojektion des Vektors $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + a(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)$ durch $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_1 + a(\mathbf{S}'_2 - \mathbf{S}'_1)$ gegeben. Daher gilt

Satz 6: Mit dem aplastischen Bereich F ist auch seine Normalprojektion F' auf den linearen Unterraum F_n konvex.

Die Beschränkung auf die speziellen Verformungszustände (6.1) hat zur Folge, dass für plastischen Fluss nur diejenigen Punkte \mathbf{S} auf der Fließgrenze in F , das heisst auf der Oberfläche von F , in Betracht zu ziehen sind, für die mindestens ein Verformungsinkrement $d\mathbf{E}$ dem linearen Unterraum F_n angehört, mithin von der Gestalt

$$d\mathbf{E} = (d\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_k) \mathbf{I}_k \quad (6.4)$$

ist. Stellt dann $d\mathbf{S}^*$ ein beliebiges aplastisches und $d\mathbf{S}$ das wirkliche Spannungsinkrement dar, so gilt analog zu (6.3)

$$d\mathbf{S}^* \cdot d\mathbf{E} = d\mathbf{S}^{*'} \cdot d\mathbf{E}, \quad d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{E} = d\mathbf{S}' \cdot d\mathbf{E} \quad (6.5)$$

und nach (5.5) bzw. (5.7)

$$d\mathbf{S}^{*'} \cdot d\mathbf{E} \leq 0, \quad d\mathbf{S}' \cdot d\mathbf{E} \geq 0. \quad (6.6)$$

Aus der ersten Ungleichung (6.6) folgt zunächst, wenn man noch Satz 5 beachtet:

Satz 7: Diejenigen Spannungszustände, welche an der Fließgrenze liegen und mit Verformungszuständen der Gestalt (6.1) verträglich sind, ergeben bei der Normalprojektion auf F_n die Randpunkte des Bereiches F' .

Damit ist die Möglichkeit der Behandlung im Unterraum F_n nachgewiesen, und die Sätze 6 und 7 sowie die Ungleichungen (6.6) können schliesslich wie folgt zusammengefasst werden:

Satz 8: Bei Beschränkung der Verformungszustände \mathbf{E} im linearen Unterraum F_n von F kann man ganz in diesem Unterraum arbeiten, wenn man die Spannungszustände \mathbf{S} und den aplastischen Bereich F durch ihre Normalprojektionen \mathbf{S}' bzw. F' ersetzt. In den projizierten Grössen gelten die Sätze 1 bis 3.

7. Der verallgemeinerte Spannungszustand

Wir verfügen jetzt hinsichtlich der verallgemeinerten Verformungszustände von Abschnitt 1 über zwei Darstellungen, nämlich durch Punkte \mathbf{E} in I_n sowie durch Punkte \mathbf{q} in R_n . Ferner gehört zu jedem Spannungszustand, welcher mit dieser Einschränkung der Verformung verträglich ist, ein Bildpunkt \mathbf{S}

in F_n und ein solcher Q in R_n . Diese Bildpunkte stellen nicht die ganzen Spannungszustände dar, nach (1.3) und (6.3) aber diejenigen Anteile hiervon, die bei Verformungen der hier betrachteten speziellen Gestalt Arbeit zu leisten vermögen. Im Hinblick auf die Eindeutigkeit der virtuellen Arbeit entspricht einem gegebenen Spannungszustand nur je ein einziger Bildpunkt in den Spannungsräumen F_k und R_k . Zwischen den Punkten S' und Q besteht also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Da die beiden Punkte den gleichen Spannungszustand darstellen, müssen zudem beide gleichzeitig innerhalb, ausserhalb oder auf der Oberfläche des zugehörigen applastischen Bereiches F' bzw. R_n liegen. Damit entspricht insbesondere einem applastischen Spannungszinkrement dS^* in F_n ein solches dQ^* in R_n .

Da das Skalarprodukt in beiden Räumen F_n und R_n durch die Deformationsarbeit definiert ist, hat es für entsprechende Vektorpaare S', dE bzw. Q, dq denselben Wert. Somit folgt aus (6.6) die Richtigkeit von Satz 2 und 3 auch in der ursprünglichen Form (1.5) bzw. (1.6) von Abschnitt 1. Nimmt man ferner an, dass in F_n mit S' und S'' auch jeder Punkt (5.4) im Inneren der Verbindungsstrecke von S' nach S'' applastisch sei, so folgt dies sofort auch für die Bildpunkte Q', Q'' und Q in R_n . Um schliesslich noch zu zeigen, dass Q im Inneren der Strecke von Q' nach Q'' liegt, beachten wir, dass man die Ortsbeziehung (5.4) zwischen S', S'' und S bei geeigneter Wahl der orthonormalen Basis I_k in F_n auch durch die Feststellung ausdrücken kann, dass

$$(S'' - S) \cdot I_1 > 0, \quad (S - S') \cdot I_1 > 0 \quad (7.1)$$

sei, während die entsprechenden, mit den übrigen Einheitsvektoren gebildeten Skalarprodukte sämtlich verschwinden. Mit Rücksicht auf die Übereinstimmung des Skalarproduktes in den Räumen F_n und R_n geht die orthonormale Basis I_k von F_n in eine solche J_k von R_n über, und es folgt aus (7.1), dass

$$(Q'' - Q) \cdot J_1 > 0, \quad (Q - Q') \cdot J_1 > 0 \quad (7.2)$$

ist, während die entsprechenden Produkte mit den übrigen Einheitsvektoren verschwinden. Damit ist aber bewiesen, dass mit F' auch R_n konvex ist, und es kommt daher schliesslich

Satz 9: Gelten die Sätze 1 und 2 für das Raumelement, dann sind sie auch für die Darstellung der verallgemeinerten Verformungen und Spannungen in R_n richtig.

Abstract

This paper supplies a proof, free of any physical assumptions, that v. MISES' theory of the plastic potential, if valid for the elements of a rigid-plastic body, also holds for the representation in generalized strains and stresses.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [2] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [3] D. C. DRUCKER, *Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity*, Quart. Apl. Math. 7, 411 (1949).
- [4] J. F. W. BISHOP and R. HILL, *A Theory of the Plastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate under Combined Stresses*, Phys. Mag. (7) 42, 414 (1951).
- [5] H. ZIEGLER, *An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems*, Festschrift J. Ackeret, Z. angew. Math. Phys. 9b, 748 (1958).
- [6] L. ONSAGER, *Reciprocal Relations in Irreversible Processes*, Phys. Rev. 37 (II), 405 (1931) und 38 (II), 2265 (1931).
- [7] J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics* (Cambridge University Press 1957).

(Eingegangen: 2. Februar 1960.)

 Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Laminar-Film Condensation on a Flat Plate in the Absence of a Body Force

By ROBERT D. CESS, Pittsburgh 35, Pa., U.S.A.¹⁾

1. Introduction

Analyses of laminar-film condensation generally deal with condensation of saturated vapor on a surface located within a gravitational field and with negligible vapor velocity. This problem was originally studied by NUSSELT [1]²⁾ for the case of a vertical flat plate, and both fluid acceleration and thermal convection within the liquid film were neglected. SPARROW and GREGG [2] have recently obtained a solution to this problem without neglecting acceleration and convection effects. This was accomplished through application of boundary-layer techniques and subsequent utilization of a similarity transformation.

A further consideration of laminar-film condensation on vertical surfaces involves a finite vapor velocity. Here the motion of the liquid film is affected by both the gravitational body force and the sweeping effect of the vapor. In this situation a similarity transformation does not exist, and a complete solution to the problem would be quite complicated. Only approximate solutions have been obtained based upon the assumption that the shear stress at the liquid-vapor interface is a constant known quantity³⁾.

¹⁾ Heat Transfer and Flow Section, Mechanics Department, Westinghouse Research Laboratories.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 433.

³⁾ For example, see Reference [3].

The purpose of the present paper is to investigate laminar-film condensation on a flat plate for the case in which no body force is present. The motion of the liquid film therefore results solely from the sweeping effect of the adjacent vapor. This problem is illustrated in Figure 1. A saturated vapor at temperature T_∞ flows

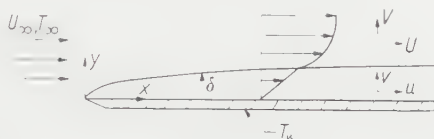


Figure 1

Physical model and coordinate system.

with a free-stream velocity U_∞ across a cooled flat plate having a constant surface temperature T_w . The vapor condenses on the plate surface producing a liquid film of thickness δ .

Physically, such a situation can occur in one of two ways. First, if the plate is oriented normal to any acting body force; for example, if the plate is placed horizontally in a gravitational field. The second situation involves the complete absence of a body force as would occur in a nonrotating space vehicle.

2. Basic Equations

It will be assumed that a continuous laminar film of condensate exists. Let u and v be the velocity components of the liquid, and U and V be those of the vapor. Temperature is denoted by T . For $y < \delta$ the equations expressing the conservation of mass, momentum, and energy may be written as

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

while for the vapor ($y > \delta$) the continuity and momentum equations become

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (5)$$

The quantities α and ν are the thermal diffusivity and kinematic viscosity, respectively. Further, the nomenclature will be adopted that a physical property with no subscript refers to the liquid, whereas the subscript v denotes the vapor.

The boundary conditions at the plate surface are $u = v = 0$ and $T = T_w$, while $T = T_\infty$ for $y = \delta$ and $U = U_\infty$ for $y = \infty$. Three additional boundary conditions are necessary. Across the liquid-vapor interface both velocity and shear stress must be continuous, so that within the framework of boundary-layer theory $u = U$ and $\mu \partial u / \partial y = \mu_v \partial U / \partial y$ for $y = \delta$, where μ is the dynamic viscosity. In addition,

continuity of mass across $y = \delta$ requires that

$$\varrho \left(u \frac{d\delta}{dx} - v \right)_{y=\delta} = \varrho_v \left(U \frac{d\delta}{dx} - V \right)_{y=\delta}$$

with ϱ denoting density.

Equations (1) and (4) are satisfied by introducing stream functions ψ and Ψ defined by the relations

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Defining further

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{v_v U_\infty x}}, \quad F(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{v_v U_\infty x}}, \quad \Theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{v_v x}},$$

equations (2), (5), and (3) transform, respectively, to the ordinary differential equations

$$f''' + \frac{1}{2} \left(\frac{v_v}{v} \right) f f'' = 0, \quad (6)$$

$$F''' + \frac{1}{2} F F'' = 0, \quad (7)$$

$$\Theta'' + \frac{Pr}{2} \left(\frac{v_v}{v} \right) f \Theta' = 0. \quad (8)$$

The boundary conditions become

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \Theta(0) = 1, \quad (9a)$$

$$f(\eta_\delta) = \left(\frac{\varrho_v}{\varrho} \right) F(\eta_\delta), \quad f'(\eta_\delta) = F'(\eta_\delta), \quad f''(\eta_\delta) = \left(\frac{\varrho_v v_v}{\varrho v} \right) F''(\eta_\delta), \quad \Theta(\eta_\delta) = 0, \quad (9b)$$

$$F'(\infty) = 1, \quad (9c)$$

where $\eta_\delta = \delta \sqrt{U_\infty / v_v x}$.

One may note that equations (7) and (9b) are analogous to vectored blowing or suction, where in this case the vectored blowing or suction is specified at $\eta = \eta_\delta$ rather than $\eta = 0$. In view of this result, consider a function $G(\eta)$ defined by

$$G''' + \frac{1}{2} G G'' = 0 \quad (10)$$

with the boundary conditions

$$G(0) = G_w, \quad G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = 1.$$

This corresponds to the problem of normal blowing or suction as treated by EMMONS and LEIGH [4], and it has been shown that vectored blowing or suction can be determined from the solution of equation (10) with its boundary conditions through use of a fictitious origin for η . Consequently, the solution of equation (7) may be written as

$$F(\eta) = G(\eta - \gamma), \quad (11)$$

where γ and the appropriate value for G_w are constants to be determined from the boundary conditions at $\eta = \eta_\delta$.

The quantity η_δ remains to be evaluated, and this may be accomplished in the same manner as considered by SPARROW and GREGG [2]. An over-all energy balance on the liquid film yields

$$k \int_0^x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \rho h_{fg} \int_0^\delta u dy + \rho c_p \int_0^\delta u (T_\infty - T) dy,$$

where c_p is the specific heat of the liquid at constant pressure, k is the thermal conductivity, and h_{fg} denotes the latent heat of condensation. Writing this in terms of the boundary-layer variables, and letting $(T - T_\infty) = T_w$, there is obtained

$$\left(\frac{v}{v_v} \right) \left(\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}} \right) = - \frac{1}{2} \frac{f(\eta_\delta)}{\Theta'(\eta_\delta)} \quad (12)$$

with Pr representing the Prandtl number ($Pr = \nu/\alpha$). Thus, a fixed value of η_δ defines the parameter on the left-side of this equation.

3. Approximate Solution

The solution of the preceding equations can be obtained by numerically integrating equation (6) and matching this solution with equation (11) through use of the boundary conditions at $\eta = \eta_\delta$. Equation (8) may then be solved through a separate numerical integration. Such a procedure would, however, be somewhat tedious in view of the number of parameters involved (ρ_v/ρ , ν_v/ν , η_δ , Pr), and an approximate solution will instead be considered.

It may readily be verified that series solutions of equations (6), (7), and (8) are of the form

$$f(\eta) = \left(\frac{v}{v_v} \right) \left[\frac{\beta}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{5!} \eta^5 + \dots \right], \quad (13)$$

$$F(\eta) = G_w + \frac{G_w''}{2} (\eta - \gamma)^2 - \frac{1}{2} \frac{G_w G_w''}{3!} (\eta - \gamma)^3 + \dots, \quad (14)$$

$$\Theta(\eta) = 1 - \sigma \eta + \frac{\beta Pr}{2} \frac{\sigma}{4!} \eta^4 + \dots, \quad (15)$$

where equation (14) follows from equations (10) and (11), $G_w'' = G''(0)$, and β and σ are constants. For all practical purposes, it will be necessary to evaluate equation (14) only in the neighborhood of η_δ so as to satisfy the boundary conditions at $\eta = \eta_\delta$. The assumption will now be made that η_δ and $(\eta_\delta - \gamma)$ are sufficiently small such that the preceding equations may be rewritten as

$$f(\eta) = \left(\frac{v}{v_v} \right) \frac{\beta}{2} \eta^2, \quad (16)$$

$$F(\eta) = G_w + \frac{G_w''}{2} (\eta - \gamma)^2, \quad (17)$$

$$\Theta(\eta) = 1 - \sigma \eta. \quad (18)$$

Physically, the neglect of higher-order terms in equation (13) is the same as neglecting acceleration effects within the film, since equation (16) gives $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$. In turn, equation (18) neglects thermal convection within the film, and the resulting temperature profile is linear.

Equations (16), (17) and (18) contain five unknowns (β , γ , σ , G_w , G_w''), and four of these may be evaluated from equations (9b) giving $\sigma = 1/\eta_\delta$ and

$$\beta = \left(\frac{\varrho_v}{\varrho}\right) \left(\frac{\nu_v}{\nu}\right)^2 G_w'', \quad (19a)$$

$$\gamma = \eta_\delta \left(1 - \frac{\varrho_v \nu_v}{\varrho \nu}\right), \quad (19b)$$

$$G_w = \frac{G_w''}{2} \left(\frac{\nu_v}{\nu}\right) \left[1 - \left(\frac{\nu_v}{\nu}\right) \left(\frac{\varrho_v}{\varrho}\right)^2\right] \eta_\delta^2. \quad (19c)$$

The remaining unknown, G_w'' , has been tabulated as a function of G_w by EMMONS and LEIGH [4], and an abbreviated listing of their results is given in Table 1.

Table 1. Values of G_w'' [4]

G_w	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2	5	10
G_w''	0.332	0.369	0.406	0.483	0.563	0.645	0.729	0.945	1.169	2.590	5.049

Now, from equations (16) and (18), equation (12) gives

$$\eta_\delta^3 = \frac{4}{\beta} \left(\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}}\right). \quad (20)$$

Further, for most physical applications ($\varrho_v/\varrho \ll 1$) equation (19c) may be rewritten as

$$\frac{G_w''}{G_w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_v}{\nu}\right) \eta_\delta^2$$

and combining this with equations (19a) and (20)

$$\frac{G_w''}{(G_w'')^{1/3}} = \frac{(4)^{2/3}}{2} \left\{ \left(\frac{\nu}{\nu_v}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_v}\right) \left(\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}}\right) \right] \right\}^{2/3}. \quad (21)$$

Employing Table 1, the quantity G_w'' is completely determined for a given value of the parameter

$$\left(\frac{\nu}{\nu_v}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_v}\right) \left(\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}}\right) \right].$$

Asymptotic expressions may also be obtained for G_w'' . If the right-side of equation (21) is very small, then $G_w \simeq 0$ and

$$G_w'' = 0.332. \quad (22)$$

On the other hand, if the right-side of equation (21) is large, then $G_w \simeq 2 G_w''$ [4] and equation (21) reduces to

$$G_w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\nu_v}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_v}\right) \left(\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}}\right) \right]. \quad (23)$$

4. Results

The results of usual practical importance are the shear stress and heat transfer at the plate surface. Consider first the local shear stress τ , which is given by

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\varrho U_\infty^2 \nu}{\sqrt{\nu_v} U_\infty x} f''(0).$$

From equations (16) and (19a), it is found that

$$\left(\frac{\tau}{\varrho_v U_\infty^2} \right) \sqrt{Re} = G_w'' \quad (24)$$

where Re is the vapor Reynolds number defined as $Re = U_\infty x / \nu_v$.

The shear stress results are illustrated in Figure 2. For small values of the abscissa, a constant value is asymptotically approached given by equation (22). Equation (23) represents the asymptotic result for large values of the abscissa. One may note that since acceleration effects have been neglected the shear stress is constant throughout the film, and the results for τ also apply at the liquid-vapor interface.

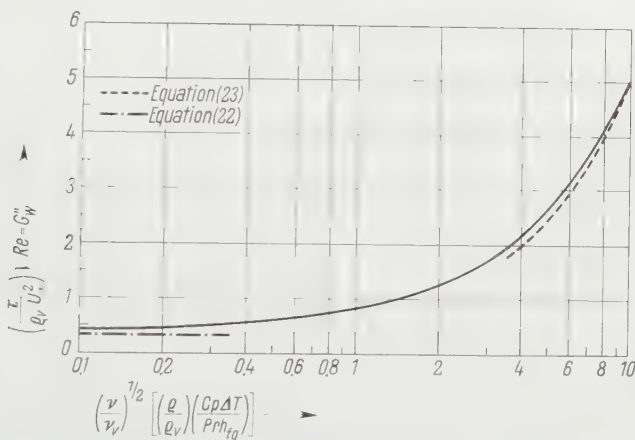


Figure 2
Variation of local shear stress.

With respect to heat transfer at the plate surface, the local heat flux per unit area q is given by

$$q = -k (T_\infty - T_w) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = -k (T_\infty - T_w) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_v x}} \Theta'(0).$$

From equation (18), and writing the result in terms of a local Nusselt number

$$Nu = \frac{q x}{(T_\infty - T_w) k} = \frac{1}{\nu_v} \sqrt{Re}.$$

Combining this with equations (19a) and (20), then

$$Nu \left(\frac{\nu}{\nu_v} \right)^{1/2} = \left(\frac{G_w''}{4} \right)^{1/3} \left\{ \left(\frac{\nu_v}{\nu} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\varrho_v}{\varrho} \right) \left(\frac{Pr h_{fg}}{c_p \Delta T} \right) \right]^{1/3} \right\}. \quad (25)$$

A plot of the Nusselt number is shown in Figure 3. For small values of the abscissa, the asymptotic relation is found from equations (22) and (25) to be

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \left(\frac{\nu}{\nu_v} \right)^{1/2} = 0.436 \left\{ \left(\frac{\nu_v}{\nu} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\varrho_v}{\varrho} \right) \left(\frac{Pr h_{fg}}{c_p \Delta T} \right) \right]^{1/3} \right\}. \quad (26)$$

Upon combining equations (23) and (25)

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} \left(\frac{\nu}{\nu_r} \right)^{1/2} = 0.5, \quad (27)$$

which is the asymptotic expression for large values of the abscissa.

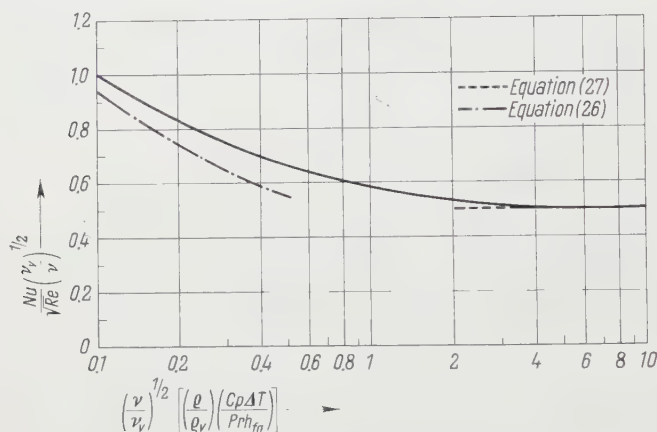


Figure 3
Variation of local Nusselt number.

5. Discussion of Results

It will be recalled that higher-order terms have been neglected in equation (13) and that this corresponds to negligible acceleration effects within the liquid film. The neglect of acceleration terms is therefore permissible if the condition

$$\frac{\beta^2}{5!} \eta_\delta^5 \ll \beta \eta_\delta^2$$

is satisfied. From equation (20), this may be rewritten as

$$\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}} \ll 30.$$

In a similar manner, thermal convection within the film will be negligible only higher-order terms are small in equation (15), and this gives

$$\frac{c_p \Delta T}{h_{fg}} \ll 12.$$

A final requirement follows from equation (14) to be

$$\frac{c_p \Delta T}{Pr h_{fg}} \ll 3.$$

Therefore, the present analysis is applicable if the last two conditions are satisfied.

Admittedly, the present results neglect any ripple effects within the liquid film, and this could be an important factor in the actual physical process. Nevertheless, the analysis gives an insight into the physical phenomena involved, and illustrates the effect of the various parameters.

REFERENCES

- [1] W. NUSSELT, Z. Ver. deutsch. Ing., 60, 541, 569 (1916).
- [2] E. M. SPARROW and J. L. GREGG, Trans. ASME, 81 (C), 13–18 (1959).
- [3] W. M. ROHSENOW, J. H. WEBER, and A. T. LING, Trans. ASME, 78, 1637–1643 (1956).
- [4] H. W. EMMONS and D. C. LEIGH, *Tabulation of the Blasius Function with Blowing and Suction*, Fluid Motion Sub-Committee, Aeronaut. Res. Coun., Report No. FM 1915 (1953).

Zusammenfassung

Die laminare Strömung von gesättigtem Dampf über eine gekühlte ebene Fläche wird untersucht für den Fall der Kondensation eines Films an der Oberfläche. Es wird angenommen, dass keine Gravitationskraft vorliegt und dass die Bewegung des Kondensats lediglich durch die Reibung am strömenden Dampf hervorgerufen wird. Ergebnisse für die Scherkraft und die Wärmeübertragung an der Oberfläche werden mitgeteilt. Die wesentlichen Rechenergebnisse konnten in zwei Diagrammen zusammengefasst werden: Figur 2 gibt die zu erwartenden Schubspannungen wieder, Figur 3 den Wärmeübergang.

(Received: April 21, 1960).

Signalfluss und Analogiedarstellung der Neutronenökonomie beim Abbrand von Reaktorbrennstoffen

VON WALTER HÄLG, Zürich¹⁾.

1. Allgemeine Bemerkungen

Bei sämtlichen Untersuchungen, welche die Gestehungskosten der Atomenergie zum Gegenstand haben, bildet die Frage nach der ökonomischen Verwendung der im Reaktor vorhandenen Neutronen eine ausschlaggebende Rolle. Jedes Neutron, welches aus dem Reaktorkern entweicht oder welches nicht zur Einleitung einer Kernspaltung oder zur Umwandlung von nichtspaltbarem Stoff in spaltbare Kerne Verwendung findet, stellt ein Ausgabenposten in der Bilanz dar. LEWIS²⁾ hat verschiedentlich gezeigt, dass es zweckmässig ist, die Neutronenbilanz der Kernbrennstoffe von derjenigen der übrigen Reaktorbaustoffe einschliesslich Leckanteile separat zu betrachten. Man erreicht dadurch eine weitgehend universelle Behandlungsweise der verschiedenen Reaktorkonzeptionen, weil sich der komplexe zeitliche Ablauf von Neutronenproduktion und Neutronenkonsumation im Spaltstoff gleichartig darstellt.

¹⁾ ETH und Eidg. Institut für Reaktorforschung, Würenlingen.

²⁾ Vergleiche zum Beispiel W. B. LEWIS, *Low cost fuelling without recycling*, AECL, Nr. 382, oder AECL Nr. 651.

LEWIS definiert für den Einheitsneutronenfluss einen Neutronenüberschuss $\sigma_e(t)$ pro ursprünglich vorhandenem spaltbarem Kern $N_{fiss}(0)$, für ein anfängliches Gemisch aus U^{235} und U^{238} zum Beispiel

$$\sigma_e(t) = \frac{1}{N_{fiss}(0)} \left[\sum_i N_i \sigma_i \eta_i \varepsilon p - \left(\sum_i N_i \sigma_i + (N \sigma)_{28+40+26+42+y} \right) \right]. \quad (1.1)$$

Dabei bedeuten N_k die Konzentrationen der Atome eines der Figur 1.1 entsprechenden Spaltstoffzyklus³⁾.

Die Summation erstreckt sich über sämtliche mit thermischen Neutronen spaltbaren Kerne, welche zum gewählten Zyklus gehören, so für den mit U^{235} gestarteten Uran-Plutonium-Zyklus über $i = 25, 49, 41$ und beim Th^{232} - U^{233} -Zyklus über $j = 23, 25$.

Die Wirkungsquerschnitte⁴⁾ sind dem speziellen Neutronenspektrum anzupassen; sie können im allgemeinen Fall irradiationsabhängige Grössen sein. Der erste Summand entspricht der durch den Spaltstoff erzeugten Neutronenzahl, während der zweite Term die im Spaltstoff absorbierten Neutronen berücksichtigt. Zur Vereinfachung wurde eine abgekürzte, für sich selbst sprechende Schreibweise⁵⁾ eingeführt.

Die Definition (1.1) enthält, wenn man das Neutronenspektrum des Reaktors als gegeben betrachtet, ausser p keine Grössen, welche durch die Konstruktion des Reaktors beeinflusst werden, sondern nur Materialkonstanten des Spaltstoffes. Ist der Wert von σ_e positiv, dann muss in einem kritischen System dieser Überschuss durch spaltstofffremde Absorption $(N \sigma)_r$ und Oberflächenverluste $(N \sigma)_{L+\tau}$ kompensiert werden.

Die spaltstofffremde Absorption enthält auch den in den Regelorganen kompensierten Anteil des Neutronenüberschusses. Weil nun aber für einen bestimmten Reaktor die Kompensationsterme durch die Konstruktion gegeben sind, folgt aus der Kenntnis von σ_e unmittelbar die maximal mögliche Betriebsdauer eines Reaktors durch

$$N_{fiss}(0) \sigma_e = (N \sigma)_r + (N \sigma)_{L+\tau}. \quad (1.2)$$

2. Differentialgleichungen der Atomkonzentrationen

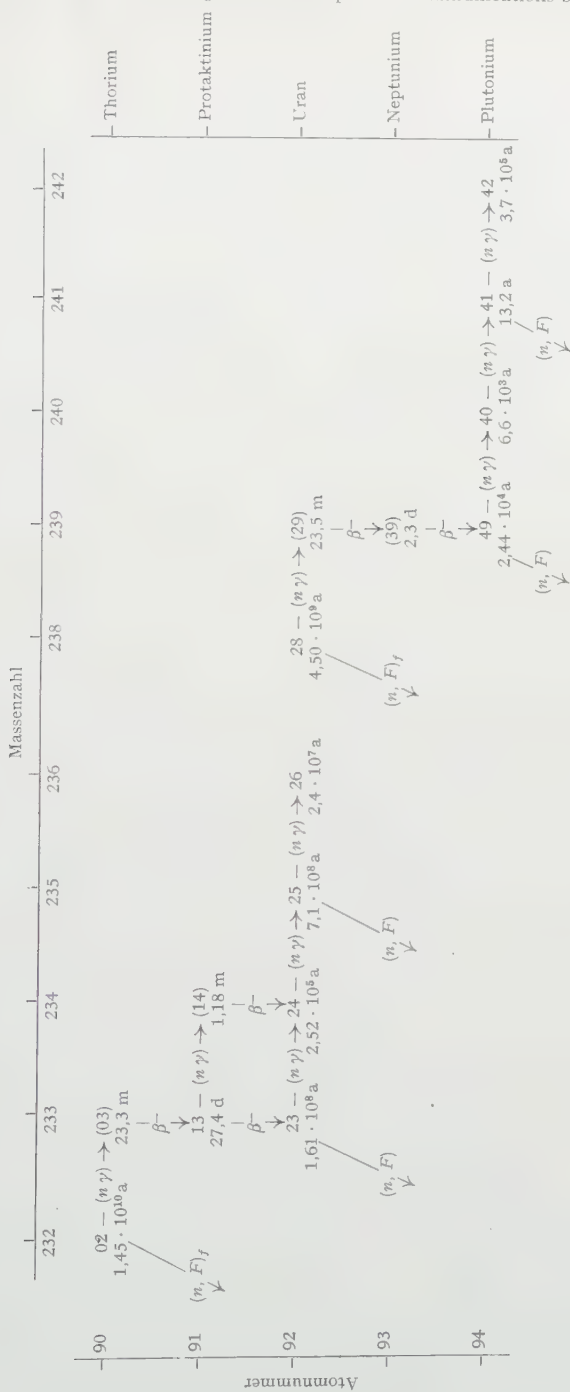
Zur Berechnung von $\sigma_e(t)$ ist die Kenntnis der Konzentrationen der Atomkerne des Spaltstoffzyklus notwendig. Die entsprechenden Differentialgleichungen für den mit U^{235} gestarteten Pu-Zyklus wie auch für den Th^{232} - U^{233} -Zyklus sind in Figur 2.1 und 2.2 zusammengestellt.

$\sigma_{02}^*, \sigma_8^*, \sigma_{24}^*$ und σ_{24}^* bedeuten dabei effektive Absorptionsquerschnitte, welche neben der thermischen Absorption auch die Resonanzprozesse der betreffenden Kerne berücksichtigen. Solche Resonanzeinfänge können alle von verschiedenen spaltbaren Kernen erzeugte Neutronen erleiden, sofern sie auf die entsprechende Resonanzenergie abgebremst sind. Daher enthält zum Beispiel $N_8 \sigma_8$ neben einem thermischen Anteil $N_8 \sigma_8$ noch einen Zusatzterm $\sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{8i}$, wobei \mathfrak{P}_{8i} die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass ein schnelles Spaltneutron des i -ten

³⁾ Die Indizes entsprechen der üblichen Kennzeichnung, wobei anstelle der Doppelindizes einfache verwendet werden, sofern Missverständnisse ausgeschlossen sind.

⁴⁾ Wenn keine besondere Bezeichnung angegeben ist, beziehen sich die Symbole auf die Absorptionsquerschnitte.

⁵⁾ y symbolisiert die Spaltprodukte.



Figur 1.1
Reaktionsschema für Th-U- und U-Pu-Zyklus.

(U)-Transformation für φ und \mathfrak{P} konstant

$$\begin{aligned}
\bar{n}_5 &= \frac{N_5(0)}{s + \sigma_5 \varphi} \\
\bar{n}_6 &= \frac{1}{s + \sigma_6 \varphi} \cdot \frac{\alpha_5}{1 + \alpha_5} \cdot \varphi \sigma_5 \\
\bar{n}_8 &= \frac{1}{s + \sigma_8 \varphi} \left[N_8(0) - \varphi \sum_i n_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{8i} \right] \\
\bar{n}_9 &= \frac{1}{s + \sigma_9 \varphi} \left[N_9(0) + \bar{n}_8 \sigma_8 \varphi + \varphi \sum_i \bar{n}_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{9i} \right] \\
\bar{w}_0 &= \frac{1}{s + \sigma_0 \varphi} \left[\frac{\alpha_9}{\bar{n}_9 \sigma_9} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_9} \cdot \varphi - \varphi \sum_i \bar{n}_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{0i} \right] \\
\bar{w}_1 &= \frac{1}{s + \sigma_1 \varphi} \left[\bar{n}_0 \sigma_0 \varphi + \varphi \sum_i \bar{n}_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{1i} \right] \\
\bar{w}_2 &= \frac{1}{s + \sigma_2 \varphi} \cdot \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \cdot \bar{n}_1 \sigma_1 \varphi \\
n_{y,p} &= \frac{1}{s + \sigma_{y,p} \varphi} \sum_i y'_{i,p} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_i} \cdot \bar{n}_i \sigma_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sigma_c}{\sigma_f} \\
\sigma_c &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} \sigma \\
N_8 \sigma_8^* &= N_8 \sigma_8 + \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{8i} \\
\mathfrak{P}_{8i} &= (1 - p_8) e^{-B^* \tau_{8i}} \\
N_0 \sigma_0^* &= N_0 \sigma_0 + \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{0i}(t) \\
\mathfrak{P}_{0,i}(t) &= N_0(t) \mathfrak{P}_{0,i}^*(t) \\
\text{wenn } \mathfrak{P}_{0,i}^*(t) &= \text{const} = \mathfrak{P}_{0,i}^* \text{ und } \varphi \text{ konstant} \\
\text{wenn } \mathfrak{P}_{0,i}(t) &= \mathfrak{P}_{0i} = \varepsilon p_8 \frac{(1 - p_8)}{(1 - p_8)} e^{-B^* \tau_{0i}}(t) \\
\frac{dN_5}{dt} &= -N_5 \sigma_5 \varphi \\
\frac{dN_6}{dt} &= N_6 \sigma_6 \varphi - N_6 \sigma_6 \varphi \\
\frac{dN_8}{dt} &= -N_8 \sigma_8^* \varphi \\
\frac{dN_9}{dt} &= -N_9 \sigma_9 \varphi + N_8 \sigma_8^* \varphi \\
\frac{dN_0}{dt} &= N_9 \sigma_9 \varphi - N_0 \sigma_0^* \varphi \\
N_0(t) &= \frac{\alpha_9}{1 + \alpha_9} \sigma_9 \varphi \int_0^t N_0 dt - \sigma_0 \varphi \int_0^t N_0 dt \\
&\quad - \varphi \int_0^t \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{0i}^* dt \rightarrow \\
\frac{dN_1}{dt} &= -N_1 \sigma_1 \varphi + N_0 \sigma_0^* \varphi \\
N_1(t) &= -\varphi \sigma_1 \int_0^t N_1 dt + \sigma_0 \varphi \int_0^t N_0 dt \\
&\quad + \varphi \int_0^t N_0 \sum_i N_i \sigma_i \eta_i P_{0i}^* dt \\
\frac{dN_2}{dt} &= N_1 \sigma_{c,1} \varphi - N_2 \sigma_2 \varphi \\
\frac{dN_{y,p}}{dt} &= \sum_i y_{i,p} \sigma_{Fi} N_i \varphi + y_{8,p} \frac{\varepsilon_8 - 1}{y_8 - 1} \\
&\quad \times \sum_i N_i \sigma_i \sigma_{Fi} \varphi - N_{y,p} \sigma_{y,p} \varphi \\
\gamma(t) &= \frac{1}{\sum_i N_i \sigma_i} \left[N_8 \sigma_8 + N_0 \sigma_0 \right. \\
&\quad \left. + \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{8i} + N_0 \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{0i}^* \right]
\end{aligned}$$

Figur 2.1

Differentialgleichungen für die Atomkonzentrationen des U-Pu-Zyklus.

(Q)-Transformation für φ und \mathfrak{P} konstant

$$n_{02} = \frac{1}{s + \sigma_{02} \varphi} \left[N_{02}(0) - \varphi \sum_j \bar{n}_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{2,j} \right]$$

$$\bar{n}_{13} = \frac{\varphi}{s + \sigma_{13} \varphi + \lambda_{13}} \left[\bar{n}_{02} \sigma_{02} + \sum_j \bar{n}_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{2,j} \right]$$

$$\bar{n}_{23} = \frac{1}{s + \sigma_{23} \varphi} \cdot \left[N_{23}(0) + \bar{n}_{13} \lambda_{13} \right]$$

$$\bar{n}_{24} = \frac{\varphi}{s + \sigma_{24} \varphi}$$

$$< \left[\bar{n}_{23} \sigma_{23} \frac{\alpha_{23}}{1 + \alpha_{23}} + \bar{n}_{13} \sigma_{13} - \sum_j \bar{n}_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{4,j} \right]$$

$$\bar{n}_{25} = \frac{1}{s + \sigma_{25} \varphi} \left[N_{25}(0) + \varphi \sum_j \bar{n}_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{4,j} + \bar{n}_{24} \sigma_{24} \varphi \right]$$

$$\bar{n}_{26} = \frac{q}{s + \sigma_{26} \varphi} \cdot \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{25}} \cdot \frac{\sigma_{25}}{\sigma_{26}} \cdot \frac{\eta_{25}}{\eta_{26}}$$

$$\bar{n}_{yp} = \frac{\varphi}{s + \sigma_{yp} \varphi} \cdot \frac{1}{\sum_j \bar{n}_j \rho} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_j} \cdot \frac{\eta_j}{\sigma_j}$$

$$N_{02} \sigma_{02}^* = N_{02} \sigma_{02} + \sum_j N_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{2,j}$$

$$\mathfrak{P}_{2,j} = (1 - p_2) \varepsilon e^{-B^2 \tau_{2,j}}$$

$$N_{24} \sigma_{24}^* = N_{24} \sigma_{24} + \sum_j N_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{4,j}(t)$$

$$\mathfrak{P}_{4,j}(t) = N_{24}(t) \mathfrak{P}_{4,j}^*(t)$$

wenn $\mathfrak{P}_{4,j}^*(t) = \mathfrak{P}_{4,j}^*$ und φ const
wenn

$$\mathfrak{P}_{4,j}(t) = \mathfrak{P}_{4,j} = \varepsilon \rho_{02} \frac{e^{B^2 \tau_{4,j}}}{(1 - p_{24})} \rightarrow$$

$$\frac{dN_{02}}{dt} = -N_{02} \sigma_{02}^* \varphi$$

$$\frac{dN_{13}}{dt} = N_{02} \sigma_{02}^* \varphi - N_{13} (\sigma_{c,13} \varphi + \lambda_{13})$$

$$\frac{dN_{23}}{dt} = N_{13} \lambda_{13} - N_{23} \sigma_{23} \varphi$$

$$\frac{dN_{24}}{dt} = N_{13} \sigma_{13} \varphi + N_{23} \sigma_{c,23} \varphi - N_{24} \sigma_{24}^* \varphi$$

$$N_{24}(t) = \sigma_{13} \varphi \int_0^t N_{13} dt + \frac{\alpha_{23}}{1 + \alpha_{23}} \sigma_{23} \varphi$$

$$\times \int_0^t N_{23} dt - \sigma_{24} \varphi \int_0^t N_{24} dt - \varphi \int_0^t N_{24} \sum_j N_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{4,j}^* dt \rightarrow$$

$$\frac{dN_{25}}{dt} = N_{24} \sigma_{24}^* \varphi - N_{25} \sigma_{25} \varphi$$

$$N_{25}(t) = \sigma_{24} \varphi \int_0^t N_{24} dt + \varphi \int_0^t N_{24} \sum_j N_j \sigma_j \eta_j \mathfrak{P}_{4,j}^* dt - \sigma_{25} \varphi \int_0^t N_{25} dt$$

$$\frac{dN_{23}}{dt} = N_{25} \sigma_{c,25} \varphi - N_{26} \sigma_{26} \varphi$$

$$\frac{dN_{yp}}{dt} = \sum_j \bar{n}_j \rho \cdot \frac{1}{1 - \alpha_j} \cdot \frac{N_j \sigma_{yp} \varphi}{\sigma_j}$$

Figur 2.2

Differentialgleichungen für die Atomkonzentrationen des Th-U-Zyklus.

spaltbaren Kerns die Resonanzenergie des U^{238} -Absorbers erreicht und dort auch eingefangen wird⁶⁾).

Für natürliche oder nur schwach angereicherte Uransysteme bleibt $N_8(t)$ nahezu konstant, so dass auch \mathfrak{P}_{8i} als konstant angesehen werden darf. Dasselbe gilt für Systeme mit grossem Anfangsgehalt an Th^{232} .

Anders verhalten sich Pu^{240} und U^{234} , deren Konzentrationen zeitabhängige Funktionen darstellen, so dass auch die entsprechenden \mathfrak{P} zeitlich variabel sind. In erster Näherung wird dieser Effekt dadurch berücksichtigt, dass man \mathfrak{P} proportional zu den entsprechenden Atomkonzentrationen setzt, wobei ein eventuell zeitlich veränderliches Resonanzintegral, welches in die Ausdrücke für $p_0(t)$ resp. $p_{24}(t)$ eingeht, auch in den nunmehr nicht mehr linearen Differentialgleichungen noch unberücksichtigt bleibt.

Wir schreiben also zum Beispiel

$$N_0 \sigma_0^* = N_0 \sigma_0 + \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_{0i}(t) \approx N_0 \sigma_0 + N_0(t) \sum_i N_i \sigma_i \eta_i \mathfrak{P}_i^*(t). \quad (2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{P}_i^*(t)$ ist auf ein N_0 -Atom bezogen und bleibt, sofern man die Effekte im Resonanzintegral unberücksichtigt lässt, zeitlich konstant, das heisst

$$\mathfrak{P}_i^*(t) = \mathfrak{P}_i^* - \varepsilon p_0^* e^{-B^2 \tau_{0i}}, \quad (2.2)$$

wobei der zeitliche Mittelwert $(1 - p_0)^*$ ebenfalls pro N_0 -Atom gegeben sei.

Die gewählte Darstellung erlaubt, für jeden Brutstoff⁷⁾ (b) einen zeitlich variablen Spaltstoffregenerationsfaktor $\gamma_b(t)$ zu bestimmen.

$$\gamma_b(t) = \frac{\text{pro Zeiteinheit gebildeter Spaltstoff}}{\text{pro Zeiteinheit verbrauchter Spaltstoff}} = \frac{N_b(t) \sigma_b^*(t)}{\sum_i N_i(t) \sigma_i}. \quad (2.3)$$

Sind mehrere Brutstoffe vorhanden, so sei der Regenerationsfaktor des Zyklus gegeben durch

$$\gamma(t) = \sum_b \gamma_b(t). \quad (2.4)$$

Die üblicherweise verwendeten, ursprünglichen Regenerationsfaktoren (initial conversion ratio, initial fuel regeneration factor) ergeben sich aus den Anfangswerten $\gamma_b(0)$ resp. $\gamma(0)$.

Der allgemeine Ausdruck $\gamma(i)$ für den U-Pu-Zyklus ist in der Formelzusammenstellung Figur 2.1 enthalten.

Die Spaltprodukte sind durch drei Pseudoprodukte N_{yjp} ; $p = 1, 2, 3$ gemäss der Darstellungsweise nach HURST⁸⁾ beschrieben, wobei die sich rasch aufbauenden Produkte mit grossen Einfangsquerschnitten wie Xe und Sm separat berücksichtigt worden sind⁹⁾.

3. Signalflussdiagramme

Lösungen der im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Differentialgleichungssysteme können numerisch mit Digitalrechenmaschinen erhalten werden. Solche

⁶⁾ $(1 - p_8)$.

⁷⁾ Der Brutstoff ist eine Substanz, welche durch Absorption von thermischen oder Resonanzneutronen auf neues, spaltbares Material führt, also zum Beispiel Th^{232} , U^{238} , U^{234} , Pu^{240} .

⁸⁾ D. G. HURST, *Calculated Cross-Sections of Irradiated Fission Products*, AECL Nr. 346 (1956).

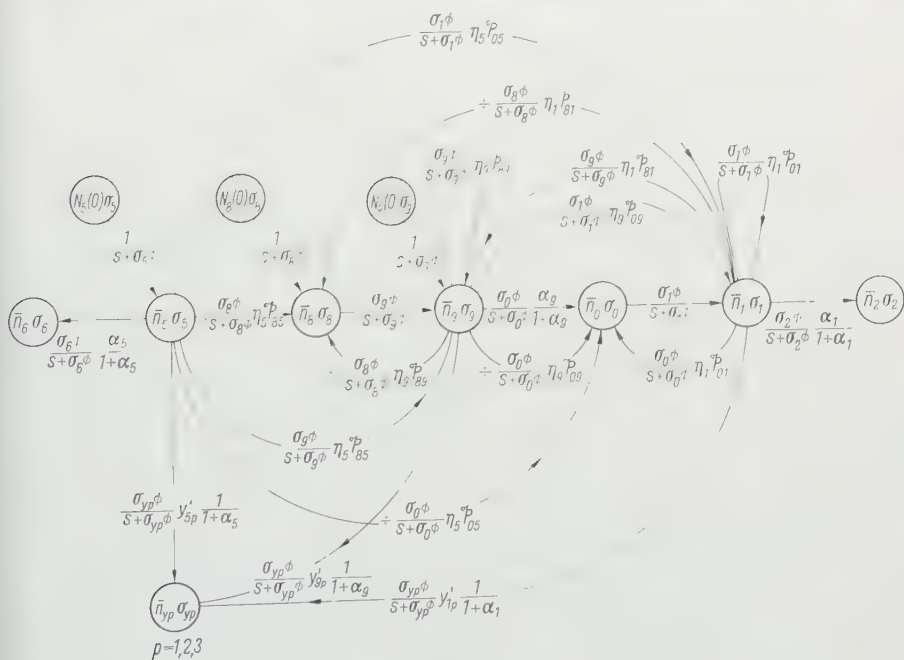
⁹⁾ Vergleiche auch AECL Nr. 651.

sind beispielsweise in AECL Nr. 651 wiedergegeben, wobei das dort verwendete Gleichungssystem für den U-Pu-Zyklus geringfügige Unterschiede gegenüber demjenigen der Figur 2.1 aufweist.

Es ist aber auch möglich, die Differentialgleichungen näherungsweise zu linearisieren und das daraus durch Laplacetransformation erhaltene algebraische lineare Gleichungssystem entweder mit klassischen Methoden oder mittels eines Signalflussdiagramms¹⁰⁾ aufzulösen. Die letztere Methode ist besonders dann nützlich, wenn man die Auflösung nicht durchzuführen gedenkt, sondern ein Kriterium zur Vereinfachung des Gleichungssystems sucht. Der Rechenaufwand wird nämlich, besonders bei gekoppelten U-Th-Pu-Zyklen, ausserordentlich umfangreich, so dass es wünschenswert ist, weniger bedeutsame Rückwirkungen von erst nach langer Bestrahlungsdauer auftretenden Atomkernen zu eliminieren.

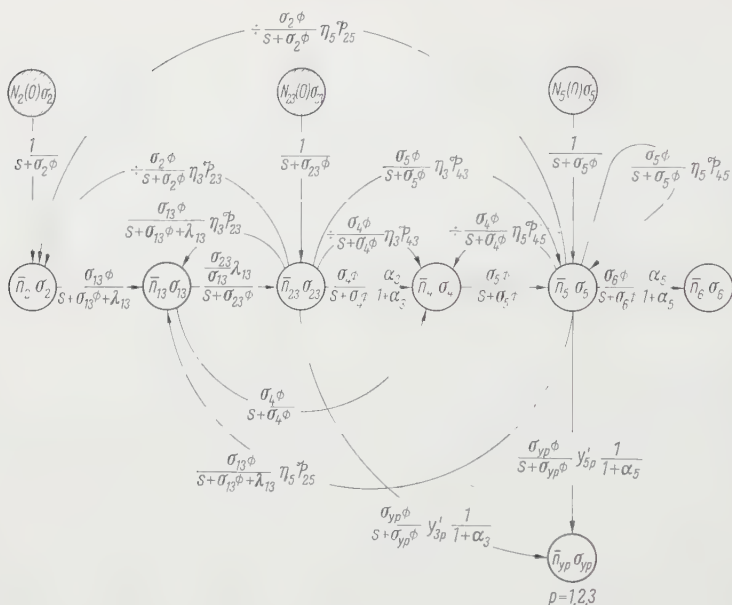
4. Auswertung durch Analogierechner

Die Signalflussdarstellung legt eine Auflösung der Gleichungssysteme mittels Analogierechengeräten nahe, obwohl selbstverständlich für diese Auswertung die Erstellung eines solchen Diagramms keine Notwendigkeit bildet. Im allgemeinen wird eine Analogierechenmaschine mit Multiplikationseinheiten ausgerüstet sein.



Figur 3.1
Signalfluss für Uran-Plutonium-Zyklus

²⁰⁾ Über die Erstellung des Signalflussdiagramms sowie die Regeln zu dessen Auflösung vergleiche zum Beispiel S. J. MASON, *Feedback-Theory; Further Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. IRE 44 (7), 920 (1956).



Figur 3.2

Signalfluss für Thorium-Uran-Zyklus.

so dass auch die im Signalfluss nicht zur Darstellung gelangenden nichtlinearen Terme mit berücksichtigt werden können.

Figur 4.1 stellt das Analogieschaltbild des U-Pu-Zyklus dar, nach welchem mit der am Institut für Atomenergie in Kjeller, Norwegen, vorhandenen Maschine¹¹⁾ die nachfolgenden Resultate erhalten wurden.

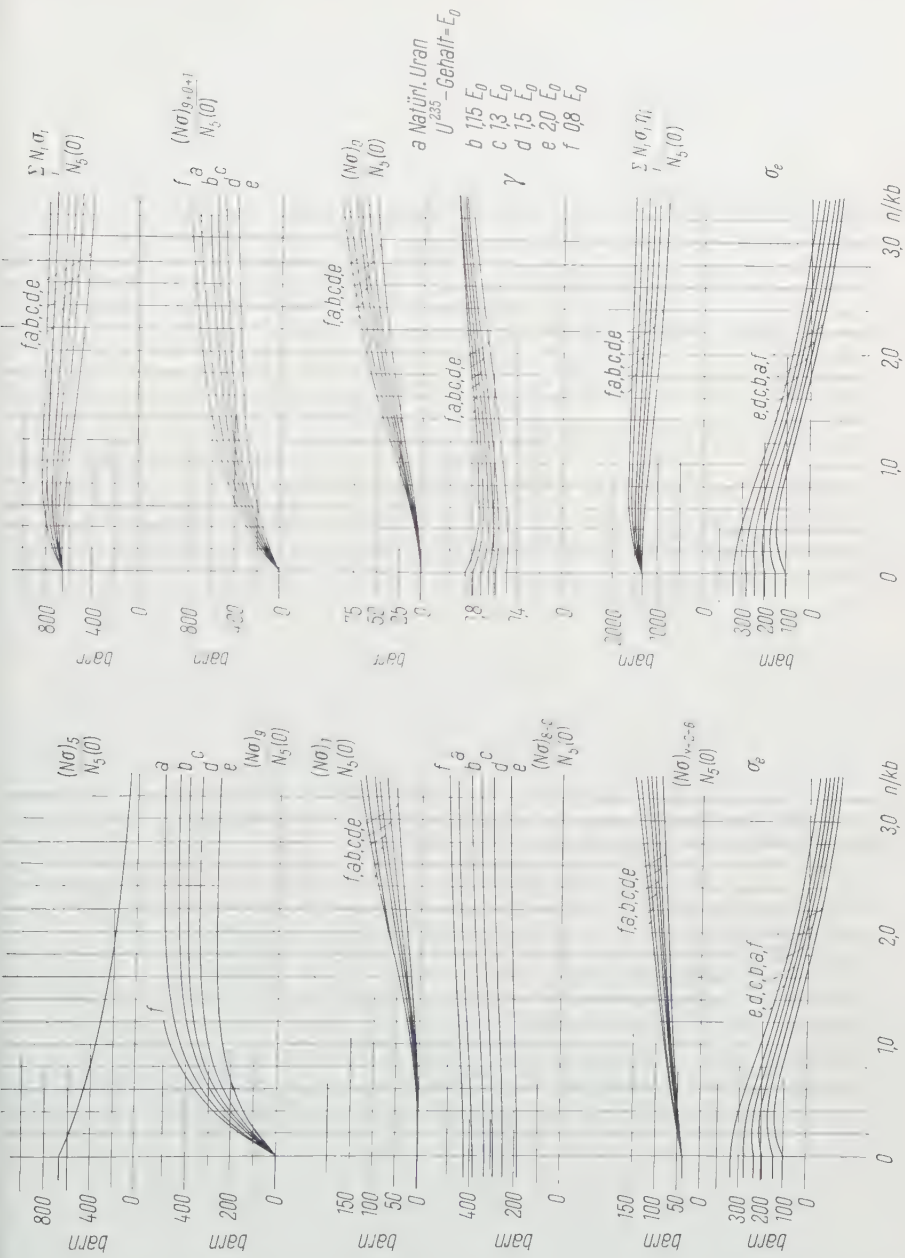
Obwohl die Differentialgleichungen (Figur 2.1) geringe Abweichungen gegenüber den von LEWIS verwendeten aufweisen¹²⁾, ergibt eine Gegenüberstellung (Figur 4.2) einiger in AECL Nr. 651 wiedergegebenen Resultate und jenen eines druckenden Digitalvoltmeters einen Hinweis auf die Genauigkeit unserer Analogie-rechnungen.

In Figur 4.3 sind Registrierkurven für verschiedene Anreicherungen des ursprünglichen Spaltstoffes als Funktion der Irradiation (Neutronenfluss \times Zeit) wiedergegeben. Dabei sei nochmals bemerkt, dass alle Grössen mit Ausnahme des Regenerationsfaktors pro ursprüngliches spaltbares Atom angegeben sind. Dies hat man bei Vergleichen, besonders bei der Bestimmung der maximalen Reaktorbetriebsdauer, zu berücksichtigen. Die Terme für Fremddabsorption und Oberflächenverluste sind ebenfalls in den entsprechenden Einheiten einzuführen.

¹¹⁾ PACE 231 R (30 Integratoren, 45 Summationsverstärker, 100 Potentiometer, 4 Mehrfach-Multiplikatoren).

Ich danke auch an dieser Stelle Herrn B. WINTHER sehr für die mir gebotene Gelegenheit, die Maschine zu benutzen und für seine tatkräftige Hilfe bei meinen Berechnungen.

¹²⁾ LEWIS verwendet einen mit der Irradiation veränderlichen Wirkungsquerschnitt für Plutonium.



Figur 4.3
Uran-Plutonium-Zyklus für verschiedenen U^{235} -Gehalt.

Die Kurve des Regenerationsfaktors γ durchläuft ein Minimum. Dieses tritt in erster Näherung bei derjenigen Irradiation auf, wo die mit dem Wirkungsquerschnitt multiplizierte Zerfallsrate von U^{235} gerade denselben Wert des entsprechenden Produktes bei Pu^{239} annimmt.

Summary

The Laplace transforms of the linearized equations for long term irradiation of reactor fuel are arranged as a signal flow diagram which can either be used to solve the system or will make clear the correlation of important terms.

Solutions for the Uranium-Plutonium cycle obtained with an analog computer are compared with Canadian results from digital evaluations. A general definition for the irradiation dependent fuel regeneration factor is introduced.

(Eingegangen; 16. Mai bzw. 15. Juli 1960).

Varia – Miscellaneous – Divers

2nd ILMAC from 15th to 20th October 1962

According to the great success of the first ILMAC, International Congress and Exhibition of Laboratory, Measurement and Automation Techniques in Chemistry, which took place in November 1959 in Basle, the organizing committee decided unanimously to repeat that event. The second ILMAC will be accomplished from 15th to 20th October 1962 again in the building of *Swiss Industries Fair* in Basle.

M. TROTTMANN

Journal of Mathematical Analysis and Applications. The first number of the *Journal of Mathematical Analysis and Applications* has been released by Academic Press Inc., New York. Volume 1, Number 1, contains contributions by N. LEVINSON, *A Nonlinear Volterra Equation Arising in the Theory of Superfluidity*; J. M. RICHARDSON, *The Hydrodynamical Equations of the One Component System Derived from Nonequilibrium Statistical Mechanics*; H. OSBORN, *The Dirichlet Function. I*; J. G. KEMENY, *Ergodic Theorem for General Functions*; R. P. BOAS, JR., *Inequalities for Monotonic Series*; A. SCHILD, *On the Radiation Emitted by an Accelerated Point Charge*.

The Editor of the *Journal of Mathematical Analysis and Applications* is Dr. R. B. BELLMAN, the RAND Corporation, 1700 Main Street, Santa Monica, California. Volume 1 will consist of four issues, to be released in 1960 at \$16.—. Subscription orders should be sent to the Publishers, Academic Press Inc., New York 3, or London, S. W. 1, England.

L. HENLEI

Berechnung von Beulwerten mit Hilfe von Mehrstellenoperatoren¹⁾

Von PETER LÄUCHLI und HEINZ WALDBURGER, Zürich²⁾

1. Problemstellung

Die Differentialgleichung für das elastische Beulen der isotropen ebenen Platte [1]³⁾

$$\Delta \Delta u = -\frac{d}{D} (\sigma_x u_{xx} - 2 \tau_{xy} u_{xy} + \sigma_y u_{yy}), \quad (1)$$

wobei d = Plattenstärke und D = Plattensteifigkeit, reduziert sich für den Fall des Schub-Beulens auf die folgende Form [2]:

$$\Delta \Delta u = -\frac{d}{D} 2 \tau_{xy} u_{xy}. \quad (2)$$

Mit

$$\tau_{xy} = \tau_{kr} = k \sigma_E = k \pi^2 D / db^2$$

erhalten wir

$$\Delta \Delta u - 2 k \frac{\pi^2}{b^2} u_{xy} = 0 \quad (3)$$

(σ_E = Eulersche Knickspannung eines Plattenstreifens der Breite 1 und der Länge b). Der Beulwert k vergleicht die Beulsicherheit der Platte mit derjenigen eines entsprechenden Plattenstreifens.

Zur numerischen Behandlung des durch Gleichung (3) gegebenen Eigenwertproblems (der erste Eigenwert $2 k \pi^2 / b^2$ entspricht dem gesuchten Beulwert k , der zugehörige Eigenvektor der Beulfläche) wählen wir ein verbessertes Differenzenverfahren (Mehrstellenverfahren [3]), welches unser Problem in ein allgemeines Matrix-Eigenwertproblem

$$(A - \lambda B) u = 0 \quad (4)$$

überführt.

¹⁾ Die vorliegende Arbeit wurde ermöglicht durch die Schweizerische Volkswirtschaftsstiftung.

Die Verfasser sind dieser Institution zu bestem Dank verpflichtet.

²⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 454.

Die Differenzen-Operatoren OP_A und OP_B , welche die Matrizen A und B erzeugen, werden derart aus den Differentialausdrücken hergeleitet, dass in deren Entwicklung nach dem Taylorschen Satz u und die partiellen Ableitungen von u bis zu Gliedern möglichst hoher Ordnung verschwinden. Dabei wird es uns gelingen, einen dem Mehrstellenverfahren entsprechenden höheren Taylorabgleich zu erhalten, ohne indessen gewisse Ableitungen als neue Unbekannte einführen zu müssen.

2. Herleitung der Operatoren

Wir wählen als OP_A den nachstehenden von COLLATZ [3] gegebenen Ausdruck für $\Delta\Delta u$ in einem quadratischen Gitter:

$$(OP_A)u = \begin{pmatrix} & 1 & & 1 & & 1 \\ & | & & | & & | \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ | & | & | & | & | \\ 1 & -10 & 36 & -10 & 1 \\ | & | & | & | & | \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ & | & & | & & | \\ & 1 & & 1 & & 1 \end{pmatrix} u = \frac{1}{2} h^4 \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \Delta\Delta u + \frac{h^8}{240} (\dots) \quad (5)$$

und bestimmen eine dazu passende Approximation von u_{xy} durch einen Differenzenausdruck, genauer einen Differenzenoperator OP'_B derart, dass

$$\frac{1}{2} h^4 \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} u_{xy} = (OP'_B) u + h^8 (\dots). \quad (6)$$

Dadurch wird erreicht, dass beim Ersetzen des Eigenwertproblems $\Delta\Delta u = \lambda' u$ durch ein Differenzengleichungssystem die Abbrechfehler der beiden Seiten der Eigenwertgleichung von derselben Ordnung sind, nämlich $\sim h^8$.

Zur Herleitung von OP'_B drücken wir zunächst den Ausdruck

$$S_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} u_{xy}$$

durch u_{xy} und seine partiellen Ableitungen im Sternmittelpunkt aus; man findet

$$S_1 = 6 u_{xy} + h^2 (u_{xx} + u_{yy})_{xy} + h^4 (\dots),$$

also

$$\frac{1}{2} h^4 \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} u_{xy} = 3 h^4 u_{xy} + \frac{1}{2} h^6 (u_{xx} + u_{yy})_{xy} + h^8 (\dots). \quad (7)$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u = 4 h^2 u_{xy} + \frac{2}{3} h^4 (u_{xx} + u_{yy})_{xy} + h^6 (\dots), \quad (8)$$

so dass mit

$$OP_B = \frac{3}{4} h^2 \begin{pmatrix} -0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in der Tat die Beziehung (6) besteht. Damit wird nun

$$(OP_A) u - \lambda' (OP'_B) u = \frac{1}{2} h^4 \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} (AAu - \lambda' u_{xy}) + h^8 (\dots), \quad (9)$$

so dass das gestellte Eigenwertproblem (3) mit $\lambda' = 2 k \pi^2 / b^2$ bis auf Fehler der Ordnung h^4 durch das algebraische Eigenwertproblem

$$(OP_A) u = \lambda' (OP'_B) u \quad (10)$$

ersetzt werden kann, welches von der Form (4) ist.

Es ist allerdings etwas bequemer, statt des Operators OP'_B den Operator

$$OP_B = \frac{4}{3 h^2} OP'_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

einzuführen und das Eigenwertproblem

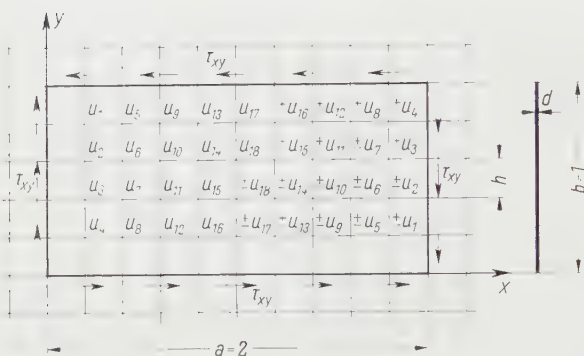
$$(OP_A) u = \lambda (OP_B) u \quad (10')$$

zu lösen; die Beulwerte k stehen dann nach (3) mit den λ in der Beziehung

$$k = \frac{2}{3 \pi^2} \frac{b^2}{h^2} \lambda. \quad (12)$$

Die Operatoren OP_A und OP_B für die Matrizen A und B sind nur dann in der in Gleichungen (5) und (11) angegebenen Form gültig, wenn alle beteiligten Punkte innerhalb des Gebietes liegen. Ihre Anpassung an die Randbedingungen sowie die Aufstellung der Matrizen sind anhand des nachstehenden Beispiels ausführlich beschrieben.

3. Beispiel



Figur 1

Rechteckige Platte mit Netz.

Zur Berechnung des Beulwertes k der Platte mit den Seiten $a=2$ und $b=1$ legen wir ein quadratisches Netz mit der Maschenweite $h=0,2$ derart über die Platte, dass das Gitter sich auch mit dem Rand der Platte deckt. Die Platte sei an allen Rändern frei drehbar (gelenkig) gelagert, was den folgenden Randbedingungen entspricht [4]:

$$\begin{aligned} u &= u_{xx} = 0 & \text{für } x=0 \text{ und } x=a, \\ u &= u_{yy} = 0 & \text{für } y=0 \text{ und } y=b. \end{aligned}$$



Figur 2

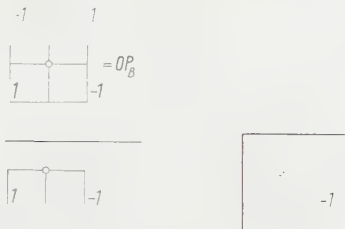
Ausschnitt aus dem Netz.

Mit den Bezeichnungen von Figur 2 können wir die zweite Ableitung u_{xx} schreiben als

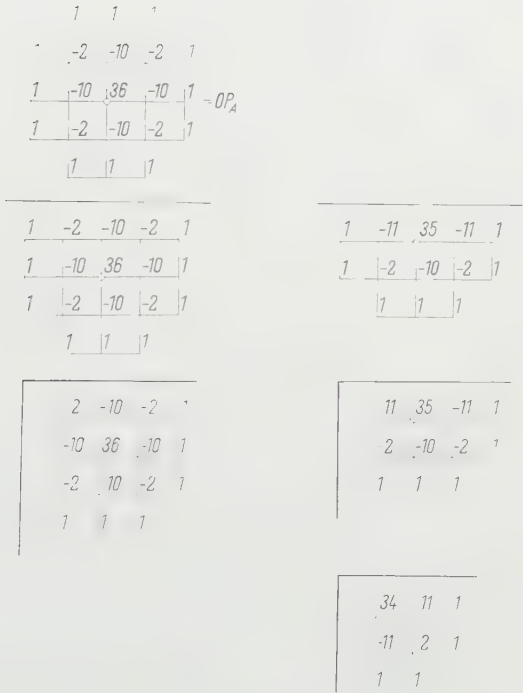
$$u_{xx} = \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2}. \quad (13)$$

Ist u_2 ein Randpunkt, also $u_2 = 0$, so wird auch $u_{xx} = 0$, da die angenommene Lagerung der Platte den ausserhalb des Randes liegenden fiktiven Punkten gleiche Beträge, aber umgekehrte Vorzeichen zuordnet ($u_1 = -u_3$). Analoges gilt für u_{yy} .

Unter Verwendung der «Spiegelung am Rand» stellen wir nun die modifizierten Randoperatoren auf, welche die Vorschriften geben für die Gleichungen der randnahen Punkte. Figur 3 zeigt die Modifikationen des Operators OP_B , Figur 4 diejenigen des Operators OP_A .



Figur 3
Operator OP_B mit Modifikationen.



Figur 4
Operator OP_A mit Modifikationen.

Dadurch, dass die Differenzengleichung in jedem inneren Punkte des Netzes angeschrieben wird, entsteht die Gesamtheit der Matrix-Eigenwertgleichungen (4), deren absolut kleinster Eigenwert gemäss

$$\tau_{kr} = k \frac{\pi^2 D}{db^2}; \quad k = \frac{2}{3 \pi^2} \frac{b^2}{h^2} \lambda \tag{14}$$

mit der kritischen Schubspannung zusammenhängt.

Die beiden Matrizen A und B sind durch OP_A und OP_B und das Netz bestimmt.

Eine Betrachtung der Symmetrieeigenschaften, welche die beiden Differentialoperatoren im rechteckigen Grundgebiet aufweisen und welche sich auch auf die beiden Matrizen A und B übertragen, zeigt, dass die Beuflächen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	34	-11	1	0	-11	-2	1	0	1	1								
2	-11	35	-11	1	-2	-10	-2	1	1	1								
3	1	-11	35	-11	1	-2	-10	-2	0	1	1							
4	0	1	-11	34	0	1	-2	-11	0	0	1	1						
5	-11	-2	1	0	35	-10	1	0	-11	-2	1	0	1					
6	-2	-10	-2	1	-10	36	-10	1	-2	-10	-2	1	1	1				
7	1	-2	-10	-2	1	-10	36	-10	1	-2	-10	-2	0	1	1			
8	0	1	-2	-11	0	1	-10	35	0	1	-2	-11	0	0	1	1		
9	1	1	0	0	-11	-2	1	0	35	-10	1	0	-11	-2	1	0	1	
10	1	1	1	0	-2	-10	-2	1	-10	36	-10	1	-2	-10	-2	1	1	
11		1	1	1	1	-2	-10	-2	1	-10	36	-10	1	-2	-10	-2	1	
12			1	1	0	1	-2	-11	0	1	-10	35	0	1	-2	-11	1	
13				0	1	1	0	0	-11	-2	1	0	35	-10	2	1	-11	-1
14					1	1	1	0	-2	-10	-2	1	-10	37	-9	2	-1	-12
15						1	1	1	1	-2	-10	-2	2	-9	37	-10	-1	-12
16							1	1	0	1	-2	-11	1	2	-10	35	-11	-1
17								0	1	1	1	1	-11	-1	-1	-11	35	-9
18									1	2	2	1	-1	-12	-12	-1	-9	26

$=A$

Figur 5

Durch den Operator OP_A erzeugte Matrix A .

punktsymmetrisch bzw. -antimetrisch sein müssen. Man kann deshalb die Anzahl der Variablen auf die Hälfte reduzieren und den symmetrischen und den antimetrischen Fall getrennt behandeln (siehe Figur 1), selbstverständlich unter Erhaltung der gewöhnlichen Diagonalsymmetrie von A und B . Damit wird der Rechenaufwand erheblich herabgesetzt. Figur 5 und Figur 5a zeigen die Matrizen im symmetrischen Fall unseres Beispiels von Figur 1.

Im Falle des Quadrates wäre noch eine weitere Reduktion möglich gewesen; wir haben davon jedoch keinen Gebrauch gemacht. Schliesslich bräute eine darstellungstheoretische Diskussion am ehesten Licht in die Symmetriebetrachtungen; sie lieferte insbesondere sofort die Dimensionen der invarianten Unterräume von $A^{-1}B$.

4. Behandlung des Matrix-Eigenwertproblems

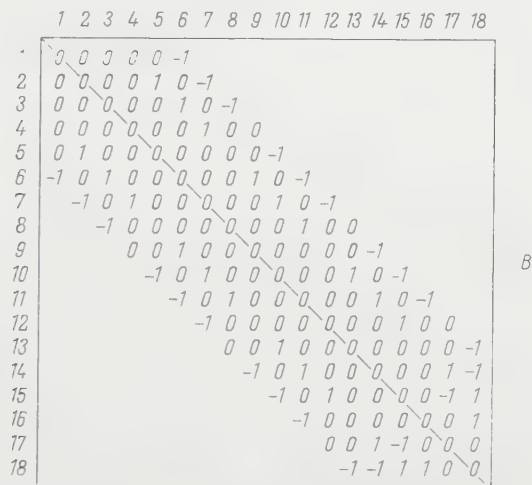
Im folgenden soll noch kurz die numerische Methode skizziert werden, nach welcher die Eigenwerte und -vektoren von

$$(A - \lambda B) u = 0 \quad (15)$$

auf der ERMETH berechnet wurden.

Es wurde die Tatsache benützt, dass A und B symmetrisch sind und dass ferner A positiv definit ist und sich somit symmetrisch in ein Produkt von zwei Dreiecksmatrizen zerlegen lässt:

$$A = L R \quad \text{mit} \quad L = R^T; \quad r_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i > k.$$



Figur 5a

Durch den Operator OP_B erzeugte Matrix B .

Statt (15) lösen wir dann das Problem

$$L^{-1} (A - \lambda B) R^{-1} R u = 0$$

oder:

$$(\mu E - C) v = 0, \tag{16}$$

wobei

$$\mu = \frac{1}{\lambda}; \quad C = L^{-1} B R^{-1}; \quad v = R u.$$

Damit ist die ursprüngliche Aufgabe auf ein spezielles Matrix-Eigenwertproblem mit symmetrischem C zurückgeführt.

Diese neue Gleichung wird mit einem modifizierten Iterationsverfahren⁴⁾ angegangen, welches zuerst die absolut grössten μ , und damit die vor allem interessierenden kleinsten λ liefert. Es werden ständig zwei (im allgemeineren Fall⁵⁾ mehrere) Vektoren v_1 und v_2 mitgeführt, die wir zur zweispaltigen Matrix $V = [v_1; v_2]$ zusammenfassen.

⁴⁾ Die Tatsache, dass B singular sein und somit (16) den Eigenwert $\mu = 0$ haben kann, ist hier unerheblich.

⁵⁾ Es handelt sich um den Spezialfall eines von H. RUTISHAUSER angegebenen Verfahrens, welches später publiziert werden wird.

Der k -te Iterationsschritt besteht aus folgenden Operationen:

$V^{(k)}$ wird orthonormiert, und zwar orthogonal zu allfälligen schon berechneten Eigenvektoren. Diese neue Matrix nennen wir $Y = [y_1; y_2]$. Nun dreht man in der Ebene der y_i auf Hauptachsen, das heisst Y ist mit einer solchen zweireihigen orthogonalen Matrix U zu multiplizieren, dass die Spalten von YU extremale Rayleighsche Quotienten liefern. Wegen der Orthogonalität von Y heisst das aber nichts anderes, als dass in jedem Schritt das «kleine Eigenwertproblem» für die zweireihige Matrix $Y^T C Y$ zu lösen ist. Die Eigenvektoren sind die Spalten von U , die Eigenwerte sind zugleich Näherungen für die Eigenwerte μ von (16). Die Iteration von YU mit C ergibt das neue V :

$$V^{(k+1)} = CYU.$$

Praktisch wird zuerst $Z = CY$ und $Y^T Z$ gebildet und, nach der Berechnung von U , $V^{(k+1)} = ZU$. Es wird bei derartigen Problemen oft übersehen, ist aber numerisch von ausserordentlicher Wichtigkeit, dass die Matrix $C = L^{-1} B R^{-1}$ gar nicht explizit aufgestellt zu werden braucht, sondern es wird in jedem Iterationsschritt der Reihe nach von links mit R^{-1} , B und L^{-1} multipliziert. Für die Multiplikation mit R^{-1} und mit L^{-1} , sowie auch für die Zerlegung $A = LR$ am Anfang, wurden bei uns Teile eines Programms für die Auflösung von symmetrischen Gleichungssystemen nach GAUSS-CHOLESKI verwendet, so dass sich auch die Berechnung von L^{-1} und R^{-1} erübrigte.

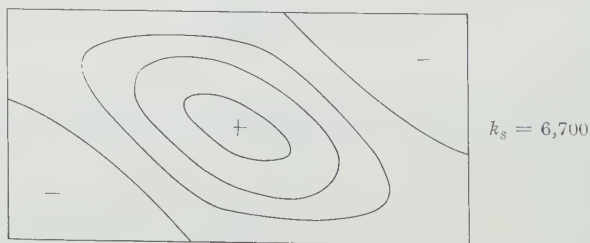
Als Kriterium für das Abbrechen der Iteration kann die absolut grösste Änderung in den Komponenten des normierten Vektors y_1 mit einer vorgegebenen Toleranz verglichen werden.

Am Schluss hat man wieder auf $\lambda = 1/\mu$ und $u = R^{-1}v$ zurückzutransformieren.

Das beschriebene Verfahren liefert ohne weiteres Paare von entgegengesetzt gleichen Eigenwerten, wie sie in unserer Anwendung auftreten.

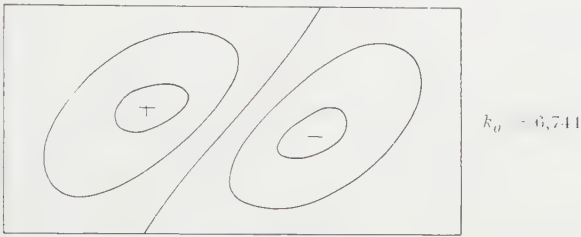
5. Resultate

Figur 6 zeigt den Beulwert k , und die zugehörige Beulfläche für den symmetrischen Fall:



Figur 6
Beulfläche im symmetrischen Fall.

Figur 7 zeigt den Beulwert k_a und die Beulfläche im antisymmetrischen Fall:



Figur 7
Beulfläche im antisymmetrischen Fall.

Da $k_s < k_a$, wird die Platte (Seitenverhältnis 2:1) also gemäss Figur 6 ausbeulen. Für höhere Seitenverhältnisse, z. B. 3:1, ist hingegen der dem antisymmetrischen Fall entsprechende Beulwert k_a kritisch.

Zur Erzeugung der Matrizen A und B für beliebige Seitenverhältnisse $a : b$ und für beliebige Maschenweite h wurde ebenfalls ein Programm aufgestellt, welches erlaubt hat, die weiter unten angegebenen Fälle durchzurechnen, ohne dass dazu die Matrizen A und B von Hand aufgestellt werden mussten.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Resultate der Rechnungen für verschiedene Seitenverhältnisse mit jeweils verschiedener Maschenweite h .

innere Gitterpunkte	h	λ_s	k_s	λ_a	k_a
<i>Quadrat</i>					
2×2	$\frac{1}{3}$	23,238	14,127	36,000	21,885
4×4	$\frac{1}{5}$	5,807	9,806	7,324	12,369
6×6	$\frac{1}{7}$	2,855	9,451	3,549	11,747
8×8	$\frac{1}{9}$	1,713	9,372	2,123	11,618
<i>Rechteck 2:1</i>					
2×5	$\frac{1}{3}$	13,236	8,046	13,555	8,240
4×9	$\frac{1}{5}$	3,968	6,700	3,994	6,744
<i>Rechteck 3:1</i>					
2×8	$\frac{1}{3}$	11,848	7,203	11,518	7,002
4×14	$\frac{1}{5}$	3,600	6,079		

6. Extrapolation der Beulwerte

Da aus der Gleichung (9) durch Division mit h^4 hervorgeht, dass die Differenzengleichung (10) bis auf einen Fehler der Ordnung h^4 mit $\Delta \Delta u = \lambda' u_{xy}$ übereinstimmt, kann man annehmen, dass die Eigenwerte von (10) und damit die Beulwerte (12) mit Fehlern behaftet sind, die im wesentlichen zu h^4 proportional sind. Höhere Fehlerglieder sind zu h^6, h^8 , usw., proportional.

Man kann daher eine bessere Approximation für den Beulwert finden, indem man mit Hilfe der Werte $k(h)$, die man mit verschiedenen Maschen-

weiten h gefunden hat, mit dem Ansatz

$$k(h) = k + c h^4 + d h^6 + \dots$$

das Interpolationspolynom konstruiert und $k(0)$ berechnet. Beispielsweise wurden für den kleinsten antisymmetrischen Beulwert die in der folgenden Tabelle angeführten Werte $k(h)$ gefunden.

Netz	h	$k(h)$	$(k(h) - k)/h^4$
2×2	0,333333	21,885	837
4×4	0,2	12,369	514
6×6	0,142857	11,747	480
8×8	0,111111	11,618	466

Mit dem Ansatz $k(h) = k + c h^4 + d h^6$ findet man aus den drei letzten Tabellenwerten:

$$k = 11,547;$$

und damit die neben den $k(h)$ aufgeführten Werte von $(k(h) - k)/h^4$, welche offenbar den Ansatz rechtfertigen.

Es soll freilich nicht verschwiegen werden, dass diese Art der Extrapolation nicht ohne Gefahren ist. Sie soll jedenfalls nur unternommen werden, wenn die Beulwerte für *mehrere* verschiedene Maschenweiten berechnet wurden; ausserdem sollen immer auch die Kontrollgrössen $(k(h) - k)/h^4$ berechnet werden. Bei unruhigem Verlauf derselben ist die Extrapolation zu verwerfen.

Es ist schliesslich noch darauf hinzuweisen, dass diese Extrapolation nur dann mit Erfolg ausgeführt werden kann, wenn die Beulwerte für die verschiedenen Maschenweiten h mit überschüssiger Genauigkeit berechnet wurden. Es wirkt sich daher sehr vorteilhaft aus, dass Rechenautomaten mit wesentlich mehr Stellen arbeiten, als man bei technischen Problemen normalerweise benötigt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability* (McGraw-Hill, New York 1936).
- [2] F. STÜSSI, *Entwurf und Berechnung von Stahlbauten*. Erster Band: *Grundlagen des Stahlbaues* (Springer, Berlin 1958).
- [3] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1955).
- [4] C. F. KOLLBRUNNER und M. MEISTER, *Ausbeulen* (Springer, Berlin 1958).

Summary

Buckling of a plate leads to an eigenvalue problem for which a very accurate finite difference approximation is given. The resulting algebraic eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$ is solved for specific problems by an improved iteration method. Numerical results are discussed.

(Eingegangen: 14. März 1960.)

Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck bei Berücksichtigung des Eigengewichtes

VON HORST LEIPHOLZ, Stuttgart, Deutschland¹⁾

1. Einleitung

Es sollen einfach besetzte Wellen mit mehrfach beaufschlagten Turbinenscheiben betrachtet werden. Die Wellen seien zusätzlich durch \mathfrak{M} auf Torsion und durch \mathfrak{P} und q auf Druck beansprucht.

Das Torsionsmoment \mathfrak{M} werde durch die Turbinenscheibe in die Welle eingeleitet; \mathfrak{P} greife als Einzelkraft an den Enden der Welle an; q sei eine kontinuierlich verteilte Längskraft (zum Beispiel Eigengewicht); \mathfrak{P} und q mögen stets die Richtung der unverformten Wellenachse beibehalten; \mathfrak{M} sei semitangential. Die Welle sei von gleichbleibendem kreisförmigem Querschnitt; die Biegesteifigkeit a und die Torsionssteifigkeit c sind daher konstante Grössen. Alle Verformungen, die die Welle erleidet, seien sehr klein.

Bekanntlich [1]²⁾ werden die kritischen Drehzahlen durch die Torsions- und Druckbeanspruchung der Welle beeinflusst. Untersuchungen hierüber sind auch von H. ZIEGLER [2] durchgeführt worden, der insbesondere gezeigt hat, dass das Problem für die angenommene Belastung konservativ ist und dass die Annahme eines semitangentialen Momentes für mehrfach beaufschlagte Scheiben besonders sinnvoll ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen und ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung gilt, wie man bei H. ZIEGLER [3] nachliest, die Beziehung

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m \bar{\alpha}}, \quad (1)$$

wobei ω_k die kritische Drehzahl, m die Masse der Scheibe und $\bar{\alpha}$ die Einflusszahl für die Durchbiegung der Welle an der Stelle ist, wo die Turbinenscheibe sitzt. Das ganze Problem besteht also in der Bestimmung von $\bar{\alpha}$.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, dass sich die kritische Drehzahl nur deshalb in der einfachen Beziehung (1) darstellt, weil das Torsionsmoment als semitangential vorausgesetzt worden ist. Die Begründung hierfür ist in der zitierten Arbeit von H. ZIEGLER angegeben.

¹⁾ Institut für technische Mechanik, Technische Hochschule Stuttgart.

²⁾ Die Ziffern in den eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 471.

Als neu gegenüber früheren Arbeiten soll jetzt $\bar{\alpha}$ auch noch unter Berücksichtigung von q errechnet werden.

2. Differentialgleichungen und Randbedingungen

An Hand von zwei Beispielen soll die Aufstellung der Differentialgleichungen und der Randbedingungen gezeigt werden. Die Überlegungen lassen sich dann leicht auf andere Fälle übertragen.

2.1 Die fliegende Welle

Die fliegende Welle ist in Abbildung 1 dargestellt. Sie ist mit dem unteren Ende in einem «langen» Lager eingespannt und erfährt am oberen Ende durch eine Horizontalkraft \mathfrak{H} eine Auslenkung.

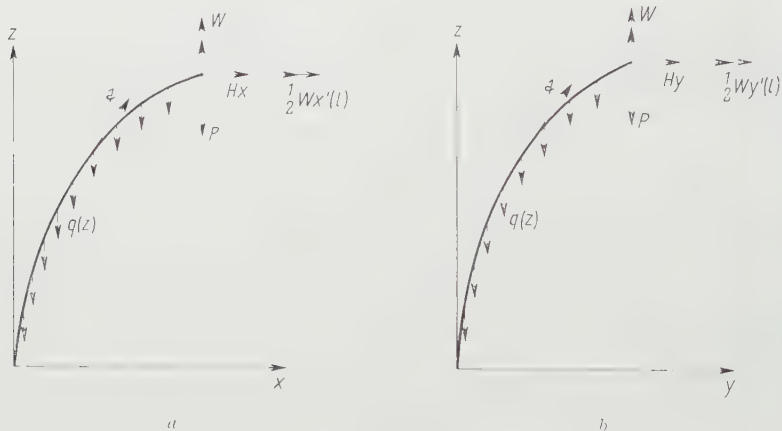


Abbildung 1
Die fliegende Welle.

Die Belastungen haben folgende Komponentendarstellung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= W \left(\frac{1}{2} x', \frac{1}{2} y', 1 \right), \\ \mathfrak{P} &= (0, 0, P), \\ q &= (0, 0, q), \\ \mathfrak{H} &= (H_x, H_y, 0), \end{aligned} \right\} \quad \left(\frac{z}{l} \right)$$

und der Tangenten-Einheitsvektor der Stabachse ist

$$\mathbf{t} = (x', y', 1) = (t_x, t_y, 1). \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen der Wellenachse hat man für die Komponenten des inneren Stabmomentes die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} M_y &= a x'', \\ M_x &= -a y'', \\ W &= c \tau = \text{konst.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei τ die infolge der Torsion auftretende Verwindung pro Längeneinheit der Welle ist.

Durch Anwendung des Schnittprinzips und der statischen Gleichgewichtsbedingungen erhält man

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= -W y' + \frac{1}{2} W y'(l) + H_x(l-z) + P[x(l) - x] \\ &\quad + \int_z^l q(\zeta) [x(\zeta) - x(z)] d\zeta, \\ a y'' &= W x' - \frac{1}{2} W x'(l) + H_y(l-z) + P[y(l) - y] \\ &\quad + \int_z^l q(\zeta) [y(\zeta) - y(z)] d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es seien noch weitere Bezeichnungen eingeführt:

$$w = \frac{W}{a}, \quad h_x = \frac{H_x}{a}, \quad h_y = \frac{H_y}{a}, \quad g(z) = \frac{P + \int_z^l q(\zeta) d\zeta}{a}, \quad (6)$$

und es werde (3) verwendet. Dann erhält man aus (5) durch Differentiation:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + w t_y' + g(z) t_x &= -h_x, \\ t_y'' - w t_x' + g(z) t_y &= -h_y. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Das ist ein lineares, inhomogenes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit teils konstanten und dem variablen Koeffizienten $g(z)$. Abhängige Variablen sind die Komponenten t_x und t_y des Tangenteneinheitsvektors, unabhängige Variable ist z , welches die Länge der Wellenachse vom unteren Ende her zählt.

Als Randbedingungen hat man

2.11: wegen der Einspannung des unteren Wellenendes:

$$t_x = 0, \quad t_y = 0 \quad \text{für } z = 0, \quad (8)$$

2.12: als Momentenbedingung am oberen Wellenende:

$$\left. \begin{aligned} a t'_x &= \frac{1}{2} W t'_y \\ a t'_y &= \frac{1}{2} W t'_x \end{aligned} \right\} \quad \text{für } z = l. \quad (9)$$

2.2 Die beiderseits gelagerte Welle

Wie Abbildung 2 zeigt, soll die Welle beiderseits «lange» Lager haben, so dass ihre beiden Enden als eingespannt gelten können.

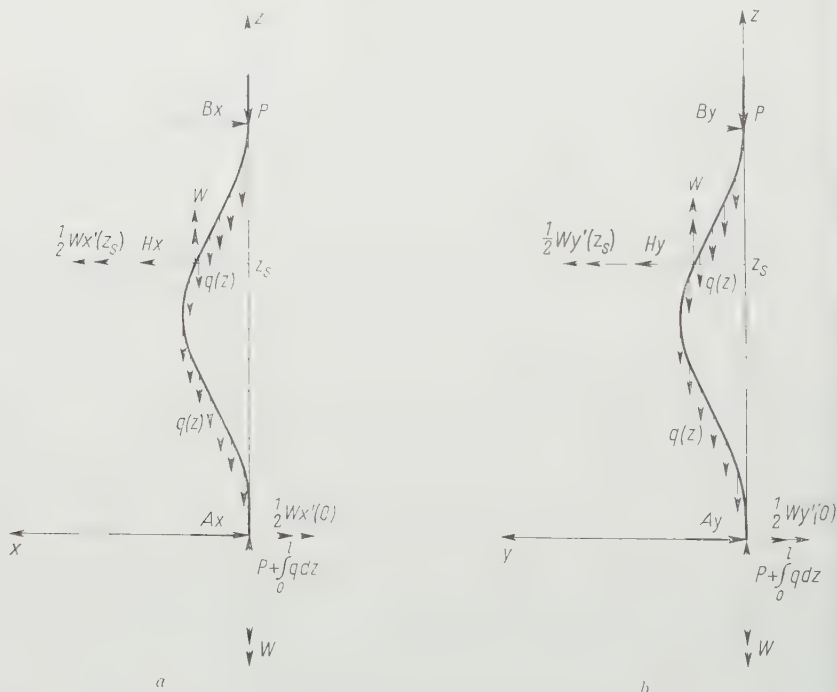


Abbildung 2

Die beiderseits gelagerte Welle.

Für die an der Welle angreifenden Belastungen gilt wieder (2), für die Komponenten des inneren Momentes (4). Zusätzlich braucht man jetzt für die Rechnung noch die an den Lagern auftretenden Auflagerkräfte. Diese haben

die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= H_x \frac{l - z_s}{l} + \frac{W}{2l} [y'(0) - y'(z_s)], \\ A_y &= H_y \frac{l - z_s}{l} + \frac{W}{2l} [x'(z_s) - x'(0)], \\ B_x &= H_x \frac{z_s}{l} + \frac{W}{2l} [y'(z_s) - y'(0)], \\ B_y &= H_y \frac{z_s}{l} + \frac{W}{2l} [x'(0) - x'(z_s)], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und es ist z_s der Wert von z , der angibt, wo die Turbinenscheibe sitzt.

Wieder durch Anwendung des Schnittprinzips und der statischen Gleichgewichtsbedingungen liest man aus Abbildung 2 ab

2.21: für den Bereich $0 \leq z \leq z_s$:

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= -W y' + \frac{1}{2} W y'(0) - A_x z - P x - x \int_0^z q \, dz \\ &\quad - \int_0^z q(\zeta) [x(z) - x(\zeta)] \, d\zeta, \\ a y'' &= W x' - \frac{1}{2} W x'(0) - A_y z - P y - y \int_0^z q \, dz \\ &\quad - \int_0^z q(\zeta) [y(z) - y(\zeta)] \, d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2.22: für den Bereich $z_s < z < l$:

$$\left. \begin{aligned} a x'' &= -B_x (l - z) - P x - x \int_{z_s}^l q(\zeta) [x(z) - x(\zeta)] \, d\zeta, \\ a y'' &= -B_y (l - z) - P y - y \int_{z_s}^l q(\zeta) [y(z) - y(\zeta)] \, d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Verwendet man auch hier (3), (6), sowie

$$\alpha_x = \frac{A_x}{a}, \quad \beta_x = \frac{B_x}{a}, \quad \alpha_y = \frac{A_y}{a}, \quad \beta_y = \frac{B_y}{a}, \quad (13)$$

und differenziert man (11) und (12), so hat man die beiden Differentialgleichungssysteme

2.21: für den Bereich $0 \leq z \leq z_s$:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + w t_y' + g(z) t_x &= -\alpha_x, \\ t_y'' - w t_x' + g(z) t_y &= -\alpha_y \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und 2.22: für den Bereich $z_s \leq z \leq l$:

$$\left. \begin{aligned} t_x'' + g(z) t_x &= \beta_x, \\ t_y'' + g(z) t_y &= \beta_y. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

In diesem Fall gelten folgende Randbedingungen:

2.23: wegen der Einspannung der Wellenenden:

$$t_x = 0, \quad t_y = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, \quad z = l, \quad (16)$$

2.24: aus Stetigkeitsgründen:

$$\left. \begin{aligned} t_x(z_s - 0) &= t_x(z_s + 0), \\ t_y(z_s - 0) &= t_y(z_s + 0), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.25: wegen der Unverschieblichkeit des oberen Wellenendes:

$$\int_0^{z_s} t_j(z) dz + \int_{z_s}^l t_j(z) dz = 0, \quad (j = x, y). \quad (18)$$

3. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

Von den bisher aufgestellten Differentialgleichungen sind (7) und (14) vom gleichen Typ. Wie man ihre Lösungen erhält, soll am Beispiel des Systems (7) gezeigt werden:

Man führt die komplexen Größen

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= t_x + i t_y, \\ h &= h_x + i h_y \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ein und erhält statt (7):

$$\varrho'' - i w \varrho' + g \varrho = -h. \quad (20)$$

Als neue Bezeichnungen seien

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{w}{2}, \\ \Gamma &= \left(g + \frac{w^2}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

benutzt, dann wird aus (20):

$$\varrho'' + 2i u \varrho - (u^2 + V) \varrho = -h, \quad (22)$$

was sich mit der Transformation

$$\varrho = r e^{-iuz} \quad (23)$$

auf

$$r'' - V r = -h e^{iuz} \quad (24)$$

zurückführen lässt. Die zu (24) gehörende homogene Gleichung

$$r'' - V r = 0 \quad (25)$$

sei die «Basisgleichung» genannt, denn ihre linear unabhängigen Fundamentallösungen r_1 und r_2 beherrschen die weitere Rechnung. Der Charakter von r_1 und r_2 ist bestimmt, wegen Γ und der Bedeutung von g , durch die Art der Längsbelastung $q(z)$.

Unter Verwendung der Wronskischen Determinante

$$W = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1' & r_2' \end{vmatrix}, \quad (26)$$

die in diesem Fall eine Konstante ist, erhält man durch Variation der komplexen Integrationskonstanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} für die inhomogene Differentialgleichung (24) die allgemeine Lösung

$$r = \mathfrak{A} r_1 + \mathfrak{B} r_2 + \frac{h}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right). \quad (27)$$

Hieraus folgt, wegen (23), als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (22):

$$\varrho = \left[\mathfrak{A} r_1 + \mathfrak{B} r_2 + \frac{h}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right) \right] e^{-iuz}. \quad (28)$$

Das ist dann aber auch die gesuchte Lösung des Systems (7), wenn man noch die durch (19) und (21) festgesetzte Bedeutung von ϱ , h und u beachtet.

Ganz entsprechend erhält man mit

$$\alpha = \alpha_x + i \alpha_y \quad (29)$$

als allgemeine Lösung von (14):

$$\varrho = \left[\mathfrak{C} r_1 + \mathfrak{D} r_2 + \frac{\alpha}{W} \left(r_1 \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right) \right] e^{-iuz}. \quad (30)$$

Als letzte der bisher betrachteten Differentialgleichungen können die Gleichungen des Systems (15) mit ϱ und mit

$$\beta = \beta_x + i \beta_y \quad (31)$$

auf die Form

$$\varrho'' + g(z) \varrho = \beta \quad (32)$$

gebracht werden, die vom Typ der inhomogenen Basisgleichung (24) ist. Bezeichnet man die Fundamentallösungen von

$$r'' + g(z) r = 0 \quad (33)$$

mit r_1^g und r_2^g , und die zu (33) gehörende Wronskische Determinante mit W^g , so bekommt man daher, ganz entsprechend wie bei (24), für (32), durch Variation der Konstanten, die allgemeine Lösung

$$\varrho = \mathfrak{E} r_1^g + \mathfrak{F} r_2^g + \frac{\beta}{W^g} \left(-r_1^g \int_0^z r_2^g dz + r_2^g \int_0^z r_1^g dz \right). \quad (34)$$

3.1 Die Berechnung von $\bar{\alpha}$

Wie (1) zeigt, kennt man die gesuchte kritische Drehzahl ω_k , bei gegebener Scheibenmasse m , vollkommen, wenn es gelungen ist, die Einflusszahl α für die Durchbiegung der Welle an der Stelle $z = z_s$ anzugeben.

Der Bedeutung von ϱ entsprechend gibt

$$v(z_s) = \int_0^{z_s} \varrho dz \quad (35)$$

gerade die Durchbiegung der Welle in vektorieller Form unter den in den Abbildungen 1 und 2 gezeigten Belastungen.

Wie schon H. ZIEGLER [4] gezeigt hat und wie es auch hier die weitere Rechnung bestätigen wird, ist es dem Wirken eines semitangentialen Torsionsmomentes zu verdanken, dass die Welle sich unter einer beliebig gerichteten horizontalen Kraft \mathfrak{H} in Richtung der Kraft \mathfrak{H} verschiebt. Das heisst aber: Auslenkung $v(z_s)$ und Kraft \mathfrak{H} haben gleiche Wirkungsline. Wählt man also für die Komponenten von \mathfrak{H} Kräfte vom Betrag 1, so wird auch $v(z_s)$ Komponenten haben, die betragsmässig gleich sind, und dieser gemeinsame Betrag ist das gesuchte $\bar{\alpha}$.

Die weitere Rechnung hat demnach so zu verlaufen, dass man

$$v(z_s) = \int_0^{z_s} \varrho dz$$

unter der besonderen Bedingung $\mathfrak{H} = 1 + i$ (was sich in entsprechenden Werten für h , α und β ausdrückt) errechnet und den Realteil (oder den gleichgrossen

Imaginärteil) von $v(z_s)$ ermittelt. Dann ist

$$\bar{\alpha} = \operatorname{Re}(v(z_s)) \quad \text{für} \quad \mathfrak{H} = 1 + i. \quad (36)$$

Für ϱ stehen die Lösungen (28) oder (30) zur Verfügung

$$\left(\text{würde man mit (34) rechnen, so wäre } v(z_s) = - \int_{z_s}^l \varrho \, dz \right),$$

in denen aber noch Integrationskonstanten vorkommen. Die Anwendung der in Absatz 2 gegebenen Randbedingungen gestattet jedoch die Bestimmung dieser Konstanten. Es ist nur noch nötig, auch die Randbedingungen komplex zu schreiben. Aus (8) wird

$$\varrho = 0 \quad \text{für} \quad z = 0; \quad (37)$$

aus (9) wird

$$\varrho' = \frac{1}{2} i \omega \varrho \quad \text{für} \quad z = l; \quad (38)$$

aus (16) wird

$$\varrho = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = l; \quad (39)$$

aus (17) wird

$$\varrho(z, -l) = \varrho(z, +l); \quad (40)$$

und aus (18) wird

$$\int_0^{z_s} \varrho(z) \, dz + \int_{z_s}^l \varrho(z) \, dz = 0. \quad (41)$$

Hat man mit Hilfe der Randbedingungen (37), (38) oder (39) bis (41) die Integrationskonstanten ermittelt, so steht der Berechnung von $v(z_s)$ und darüber hinaus von \bar{z} nichts mehr im Wege. Die wirkliche Durchführung der bisher nur angedeuteten Rechnung soll am Beispiel der fliegenden Welle erfolgen.

4. Kritische Drehzahl für die fliegende Welle

Für diesen Fall muss man (28), (37) und (38) benutzen. Durch Anwendung der Randbedingungen (37) und (38) auf die allgemeine Lösung (28) von ϱ erhält man für die Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= -r_2(0) \frac{h}{W} \frac{r_1'(l) \int_0^l r_2 e^{iuz} \, dz - r_2'(l) \int_0^l r_1 e^{iuz} \, dz}{r_1'(l) r_2(0) - r_2'(l) r_1(0)}, \\ \mathfrak{B} &= r_1(0) \frac{h}{W} \frac{r_1'(l) \int_0^l r_2 e^{iuz} \, dz - r_2'(l) \int_0^l r_1 e^{iuz} \, dz}{r_1'(l) r_2(0) - r_2'(l) r_1(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} r_1(0) & r_2(0) \\ r_1'(l) & r_2'(l) \end{vmatrix}, \\ a_{11} &= \frac{r_2(0) r_1'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, & a_{12} &= -\frac{r_2(0) r_2'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, \\ b_{11} &= -\frac{r_1(0) r_1'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}, & b_{12} &= \frac{r_1(0) r_2'(l)}{W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

und mit (42) folgt dann aus (28):

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \frac{h}{W} \left(a_{11} r_1 e^{-iuz} \int_0^l r_2 e^{iuz} dz + a_{12} r_1 e^{-iuz} \int_0^l r_1 e^{iuz} dz \right. \\ &\quad \left. + b_{11} r_2 e^{-iuz} \int_0^l r_2 e^{iuz} dz + b_{12} r_2 e^{-iuz} \int_0^l r_1 e^{iuz} dz \right. \\ &\quad \left. + r_1 e^{-iuz} \int_0^z r_2 e^{iuz} dz - r_2 e^{-iuz} \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right), \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

womit man $v(z_s)$ nach (35) errechnen kann.

Vor Ausführung der nach (35) vorgeschriebenen Integration sollen weitere Abkürzungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} S_{1s}^{i0} &= \int_0^l r_1 \sin uz \, dz, & S_{2s}^{i0} &= \int_0^l r_2 \sin uz \, dz, \\ S_{1c}^{i0} &= \int_0^l r_1 \cos uz \, dz, & S_{2c}^{i0} &= \int_0^l r_2 \cos uz \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Hiermit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l r_1 e^{-iuz} dz \int_0^l r_2 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}) + i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}), \\ \int_0^l r_1 e^{-iuz} dz \int_0^l r_1 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0})^2 + (S_{1s}^{i0})^2, \\ \int_0^l r_2 e^{-iuz} dz \int_0^l r_2 e^{iuz} dz &= (S_{2c}^{i0})^2 + (S_{2s}^{i0})^2, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^l r_2 e^{-iuz} dz \int_0^l r_1 e^{iuz} dz &= (S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}) - i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}), \\
 \int_0^l \left[r_1 e^{-iuz} \int_0^z r_2 e^{iuz} dz \right] dz - \int_0^l \left[r_2 e^{-iuz} \int_0^z r_1 e^{iuz} dz \right] dz &= \\
 = \int_0^l r_1 \cos u z S_{2c}^{z0} dz + \int_0^l r_1 \sin u z S_{2s}^{z0} dz - \int_0^l r_2 \cos u z S_{1c}^{z0} dz \\
 - \int_0^l r_2 \sin u z S_{1s}^{z0} dz + i (S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}).
 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Benutzt man ausserdem die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned}
 L_{12}(l) &= S_{1c}^{i0} S_{2c}^{i0} + S_{1s}^{i0} S_{2s}^{i0}, & L_1(l) &= (S_{1c}^{i0})^2 + (S_{1s}^{i0})^2, \\
 L_{12}^*(l) &= S_{1c}^{i0} S_{2s}^{i0} - S_{1s}^{i0} S_{2c}^{i0}, & L_2(l) &= (S_{2c}^{i0})^2 + (S_{2s}^{i0})^2, \\
 L(l) &= \int_0^l r_2 \cos u z S_{1c}^{z0} dz + \int_0^l r_2 \sin u z S_{1s}^{z0} dz - \int_0^l r_1 \cos u z S_{2c}^{z0} dz \\
 &\quad - \int_0^l r_1 \sin u z S_{2s}^{z0} dz,
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

so lässt sich mit (44) bei Verwendung von (45 bis 47), die Ausrechnung von (35) schreiben:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{v}(z_s) &= \frac{\hbar}{W} \{ a_{11} [L_{12}(l) + i L_{12}^*(l)] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) \\
 &\quad + b_{12} [L_{12}(l) - i L_{12}^*(l)] - L(l) + i L_{12}^*(l) \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Es ist aber immer, wie man an Hand von (43) nachprüfen kann,

$$a_{11} - b_{12} + 1 = 0, \quad (49)$$

so dass bei (48) wegen (49) die imaginären Terme aus der geschweiften Klammer herausfallen und man

$$\mathfrak{v}(z_s) = \frac{\hbar}{W} \{ a_{11}(l) [a_{11} + b_{12}] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) - L(l) \} \quad (50)$$

hat. Daraus ersieht man, dass das Wellenende sich tatsächlich unter einer beliebig gerichteten horizontalen Einheitskraft um die Strecke $\bar{\alpha}$ in Richtung der Kraft verschiebt.

Aus (50) erhält man die gesuchte Einflusszahl $\bar{\alpha}$, indem man für $h = 1/a$ setzt. Das ergibt:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{aW} \{L_{12}(l) [a_{11} + b_{12}] + a_{12} L_1(l) + b_{11} L_2(l) - L(l)\}. \quad (51)$$

Die Gleichung (51) kann für alle möglichen Lastverteilungsgesetze $q(z)$ angewendet werden.

Der Fall $q = 0$ wurde bereits von H. ZIEGLER behandelt. Hier besteht die Druckbelastung nur aus der Einzelkraft P , die an den Enden der Welle angreift. Mit

$$v_0^2 = -V = g + \frac{w^2}{4} = \frac{P}{a} + \frac{T^2}{4a^2} = \text{konst.} \quad (52)$$

heissen daher die Fundamentallösungen der Basisgleichung (25):

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sin v_0 z \\ r_2 &= \cos v_0 z. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Das gibt:

$$r_1(0) = 0, \quad r_2(0) = 1, \quad r_1'(l) = v_0 \cos v_0 l, \quad r_2'(l) = -v_0 \sin v_0 l,$$

$$W = -v_0, \quad W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} = -v_0 \cos v_0 l,$$

so dass man nach (43)

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -\operatorname{tg} v_0 l, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0 \quad (54)$$

erhält.

Setzt man (54) in (51) ein, so ist

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{a v_0} \{-L_{12}(l) - \operatorname{tg} v_0 l \cdot L_1(l) - L(l)\}. \quad (55)$$

Verwendet man für die Ausrechnung von $L(l)$, $L_1(l)$ und $L_{12}(l)$ die Formeln (45–47) und für r_1 und r_2 (53), so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} L(l) &= \frac{a}{P} \left[\left(1 + \frac{2a u^2}{P} \right) \sin v_0 l \cos u l - \frac{2u v_0 a}{P} \cos v_0 l \sin u l - v_0 l \right], \\ L_1(l) &= \frac{a}{P} \left[2 + \frac{2u^2 a}{P} - \sin^2 v_0 l - 2 \frac{a v_0^2}{P} \cos v_0 l \cos u l \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{a v_0 u}{P} \sin v_0 l \sin u l \right], \\ L_{12}(l) &= \frac{a}{P} [\sin v_0 l \cos u l - \sin v_0 l \cos v_0 l]. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Dies, in (55) eingesetzt, führt nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{P} \left[\frac{v_0^2 + u^2}{v_0} - \frac{a}{P} \operatorname{tg} v_0 l - \frac{2u a}{P} \frac{\sin u l}{\cos v_0 l} - l \right]. \quad (57)$$

Der Ausdruck (57) stimmt aber genau mit einer für diesen Lastfall auf anderem Wege von H. ZIEGLER [5] berechneten Formel überein, wenn man den Unterschied in der Bezeichnungsweise beseitigt:

den Bezeichnungen bei H. ZIEGLER	entsprechen	in dieser Arbeit
w	_____	$-2u$
σ	_____	$2v_0$
b	_____	P/a .

Der Fall $q(z) = q = \text{konst.}$ soll jetzt neu in diese Arbeit aufgenommen werden.

Als Fundamentallösungen der Basisgleichung (25) hat man für ihn:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 3^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} 3^{3/2} \right), \\ r_2 &= 3^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} 3^{3/2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \alpha \beta^{-2/3} - \beta^{1/3} z, \\ \alpha \frac{P}{a} + \frac{q l}{a} + \frac{T^2}{4a^2}, \quad \beta &= \frac{q}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die Funktionen (58) sind in (26, 43, 45-47) zur Berechnung von W , $W \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$, a_{11} , a_{12} , b_{11} , b_{12} , $L(l)$, $L_1(l)$, $L_2(l)$ und $L_{12}(l)$ zu verwenden. Dann hat man alles für die Bestimmung von $\bar{\alpha}$ nach (51) zur Verfügung.

Die Rechnung muss im konkreten Fall numerisch erfolgen, da sich wegen der Kompliziertheit der Funktionen die nach (45) und (46) vorgeschriebenen Integrale wohl kaum geschlossen ausrechnen lassen. Die Durchführung der Rechnung wird zur Erläuterung der Formeln an einem Zahlenbeispiel vorgenommen. Für die Bestimmung der Funktionen $J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$ konnten die Tafeln von WATSON [6] benutzt werden, da die Argumente für das gewählte Beispiel alle positiv reell bleiben.

Gegeben seien:

$$q = 10^3 \text{ kp/m}, \quad T = 2 \cdot 10^{9/2} \text{ kp m}, \quad a = 10^5 \text{ kp m}^2, \quad l = 3 \text{ m}.$$

Es ist die Konstante W wegen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_2}{dz} &= \beta^{1/3} 3 J_{2/3} \left(\frac{2}{3} 3^{3/2} \right), \\ \frac{dr_1}{dz} &= -\beta^{1/3} 3 J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} 3^{3/2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

gleich

$$W = \beta^{1/3} 3^{3/2} (J_{1/3} J_{2/3} + J_{-1/3} J_{-2/3}) = \beta^{1/3} \frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3}. \quad (61)$$

Mit den gegebenen Werten errechnet man nach (59) und (21):

$$\alpha = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} + \frac{40 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{10}} = 13 \cdot 10^{-2}, \quad \beta = \frac{10^3}{10^6} = 10^{-2},$$

$$z = 13 \cdot 10^{-2} (10^{-2})^{-2/3} - (10^{-2})^{1/3} z = 0,215 (13 - z),$$

$$u = -\frac{2 \cdot 10^{9/2}}{2 \cdot 10^5} = -0,316.$$

Die weitere Rechnung wurde in Tabelle I durchgeführt. Mit den Werten der Tabelle I erhält man für $l = 3$ durch numerische Differentiation:

$$r'_1(3) = \frac{1}{12} (0,095 - 8 \cdot 0,352 + 8 \cdot 0,738 - 0,835) = 0,196,$$

$$r'_2(3) = \frac{1}{12} (-0,612 + 8 \cdot 0,428 + 8 \cdot 0,056 - 0,307) = 0,246.$$

Tabelle I

z	0	1	2	3	4	5	6
3	2,795	2,580	2,365	2,150	1,935	1,720	1,505
$3^{1/2}$	1,673	1,606	1,539	1,466	1,393	1,311	1,229
$3^{3/2}$	4,657	4,173	3,652	3,151	2,703	2,253	1,856
$\sigma = 2/3 \cdot 3^{3/2}$	3,11	2,78	2,44	2,10	1,80	1,50	1,24
$J_{1/3}(\sigma)$	-0,094	+0,059	+0,229	+0,396	+0,530	+0,637	+0,701
$J_{-1/3}(\sigma)$	-0,429	-0,381	-0,278	-0,128	+0,040	+0,234	+0,421
$r_1(z) = 3^{1/2} \cdot J_{1/3}(\sigma)$	-0,160	+0,095	+0,352	+0,581	+0,738	+0,835	+0,862
$r_2(z) = 3^{1/2} \cdot J_{-1/3}(\sigma)$	-0,718	-0,612	-0,428	-0,188	+0,056	+0,307	+0,517

Damit und mit $r_1(3)$ und $r_2(3)$ aus Tabelle I erhält man nach (43)

$$W \binom{0}{l} = -0,160 \cdot 0,246 + 0,718 \cdot 0,196 = 0,101,$$

$$a_{11} = -\frac{0,718 \cdot 0,196}{0,101} = -1,393,$$

$$a_{12} = \frac{0,718 \cdot 0,246}{0,101} = 1,749,$$

$$b_{11} = \frac{0,160 \cdot 0,196}{0,101} = 0,315,$$

$$b_{12} = -\frac{0,160 \cdot 0,246}{0,101} = -0,390$$

und nach (61)

$$W = \frac{3}{\pi} \cdot 0,215 \cdot 0,866 = 0,178.$$

Die Berechnung der in (47) festgelegten Werte erfolgt durch numerische Integration in Tabelle II, aus der man

$$S_{1c}^{i0} = 0,464, \quad S_{1s}^{i0} = -0,474, \quad S_{2c}^{i0} = -1,340, \quad S_{2s}^{i0} = 0,513,$$

$$\int_0^l r_2 \cos u z S_{1c} dz = -0,057, \quad \int_0^l r_2 \sin u z S_{1s} dz = -0,074,$$

$$\int_0^l r_1 \cos u z S_{2c} dz = -0,601, \quad \int_0^l r_1 \sin u z S_{2s} dz = -0,189$$

herausliest, womit man eben nach (47)

$$L_{12}(3) = -1,340 \cdot 0,464 - 0,474 \cdot 0,513 = -0,865,$$

$$L_1(3) = 0,464^2 + 0,474^2 = 0,440,$$

$$L_2(3) = 1,340^2 + 0,513^2 = 2,059,$$

$$L(3) = 0,601 + 0,189 - 0,057 - 0,074 = 0,659$$

erhält.

Jetzt steht alles zur Verfügung, um nach (51) errechnen zu können:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{0,178 \cdot 10^5} [(-1,393 + 0,390) \cdot 0,865 + 1,749 \cdot 0,440 + 0,315 \cdot 2,059 - 0,659] = 1,293 \cdot 10^{-4}.$$

Zum Vergleich sei noch nach Formel (41) gerechnet und dazu angenommen, dass die Längskraft nicht verteilt sei, sondern als Einzelkraft $P = 3 \cdot 10^3$ kp an den Enden der Welle angreift. Alle anderen Daten sollen unverändert bleiben.

Dann hat man nach (52):

$$v_0^2 = \frac{3 \cdot 10^3}{10^5} + \frac{40 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{10}} = 13 \cdot 10^{-2}, \quad v_0 = 3,606 \cdot 10^{-1},$$

und es ist bereits bekannt: $u = -0,316$, $u^2 = 10 \cdot 10^{-2}$. Hiermit gibt (57):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} = & \frac{1}{3 \cdot 10^3} \left[\frac{13 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-2}}{3,606 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{10^5}{3 \cdot 10^3} \cdot \operatorname{tg}(3,606 \cdot 10^{-1} \cdot 3) \right. \\ & \left. - \frac{2 \cdot 0,316}{3 \cdot 10^3} \cdot 10^5 \frac{\sin(0,316 \cdot 3)}{\cos(3,606 \cdot 10^{-1} \cdot 3)} - 3 \right] = 1,913 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Tabelle II

z	0	1	2	3
$u z$	0	-0,316	-0,632	-0,948
$\cos u z$	1	0,950	0,807	0,583
$\sin u z$	0	-0,301	-0,591	-0,812
$r_1 \cos u z$	-0,160	0,090	0,284	0,339
$r_1 \sin u z$	0	-0,029	-0,208	-0,472
$r_2 \cos u z$	-0,718	-0,581	-0,345	-0,110
$r_2 \sin u z$	0	0,184	0,253	0,153
$S_{1c}^0 = \int_0^z r_1 \cos u z dz$	0	-0,035	0,152	0,464
$S_{1s}^0 = \int_0^z r_1 \sin u z dz$	0	-0,015	-0,134	-0,474
$S_{2c}^0 = \int_0^z r_2 \cos u z dz$	0	-0,649	-1,112	-1,340
$S_{2s}^0 = \int_0^z r_2 \sin u z dz$	0	0,092	0,310	0,513
$S_{1s}^0 \cdot r_2 \cos u z$	0	0,020	-0,052	-0,051
$S_{1s}^0 \cdot r_2 \sin u z$	0	-0,003	-0,034	-0,073
$S_{2c}^0 \cdot r_1 \cos u z$	0	-0,058	-0,316	-0,454
$S_{2s}^0 \cdot r_1 \sin u z$	0	-0,003	-0,064	-0,242
$\int_0^z S_{1c}^0 r_2 \cos u z dz$	0	0,010	-0,006	-0,057
$\int_0^z S_{1s}^0 r_2 \sin u z dz$	0	-0,002	-0,020	-0,074
$\int_0^z S_{2c}^0 r_1 \cos u z dz$	0	-0,029	-0,216	-0,601
$\int_0^z S_{2s}^0 r_1 \sin u z dz$	0	-0,002	-0,036	-0,189

Nach (1) ist das Verhältnis der zugehörigen Drehzahlen (ω_{kq} für die kontinuierliche Längskraft q , ω_{kP} für die entsprechende Einzelkraft P):

$$\frac{\omega_{kq}}{\omega_{kP}} \sqrt{\frac{1,913}{1,293}} = 1,217,$$

woraus man ersieht, dass man bei Berücksichtigung der kontinuierlichen Verteilung der Last eine merkliche Erhöhung der kritischen Drehzahl erhalten kann.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik*, Bd. II, S. 176–180, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953).
- [2] H. ZIEGLER, *Ing. Arch.* 20, 377 (1952).
- [3] H. ZIEGLER, a. a. O., S. 386.
- [4] H. ZIEGLER, a. a. O., Seite 385.
- [5] H. ZIEGLER, a. a. O., S. 387, Formel (6.13).
- [6] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Teil 3, Cambridge 1944.

Summary

The paper deals with the critical angular velocities of continuously loaded shafts. A method is given for the solution of the problem and an example is presented which shows that the critical angular velocities increase, when, instead of a single concentrated load on the ends, the shaft carries a continuous load of the same magnitude.

(Eingegangen: 16. März 1960.)

Steady-State Thermal Stresses in an Elastic Cone¹⁾

By ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, Providence, R. I., U.S.A.²⁾

1. Introduction

The stress analysis of circular cones, and of bodies bounded by two coaxial conical surfaces with a common vertex, has received repeated attention in the linear theory of elasticity. Thus MICHELL [2]³⁾ established the solution appropriate to a semi-infinite solid cone under a concentrated force of arbitrary orientation, applied to the vertex. L. FÖPPL [3] disposed of the analogous pure

¹⁾ The results communicated in this paper were obtained in the course of an investigation conducted under Contracts Nonr 562(20) and Nonr 562(25) of Brown University with the Office of Naval Research in Washington, D. C.

²⁾ Division of Applied Mathematics, Brown University.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 495.

torsion problem. NEUBER [4] extended MICHELL's results to the case of a conical shell of linearly flaring thickness and, in addition, treated the flexure of such a shell due to a concentrated couple at the apex. Some of the solutions contained in [4] were recently re-derived in a different manner by KNOPS [5].

Certain axisymmetric problems concerning solid and hollow cones subjected to surface tractions which are distributed over the conical boundary were considered by MORGAN [6, 7]. In [6] the lateral loading is assumed proportional to an arbitrary real power of the distance from the vertex, while [7] presupposes piecewise continuous surface tractions which vanish identically beyond a fixed distance from the vertex.

In the present thermoelastic investigation we seek the thermal stresses produced in a solid, homogeneous and isotropic, elastic cone of semi-infinite extent, which is free from external loads but is exposed to a stationary discontinuous surface temperature: the tip of the cone (up to a given distance from the apex) is held at a constant temperature, while the remainder of the boundary is maintained at another uniform temperature.

Throughout the interior of the body the temperature field is required to obey the equation of heat-conduction. In the absence of thermoelastic coupling the stress inducing temperature field is therefore characterized as the solution of an independent Dirichlet problem. Since the solution to this heat-conduction problem was deduced separately in a previous publication we may proceed directly to the determination of the associated thermal stresses.

Evidently, the thermal-stress problem to be considered presently bears close mathematical relation to the ordinary elastostatic problems discussed by MORGAN [7]. The method of attack sketched in [7] is a generalization of a procedure employed by TRANTER [8] in connection with similar two-dimensional equilibrium problems for an elastic wedge. MORGAN's scheme rests on the use of the Mellin transform together with LOVE's stress function for torsionless rotational symmetry. In contrast to TRANTER's work, MORGAN's treatment is purely formal. He leaves the problem, except in the degenerate case of the half-space, after recording complex inversion integrals for the desired components of stress (and without specifying the appropriate choice of the corresponding path of integration). The chief complications inherent in the analysis, however, merely begin to arise at this stage; they stem from the need to secure a representation of the solution which is amenable to a complete numerical evaluation.

Instead of applying LOVE's stress function, we approach the thermoelastic problem at hand on the basis of the axisymmetric version of PAPKOVICH's general solution to the elastostatic field equations, which is readily modified to account for the presence of a temperature field⁴). With the aid of the Mellin

⁴) See [9], where this scheme was used in the steady-state thermoelastic study of an elastic half-space.

transform and of the corresponding inversion theorem we thus deduce complex integral representations for the required temperature stresses. These complex integrals, in turn, are transformed into real integrals involving Legendre functions of the first kind of complex degree. The validity of the solution in this final form is examined; its numerical evaluation is discussed in detail and is illustrated by a specific example. The method adopted here lends itself equally well to a complete isothermal stress analysis of an elastic cone which is subjected to piecewise continuous surface loads. In fact, the latter problem is distinctly less troublesome than the one under present consideration.

2. Formulation of Problem. Stress Functions

We recall at this place the general formulation of boundary-value problems in the classical theory of steady-state thermoelasticity. With reference to rectangular cartesian coordinates x_i ($i = 1, 2, 3$), and in the usual indicial notation⁵), the governing system of field equations may be taken in the following form:

$$T_{,ii} = 0, \quad (1)$$

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} = \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} T_{,i}, \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left\{ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\delta_{ij}}{1-2\nu} [\nu u_{k,k} - (1+\nu)\alpha T] \right\}. \quad (3)$$

Here $T(x_1, x_2, x_3)$, $u_i(x_1, x_2, x_3)$ and $\tau_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ denote the temperature field, the components of the displacement vector, and the components of the stress tensor, respectively. The constants α , μ , and ν , in this order, stand for the coefficient of thermal expansion, the shear modulus, and Poisson's ratio, whereas δ_{ij} designates KRONECKER'S delta. Equation (1) is the equation of heat-conduction; (2) and (3) represent the displacement-equations of equilibrium (in the absence of body forces) and the stress-displacement relations.

The foregoing field equations, which must hold throughout the space region D occupied by the medium, are to be supplemented by appropriate boundary conditions. If the temperature itself is prescribed along the boundary B , and provided the surface tractions vanish identically, one has on B

$$T = T^*(x_1, x_2, x_3), \quad (4)$$

$$\tau_{ij} l_j = 0, \quad (5)$$

where T^* is the given distribution of the surface temperature and l_j denotes the components of the unit normal to the boundary.

⁵) Summation over repeated subscripts is implied. Subscripts preceded by a comma indicate partial differentiation with respect to the corresponding coordinate.

Once the independent Dirichlet problem characterized by (1), (4) has been solved, the temperature field $T(x_1, x_2, x_3)$ in (2), (3) is known. The integration of (2), (3), subject to (4), may then be approached conveniently with the aid of an obvious modification of PAPKOVICH's [10] general solution to the isothermal elastostatic field equations which was introduced previously in [9]. Thus, the complete integral of (2) admits the representation

$$2\mu u_i = \varphi_{,i} - (3 - 4\nu)\psi_i + x_j\psi_{j,i}, \quad (6)$$

$$\varphi_{,jj} = \frac{2(1-\nu)\mu}{1-\nu} T, \quad \psi_{i,jj} = 0. \quad (7)$$

Consequently, the determination of the thermal stresses (and displacements) is reduced to finding stress functions φ, ψ_i which satisfy (7) and – in the sense of (3), (6) – generate stresses conforming to (5).

With a view toward the particular thermoelastic problem described in the preceding section, it is expedient to introduce spherical coordinates (r, θ, ϕ) by means of the mapping

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi, & x_2 &= r \sin \theta \sin \phi, & x_3 &= r \cos \theta; \\ 0 &\leq r < \infty, & 0 &\leq \theta \leq \pi, & 0 &\leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Suppose the axis of the cone in question coincides with the x_3 -axis, let its apex be at the origin, and let θ_0 ($0 < \theta_0 \leq \pi/2$) be its semi-opening angle. Further, it is helpful to introduce the auxiliary variables

$$p = \cos \theta, \quad q = \sin \theta; \quad p_0 = \cos \theta_0, \quad q_0 = \sin \theta_0. \quad (9)$$

The region **D** is in this instance then given by $0 < r < \infty$, $p_0 < p \leq 1$ ($0 \leq p_0 < 1$), while the boundary **B** corresponds to $p = p_0$.

By virtue of the rotationally symmetric character of the problem, the temperature field is independent of the longitude ϕ , so that the Laplace equation (1) here becomes

$$\nabla^2 T(r, p) = 0, \quad (10)$$

with

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left[(1 - p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]. \quad (11)$$

On the other hand, the boundary condition (4) to be met at present, appears as

$$T(r, p_0) = T_0 \quad (0 < r < a), \quad T(r, p_0) = 0 \quad (a < r < \infty). \quad (12)$$

In addition we require that

$$T(r, p) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty \quad (13)$$

and that the temperature be bounded in **D** + **B**.

Two alternative forms of the solution to the foregoing heat-conduction problem were established in [1]. We cite here merely the integral version

$$T(\varrho, \rho) = \frac{T_0}{2\pi\sqrt{\varrho}} \int_0^\infty \frac{\beta - 2\xi\gamma}{\xi^2 + 1/4} \cdot \frac{P_{-1/2+i\xi}(\rho)}{P_{-1/2+i\xi}(\rho_0)} d\xi \quad (14)$$

where

$$\varrho = \frac{r}{a}, \quad \beta(\xi, \varrho) = \cos(\xi \log \varrho), \quad \gamma(\xi, \varrho) = \sin(\xi \log \varrho), \quad (15)$$

and $P_{-1/2+i\xi}$ stands for the Legendre function of the first kind of degree $-1/2 + i\xi$, which is real-valued for real arguments.

In the case of axisymmetry about the x_3 -axis, the general solution (6), (7) of the equilibrium equations (2) remains complete if q and ψ_i are restricted by

$$\varphi = \varphi(r, \rho), \quad \psi_3 = \psi(r, \rho), \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (16)$$

whence (7) now reduce to

$$\nabla^2 \varphi(r, \rho) = \frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} T, \quad \nabla^2 \psi(r, \rho) = 0, \quad (17)$$

in which the Laplace operator ∇^2 is once more given by (11). Equations (6), when referred to spherical coordinates, pass over into

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho r \frac{\partial \psi}{\partial r} - (3-4\nu) \rho \psi, \\ 2\mu u_\theta &= -\frac{q}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho q \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + (3-4\nu) q \psi. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

The spherical displacement component u_ϕ , of course, vanishes identically.

On substituting from (18) into the spherical counterpart of (3), one arrives at formulae relating the spherical components of stress to the stress functions $\varphi(r, \rho)$ and $\psi(r, \rho)$. These formulae, after some simplifications based on (17), read:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= -\frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} T + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ &\quad + r \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2(1-\nu) \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2\nu q^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \\ \tau_{\theta\theta} &= -\frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} T + \frac{q^2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\rho q^2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + (1-2\nu) \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} - [1 + (1-2\nu) q^2] \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{\phi\phi} &= -\frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} T - \frac{p}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial p} + (1-2\nu) \left[p \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{q^2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial p} \right], \\
 \tau_{r\theta} &= q \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial r} \right. \\
 &\quad \left. - p \frac{\partial^2\psi}{\partial p \partial r} + (1-2\nu) \frac{\partial\psi}{\partial r} + 2(1-\nu) \frac{p}{r} \frac{\partial\psi}{\partial p} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

The remaining shear stresses $\tau_{\phi r}$ and $\tau_{\phi\theta}$ vanish.

Condition (5) is met for the surface of the cone if

$$\tau_{\theta\theta}(r, p_0) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, p_0) = 0 \quad (0 < r < \infty). \quad (20)$$

To these boundary conditions we adjoin the regularity conditions

$$\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{\phi\phi}, \tau_{r\theta} \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad (21)$$

as well as the requirement that the entire stress distribution be bounded in $\mathbf{D} + \mathbf{B}$, i. e. for $0 \leq r < \infty$, $p_0 \leq p \leq 1$. The problem under consideration thus reduces to finding solutions q and ψ of (17) such that the stresses (19) obey (20) and (21).

3. Application of the Mellin Transform⁶⁾

Let $\hat{T}(p, s)$, $\hat{q}(p, s)$, and $\hat{\psi}(p, s)$ be the Mellin transforms with respect to r of $T(r, p)$, $r^{-2}\varphi(r, p)$, and $r^{-1}\psi(r, p)$, s being the transform parameter. Thus

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{T}(p, s) &= \int_0^\infty T(r, p) r^{s-1} dr, \\
 \hat{q}(p, s) &= \int_0^\infty \varphi(r, p) r^{s-3} dr, \\
 \hat{\psi}(p, s) &= \int_0^\infty \psi(r, p) r^{s-2} dr.
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Further, suppose

$$r^{-2}\varphi, \quad r^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad r^{-1}\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = O(r^{-s_*}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (s_* > 0). \quad (23)$$

⁶⁾ See DOETSCH [11] for an exposition of the theory of the Mellin transform.

In addition, assume that the four functions appearing in (23) remain bounded as $r \rightarrow 0$. Then (22) and integration by parts imply the identities

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{s-2} dr &= -(s-2) \hat{\varphi}, & \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r^{s-1} dr &= (s-1)(s-2) \varphi', \\ \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial r} r^{s-1} dr &= -(s-1) \hat{\psi}, & \int_0^\infty \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} r^s dr &= s(s-1) \hat{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

provided s is confined to the strip $0 < \operatorname{Re}(s) \leq s_*$ of the complex s -plane. We now formally apply the Mellin transform to (17), after multiplying the second of (17) by r . Bearing in mind (11), (22), and (24), we obtain in this manner the Legendre equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[(1-p^2) \frac{d\hat{\varphi}}{dp} \right] + (s-3)(s-2) \hat{\varphi} &= \frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} \hat{T}, \\ \frac{d}{dp} \left[(1-p^2) \frac{d\hat{\psi}}{dp} \right] + (s-2)(s-1) \hat{\psi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Next let $\hat{u}_r(p, s)$, $\hat{u}_\theta(p, s)$ be the Mellin transforms of $r^{-1} u_r(r, p)$, $r^{-1} u_\theta(r, p)$, and denote by $\hat{\tau}_{rr}(p, s)$, $\hat{\tau}_{\theta\theta}(p, s)$, etc. the transforms of the corresponding components of stress. Explicitly,

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_r(p, s) &= \int_0^\infty u_r(r, p) r^{s-2} dr, \quad \text{etc.}, \\ \hat{\tau}_{rr}(p, s) &= \int_0^\infty \tau_{rr}(r, p) r^{s-1} dr, \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Equations (18), (19), because of (22), (24), (25), (26), now yield

$$\left. \begin{aligned} 2\mu \hat{u}_r &= -(s-2) \hat{\varphi} - p[s+2(1-2\nu)] \hat{\psi}, \\ 2\mu \hat{u}_\theta &= -q \left[\frac{d\hat{\varphi}}{dp} + p \frac{d\hat{\psi}}{dp} - (3-4\nu) \hat{\psi} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{rr} &= -\frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} \hat{T} + (s-1)(s-2) \hat{\varphi} \\ &\quad + (s-1)(s+2-2\nu) p \hat{\psi} - 2\nu q^2 \frac{d\hat{\psi}}{dp}, \\ \hat{\tau}_{\theta\theta} &= -(s-2)^2 \hat{\varphi} + p \frac{d\hat{\varphi}}{dp} \\ &\quad - (s-1)(s-1-2\nu) p \hat{\psi} + [1-(3-2\nu)q^2] \frac{d\hat{\psi}}{dp}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{\phi\phi} &= -\frac{2(1+\nu)\mu\alpha}{1-\nu} \hat{T} - (s-2)\hat{\phi} - p \frac{d\hat{\phi}}{dp} \\ &\quad - (1-2\nu)(s-1)p\hat{\psi} - [1 - (1-2\nu)q^2] \frac{d\hat{\psi}}{dp}, \\ \hat{\tau}_{r\theta} &= q \left[(s-1) \frac{d\hat{\psi}}{dp} - (1-2\nu)(s-1)\hat{\psi} + (s+1-2\nu)p \frac{d\hat{\psi}}{dp} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Finally, the boundary conditions (20) in the transform domain become

$$\hat{\tau}_{\theta\theta}(p_0, s) = 0, \quad \hat{\tau}_{r\theta}(p_0, s) = 0. \quad (29)$$

The Mellin transform of the particular temperature field (14) is given by⁷⁾

$$\hat{T}(p, s) = \frac{T_0 a^s}{s} \frac{P_{s-1}(p)}{P_{s-1}(p_0)}. \quad (30)$$

Taking account of (30) and bearing in mind that the thermal displacements and stresses sought must be regular along the axis of the cone, i. e. for $p = 1$, we take the solution of (25) in the form

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}(p, s) &= A(s) P_{s-3}(p) - \frac{(1+\nu)\mu\alpha T_0 a^s P_{s-1}(p)}{(1-\nu)s(2s-3)P_{s-1}(p_0)}, \\ \hat{\psi}(p, s) &= B(s) P_{s-2}(p). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

The arbitrary functions $A(s)$ and $B(s)$ appearing in (31) are to be determined consistent with the transformed boundary conditions. To this end we substituted from (31) into the second and last of (28), and subsequently invoke (29). The solution of the resulting pair of simultaneous equations in $A(s)$ and $B(s)$ may be simplified with the aid of the recursion relations⁸⁾

$$\left. \begin{aligned} q^2 P'_s(p) &= -s[p P_s(p) - P_{s-1}(p)], \\ (2s+1)p P_s(p) &= (s+1)P_{s+1}(p) + sP_{s-1}(p). \end{aligned} \right\} \quad (32)^{9)}$$

Setting

$$\left. \begin{aligned} \omega(p_0, s) &= 2(1-\nu)p_0^2 - (s-1)(s-2)q_0^2, \\ \Lambda(p_0, s) &= -(s-1)^2(s-2)^2 p_0 [P_{s-2}(p_0)]^2 \\ &\quad - (s-1)(s-2)q_0^2 P_{s-2}(p_0) P'_{s-2}(p_0) \\ &\quad + [2(1-\nu) - (s-1)(s-2)q_0^2] p_0 [P'_{s-2}(p_0)]^2, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

⁷⁾ See Equation (10) of [1].

⁸⁾ See, for example, [12], p. 161.

⁹⁾ Primes attached to Legendre functions are used henceforth to indicate differentiation with respect to the argument shown.

and making repeated use of (32), one may put the final formulae for \hat{q} , $\hat{\psi}$ into the form

$$\left. \begin{aligned} \hat{q} = & -\frac{(1+\nu)\mu\alpha T_0}{1-\nu} \frac{a^s p P_{s-2}(p)}{s(s-1)P_{s-1}(p_0)} \\ & - \frac{2(1+\nu)\mu\alpha T_0 a^s}{s\omega(p_0, s)} \left[\frac{1+q_0^2(s-2)}{s-1} \frac{P_{s-3}(p)}{P_{s-1}(p_0)} \right. \\ & + \frac{p_0}{\Delta(p_0, s)} \{p_0(s-1)(s-2)(s-2\nu)P_{s-2}(p_0) \\ & \left. + 2(1-\nu)[1+q_0^2(s-2)]P'_{s-2}(p_0)\} P_{s-3}(p) \right], \\ \hat{\psi} = & -\frac{(1+\nu)\mu\alpha T_0 a^s (s-2)P_{s-2}(p)}{s\omega(p_0, s)} \left\{ \frac{q_0^2}{(1-\nu)P_{s-1}(p_0)} \right. \\ & \left. + \frac{2p_0(s-1)}{\Delta(p_0, s)} [p_0(s-2)P_{s-2}(p_0) + q_0^2 P'_{s-2}(p_0)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Inserting (34) in (28), and once again using the recursion relations (32), we ultimately reach the following expressions for the transformed spherical stress components, in which

$$E = 2(1+\nu)\mu \quad (35)$$

is the modulus of elasticity.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{rr} = & \frac{E\alpha T_0 a^s}{s\omega(p_0, s)} \left\{ -\frac{1}{P_{s-1}(p_0)} ([2p_0^2 + q^2(s-1)]P_{s-1}(p) - p q^2 P'_{s-1}(p)) \right. \\ & - \frac{p_0(s-1)}{\Delta(p_0, s)} (p(s-2)\{2p_0(s-1)(s-2)P_{s-2}(p_0) \\ & - [2(1-\nu)p_0^2 - q_0^2 s(s-1)]P'_{s-2}(p_0)\} P_{s-2}(p) \\ & + q^2\{p_0(s-2)[2\nu - s(s-1)]P_{s-2}(p_0) \\ & \left. - 2[1-\nu+q_0^2(s-2)]P'_{s-2}(p_0)\} P'_{s-2}(p)) \right\}, \\ \hat{\tau}_{\theta\theta} = & \frac{E\alpha T_0 a^s}{s\omega(p_0, s)} \left\{ \frac{1}{P_{s-1}(p_0)} ([p_0^2(s-2) - p^2(s-1)]P_{s-1}(p) \right. \\ & - p(p_0^2 - p^2)P'_{s-1}(p)) \\ & - \frac{p_0}{\Delta(p_0, s)} (p(s-1)(s-2)\{p_0(s-1)(s-2)P_{s-2}(p_0) \\ & + [2(1-\nu)p_0^2 - q_0^2(s-1)(s-3)]P'_{s-2}(p_0)\} P_{s-2}(p) \\ & - \{p_0(s-1)(s-2)[2(1-\nu)p^2 - q^2(s-2)^2]P_{s-2}(p_0) \\ & + [2(1-\nu)p_0^2 - 2(1-\nu)(p_0^2 - p^2)(s-1) \\ & \left. - q_0^2 p^2(s-1)(s-2)]P'_{s-2}(p_0)\} P'_{s-2}(p)) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_{\phi\phi} &= \frac{E \propto T_0 a^s}{s \omega(p_0, s)} \left\{ -\frac{1}{P_{s-1}(p_0)} ([p_0^2 - q_0^2 (s-1)^2] P_{s-1}(p) + q_0^2 p P'_{s-1}(p)) \right. \\
 &\quad + \frac{p_0}{A(p_0, s)} ((1-2\nu) p (s-1)^2 (s-2) [p_0 (s-2) P_{s-2}(p_0) \\
 &\quad + q_0^2 P'_{s-2}(p_0)] P_{s-2}(p) - \{p_0 (s-1) (s-2) [2(1-\nu) \\
 &\quad + (1-2\nu) q^2 (s-2)] P_{s-2}(p_0) - [2(1-\nu) - q_0^2 (s-2) (s-3-2\nu) \\
 &\quad + (1-2\nu) q_0^2 q^2 (s-1) (s-2)] P'_{s-2}(p_0)\} P'_{s-2}(p)) \Big\}, \\
 \hat{\tau}_{r\theta} &= \frac{E \propto T_0 a^s q}{s \omega(p_0, s)} \left\{ -\frac{1}{P_{s-1}(p_0)} (p (s-1) P_{s-1}(p) + (p_0^2 - p^2) P'_{s-1}(p)) \right. \\
 &\quad - \frac{p_0 (s-1)}{A(p_0, s)} [(s-2) \{p_0 (s-1)^2 (s-2) P_{s-2}(p_0) \\
 &\quad + [2(1-\nu) p_0^2 + q_0^2 (s-1)] P'_{s-2}(p_0)\} P_{s-2}(p) \\
 &\quad - p \{2(1-\nu) p_0 (s-2) P_{s-2}(p_0) + [2(1-\nu) \\
 &\quad - q_0^2 (s-1) (s-2)] P'_{s-2}(p_0)\} P'_{s-2}(p)] \Big\}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

The analogous formulae for \hat{u}_r and \hat{u}_θ are omitted here since we shall not pursue further the explicit determination of the thermal displacements.

In order to pass from the transformed stress functions and stresses to their antecedents in the physical domain, we appeal to the inversion theorem for the Mellin transform. By virtue of (22) and (26) we are thus led to

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, p) &= \frac{r^2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\varphi}(p, s) r^{-s} ds, \\
 \psi(r, p) &= \frac{r}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\psi}(p, s) r^{-s} ds,
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\tau_{rr}(r, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\tau}_{rr}(p, s) r^{-s} ds, \quad \text{etc.} \tag{38}$$

The integrands in (37), (38) are fully accounted for through (34), (36). This completes the formal solution in complex integral form of the thermal-stress problem at hand. The determination of the parameter c which enters through the limits of integration in (37), (38), will be discussed in the succeeding section.

4. Real Integral Representation of the Thermal Stresses

The solution just obtained is evidently not affected by the particular value of c as long as the position of the line of integration $\text{Re}(s) = c$ is varied within one and the same strip of regularity of the integrands in (37), (38). The selection of the appropriate strip of regularity, in turn, is dictated by conditions (21), along with the requirement that the stresses remain bounded as $r \rightarrow 0$.

If we take $c = 3/2$, the line of integration is given by

$$s = \frac{3}{2} + i \xi \quad (-\infty < \xi < \infty) . \tag{39}$$

This choice of c is suggested by the observation that the Legendre function P_{s-2} , as well as the auxiliary functions ω and Δ occurring in (34), (36), are all real-valued when s assumes the values (39), as may be inferred from the Mehler-Dirichlet integral¹⁰⁾

$$P_s(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos [(s + 1/2) \lambda] \, d\lambda}{\sqrt{\cos \lambda - \cos \theta}} \quad (0 < \theta < \pi) . \tag{40}$$

Further, if $\text{Re}(s) = 3/2$, we note on the basis of the recursion formulae (32), that all Legendre functions entering (34), (36) may be expressed as linear combinations of the real-valued functions P'_{s-2} and P'_{s-1} , with coefficients which are rational functions of s . Thus

$$\left. \begin{aligned} (s-1) P_{s-1}(\phi) &= \phi (s-1) P_{s-2}(\phi) - q^2 P'_{s-2}(\phi) , \\ (s-2) P_{s-3}(\phi) &= \phi (s-2) P_{s-2}(\phi) + q^2 P'_{s-2}(\phi) , \\ P'_{s-1}(\phi) &= (s-1) P_{s-2}(\phi) + \phi P'_{s-2}(\phi) . \end{aligned} \right\} \tag{41}$$

Also, the identities (24), underlying the developments in Section 3, are evidently valid on $\text{Re}(s) = 3/2$, provided s_* in (23) obeys the inequality $s_* \geq 3/2$.

We show next that the integrands in (37), (38), regarded as functions of s , are free from singularities if (39) holds, provided

$$0 < r < \infty , \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad \left(0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \right) , \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} .$$

It is clear from the structure of (34), (36) that the singularities in question could arise only from the zeros of the functions

$$\Delta(s) = s (s-1) \omega(\phi_0, s) P_{s-1}(\phi_0) , \quad \Omega(s) = s \omega(\phi_0, s) \Delta(\phi_0, s) . \tag{42}$$

It is easy to see with the aid of the first of (33) that $\omega(\phi_0, s)$ cannot vanish when s is restricted by (39), the same being true of the factors s and $s-1$ in (42).

¹⁰⁾ See [13], p. 315. Recall that $P_s(1) = 1$.

The roots of $P_s(p_0)$, considered as a function of s , are known to be real¹¹⁾. By (40), $P_{1/2}(p_0)$ is positive for $0 \leq p_0 < 1$, so that $P_{s-1}(p_0)$, and hence $\Delta(s)$, has no zeros on the line of integration (39).

To confirm that $\Omega(s)$ is also free from zeros we have yet to show that $\Delta(p_0, s)$ does not vanish on $\text{Re}(s) = 3/2$. For this purpose we recall first certain properties of the associated Legendre functions of the first kind, which will also be needed at a later stage. For arbitrary complex degree s and positive integral order m , we have the relations¹²⁾

$$P_s^m(p) = (-1)^m q^m \frac{d^m P_s(p)}{dp^m}, \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} P_s^m(p) &= (-1)^m \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(s-m+1)} P_s^{-m}(p), \\ P_s^m(p) &= \frac{(-1)^m \Gamma(s+m+1) q^m}{2^m |m| \Gamma(s-m+1)} [1 + O(q^2)] \quad \text{as } \theta \rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

provided Γ denotes the Gamma-function, and the recursion formula

$$P_s^{m+2}(p) + 2(m+1) \frac{p}{q} P_s^{m+1}(p) + (s-m)(s+m+1) P_s^m(p) = 0. \quad (45)$$

Finally, the appropriate generalization of (40) reads

$$P_s^m(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q^m}{\Gamma(1/2-m)} \int_0^\theta \frac{\cos[(s+1/2)\lambda] d\lambda}{(\cos \lambda - \cos \theta)^{m+1/2}} \quad (0 < \theta < \pi, \quad \text{Re}(m) < 1/2). \quad (46)$$

We now substitute for s from (39) into the second of (33), write $\Delta(p_0, \xi)$ in place of $\Delta[p_0, s(\xi)]$, and prove that $\Delta(p_0, \xi)$ is negative. To this end we differentiate $\Delta(p_0, \xi)$ with respect to θ_0 and find with the aid of (43), (45), and of the Legendre equation that

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta(p_0, \xi)}{\partial \theta_0} &= -\frac{1}{q_0} P_{-1/2+i\xi}^1(p_0) [(1+\nu)(\xi^2+1/4) P_{-1/2+i\xi}^1(p_0) \\ &\quad + (1-\nu) P_{-1/2+i\xi}^3(p_0)] \quad (0 < \theta_0 \leq \pi/2). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

According to (46),

$$P_{-1/2+i\xi}^m(p_0) > 0 \quad (m = -1, -3), \quad (0 < \theta_0 \leq \pi/2) \quad (48)$$

and, in view of the first of (44), these inequalities remain valid also for $m = 1, 3$

¹¹⁾ See [14], p. 91.

¹²⁾ See [12], p. 140 et seq.

¹³⁾ Here $P_{-1/2+i\xi}^1$ and $P_{-1/2+i\xi}^3$ are associated Legendre functions of order one and three respectively.

Consequently, (47) yields

$$\frac{\partial \Delta(p_0, \xi)}{\partial \theta_0} < 0 \quad \left(0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (49)$$

while from (43) and the second of (44),

$$\Delta(p_0, \xi) \rightarrow -\frac{1}{2} (1 + \nu) \left(\xi^2 + \frac{1}{4}\right)^2 < 0 \quad \text{as } \theta_0 \rightarrow 0. \quad (50)$$

It follows from (49), (50) that $\Delta(p_0, \xi) < 0$ for $0 < \theta_0 \leq \pi/2$ and $-\infty < \xi < \infty$. We are now in a position to conclude that the integrands in (37), (38) are indeed regular for $c = 3/2$, as was claimed earlier. Instead of pursuing the justification of this choice of c further at present, we continue to proceed formally for the time being and subject the integrals (37), (38) to the change of the variable of integration (39). This results in a *real* integral representation of the solution, the validity of which will be examined subsequently.

The highly cumbersome computation just alluded to may be outlined as follows. We first eliminate P_{s-1} , P_{s-3} , P'_{s-1} from (34), (36) by means of (41), and refer (37), (38) to the new (real) variable of integration ξ defined by (39). The corresponding range of integration becomes $-\infty < \xi < \infty$. We then decompose the transformed integrands into their real and imaginary parts, which are found to be odd and even functions of ξ , respectively¹⁴. Consequently, the real parts do not contribute to the final integrals, which must of course be purely imaginary since q , ψ , and the physical components of stress, have to be real-valued. Moreover, since the imaginary parts are even in ξ , the range of integration may be reduced to the interval $0 \leq \xi < \infty$.

With a view toward listing the final results in a reasonably compact form, it is expedient to introduce certain abridged notations. Let

$$\eta(\xi) = \xi^2 + \frac{1}{4}, \quad \zeta(\xi, \varrho) = \frac{3\beta(\xi, \varrho) - 2\xi\gamma(\xi, \varrho)}{\xi^2 + 9/4}, \quad (51)$$

where ϱ , $\beta(\xi, \varrho)$, and $\gamma(\xi, \varrho)$ are given by (15). Writing

$$P(\xi, p) = P_{-1/2+i\xi}(p), \quad (52)$$

let

$$X(\xi, p, p_0) = \frac{P(\xi, p)}{P(\xi, p_0)}, \quad Y(\xi, p, p_0) = \frac{P'(\xi, p)}{P(\xi, p_0)}, \quad Y_0(\xi, p_0) = Y(\xi, p_0, p_0), \quad (53)$$

in which $P'(\xi, p)$ stands for the derivative of $P(\xi, p)$ with respect to the argument p . Next, set

$$\left. \begin{aligned} \kappa(\xi, \varrho, p_0) &= [p_0 - 2q_0^2 Y_0(\xi, p_0)] \beta(\xi, \varrho) - 2p_0 \xi \gamma(\xi, \varrho), \\ \sigma(\xi, \varrho, p_0) &= [2p_0 - q_0^2 Y_0(\xi, p_0)] \zeta(\xi, \varrho) - 2p_0 \beta(\xi, \varrho). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

¹⁴ Note that $P_{-1/2+i\xi}(p)$, and hence $P'_{-1/2+i\xi}(p)$, is an even function of ξ since $P_{-s-1} = P_s$.

Finally, with reference to the definitions (33) of $\omega(p_0, s)$ and $\Delta(p_0, s)$, set

$$\omega(\xi, p_0) = \omega\left(p_0, \frac{3}{2} + i\xi\right), \quad \Delta(\xi, p_0) = \Delta\left(p_0, \frac{3}{2} + i\xi\right), \quad (55)$$

and define new functions $\Delta_1(\xi, p_0)$, $\Delta_2(\xi, p_0)$ through

$$\Delta_1(\xi, p_0) = \frac{\omega(\xi, p_0)}{P(\xi, p_0)^2} \left(\frac{1}{2} + i\xi \right) P_{1/2-i\xi}(p_0)^2, \quad \Delta_2(\xi, p_0) = \frac{\omega(\xi, p_0) \Delta(\xi, p_0)}{P(\xi, p_0)^2}. \quad (56)$$

From (55), (56), with the aid of (33), the first of (41), as well as (51), (53), follow

$$\left. \begin{aligned} \omega(\xi, p_0) &= 2(1-\nu) p_0^2 + q_0^2 \eta(\xi), \\ \Delta_1(\xi, p_0) &= \omega(\xi, p_0) [p_0^2 \eta(\xi) - p_0 q_0^2 Y_0(\xi, p_0) + q_0^4 Y_0^2(\xi, p_0)], \\ \Delta_2(\xi, p_0) &= \omega(\xi, p_0) \{-p_0 \eta^2(\xi) + q_0^2 \eta(\xi) Y_0(\xi, p_0) + p_0[2(1-\nu) \\ &\quad + q_0^2 \eta(\xi)] Y_0^2(\xi, p_0)\}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

The desired real integral representation for the stress functions and stresses may now be put into the following form in which the auxiliary functions η , ξ , X , Y , Y_0 , κ , σ , ω , Δ_1 , and Δ_2 are understood to be referred to the corresponding arguments appearing in the defining equations (51), (53), (54), and (57).

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\varrho, p)}{E \propto T_0} &= \frac{a^2 \varrho^{1/2}}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ -\frac{p \omega \sigma X}{2(1-\nu) \Delta_1} + \frac{1}{\Delta_1} [p X \{(1-2q_0^2) \sigma + q_0^2 \kappa\} \right. \\ &\quad - \frac{2q_0^2 q^2 \beta Y}{\eta} \{p_0 \eta - Y_0\} - \frac{q^2 \xi Y}{\eta} \{p_0 \eta (1-2q_0^2) \\ &\quad + q_0^2 (1+q_0^2 \eta) Y_0\}] - \frac{p_0}{\Delta_2} [2p \beta X \{p_0 \eta - 2(1-\nu) q_0^2 Y_0\} \\ &\quad - 2p \xi X \{\nu p_0 \eta + (1-\nu) (1-2q_0^2) Y_0\} \\ &\quad - \frac{4(1-\nu) q^2 \beta Y}{\eta} \{p_0 \eta - Y_0\} + \frac{q^2 \xi Y}{\eta} \{p_0 \eta [\eta + 2(1-\nu)] \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) (1+q_0^2 \eta) Y_0\}] \right\} d\xi, \end{aligned}$$

$$\frac{\psi(\varrho, p)}{E \propto T_0} = \frac{a}{2\pi \varrho^{1/2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{q_0^2 \eta \sigma X}{2(1-\nu) \Delta_1} + \frac{p_0 \eta X}{\Delta_2} [p_0 \beta - \xi \{2p_0 - q_0^2 Y_0\}] \right\} d\xi.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{rr}(q, p)}{E \propto T_0} &= \frac{1}{2 \pi q^{3/2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A_1} [\sigma \{2 p_0^2 p X - q^2 (1 - 2 p_0^2) Y\} \right. \\
&\quad - \kappa \{2 p_0^2 p X - q^2 Y\}] - \frac{p_0}{A_2} [4 \beta \{p_0 q^2 \eta Y - q_0^2 p \eta X Y_0 \\
&\quad - (1 - \nu) q^2 Y Y_0\} + \zeta \{2 p_0 p \eta^2 X - p_0 q^2 \eta [\eta + 2 (1 + \nu)] Y \\
&\quad + p \eta [q_0^2 (\eta + 2) + 2 (1 - \nu) p_0^2] X Y_0 \\
&\quad \left. + 2 q^2 [q_0^2 \eta + 1 - \nu] Y Y_0\} \right\} d\xi, \\
\frac{\tau_{\theta\theta}(q, p)}{E \propto T_0} &= \frac{1}{2 \pi q^{3/2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A_1} [\sigma \{p_0^2 p X + [p_0^2 - p^2 + p_0^2 q^2] Y\} \right. \\
&\quad - \kappa \{p_0^2 p X + (p_0^2 - p^2) Y\}] - \frac{p_0}{A_2} [2 \beta \{p_0 q^2 \eta Y - q_0^2 p \eta X Y_0 \\
&\quad - 2 (1 - \nu) (p_0^2 - p^2) Y Y_0\} + \zeta \{p_0 p \eta^2 X + p_0 \eta [q^2 (\eta - 2) \\
&\quad + 2 (1 - \nu) p^2] Y - p \eta [q_0^2 (\eta - 1) + 2 (1 - \nu) p_0^2] X Y_0 \\
&\quad \left. - [q_0^2 p^2 \eta + 2 (1 - \nu) (2 p_0^2 - p^2)] Y Y_0\} \right\} d\xi, \\
\frac{\tau_{\phi\phi}(q, p)}{E \propto T_0} &= \frac{1}{2 \pi q^{3/2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A_1} [\sigma \{p [q_0^2 \eta + p_0^2] X + [q_0^2 q^2 \eta + 1 \right. \\
&\quad - p_0^2 p^2] Y\} - \kappa \{p [q_0^2 \eta + p_0^2] X + q_0^2 Y\}] \\
&\quad + \frac{p_0}{A_2} [2 \beta \{(1 - 2 \nu) p_0 q^2 \eta Y - (1 - 2 \nu) q_0^2 p \eta X Y_0 \\
&\quad - 2 (1 - \nu) q_0^2 Y Y_0\} + \zeta \{(1 - 2 \nu) p_0 p \eta^2 X \\
&\quad + 2 p_0 \eta [q_0^2 + (1 - \nu) (1 - 2 q_0^2)] Y + (1 - 2 \nu) q_0^2 p \eta X Y_0 \\
&\quad \left. - [q_0^2 \eta (1 + q^2) - 2 (1 - \nu) (q_0^2 q^2 \eta + 1 - 2 p_0^2)] Y Y_0\} \right\} d\xi, \\
\frac{\tau_{r\theta}(q, p)}{E \propto T_0} &= \frac{q}{2 \pi q^{3/2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A_1} [\sigma \{p_0^2 (\eta + 1) X - q_0^2 p Y\} - \kappa \{p_0^2 X - q_0^2 p Y\}] \right. \\
&\quad - \frac{p_0}{A_2} [2 \beta \{p_0 \eta^2 X - q_0^2 \eta X Y_0 - p [q_0^2 \eta + 2 (1 - \nu)] Y Y_0\} \\
&\quad - \zeta \{p_0 \eta^2 X - 2 (1 - \nu) p_0 p \eta Y - \eta [q_0^2 - 2 (1 - \nu) p_0^2] X Y_0 \\
&\quad \left. - p [q_0^2 \eta + 2 (1 - \nu)] Y Y_0\} \right\} d\xi.
\end{aligned}
\tag{59}$$

5. Convergence Considerations. Verification of Solution

We now examine the validity of the formal solution in real integral form deduced in the preceding section. With a view toward establishing the convergence of the improper integrals in (58), (59), we consider first the asymptotic behavior of the corresponding integrands for large values of the variable of integration ξ . In this connection we recall the asymptotic expansions¹⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} P_s^m(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(s+3/2)} \left\{ \sin\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2-1/4}{2q(s+3/2)} \sin\left[\left(s+\frac{3}{2}\right)\theta + \left(m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + O(s^{-2}) \right\} \\ \text{as } |s| &\rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0), \\ \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s+n)} &= s^{m-n} \left[1 + \frac{(m-n)(m+n-1)}{2s} + O(s^{-2}) \right] \\ \text{as } |s| &\rightarrow \infty \quad (m, n \dots \text{real}, \quad -\pi < \arg(s) < \pi). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

From (60), (52), (43) follows

$$\left. \begin{aligned} P(\xi, p) &= \frac{\exp(\xi\theta)}{\sqrt{2\pi\xi q}} \left[1 + \frac{p}{8\xi q} + O(\xi^{-2}) \right], \\ P'(\xi, p) &= -\sqrt{\frac{\xi}{2\pi}} \frac{\exp(\xi\theta)}{q^{3/2}} \left[1 - \frac{3p}{8\xi q} + O(\xi^{-2}) \right] \\ \text{as } \xi &\rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Since, according to (43) and the second of (44),

$$P(\xi, 1) = 1, \quad P'(\xi, 1) = -\frac{1}{2} \left(\xi^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (62)$$

(61), (53) yield

$$\left. \begin{aligned} X(\xi, p, p_0) &= \sqrt{\frac{q_0}{q}} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)] [1 + O(\xi^{-1})], \\ X(\xi, 1, p_0) &= \sqrt{2\pi q_0 \xi} \exp(-\xi\theta_0) [1 + O(\xi^{-1})], \\ Y(\xi, p, p_0) &= -\sqrt{\frac{q_0}{q}} \frac{\xi}{q} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)] [1 + O(\xi^{-1})], \\ Y(\xi, 1, p_0) &= -\sqrt{\frac{\pi q_0}{2}} \xi^{5/2} \exp(-\xi\theta_0) [1 + O(\xi^{-1})] \\ \text{as } \xi &\rightarrow \infty \quad \left(\varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

¹⁵⁾ See [12], pp. 147, 162, 47.

In view of the continuity with respect to p at $p = 1$ of $X(\xi, p, p_0)$ and $Y(\xi, p, p_0)$, the estimates (63) may be combined into

$$\left. \begin{aligned} X(\xi, p, p_0) &= O\{\xi^{1/2} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)]\}, \\ Y(\xi, p, p_0) &= O\{\xi^{5/2} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)]\} \\ \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad &\left(0 \leq \theta \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

In addition we shall require the more refined estimate

$$\left. \begin{aligned} Y_0(\xi, p_0) &= -\frac{\xi}{q_0} \left[1 - \frac{p_0}{2q_0\xi} + O(\xi^{-2})\right] \\ \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad &\left(\varepsilon \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0\right), \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

which is also derivable from (53) and (61). Finally, by (15), (51), (54), the first of (57), and (65),

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\xi, \varrho) &= -\frac{2}{\xi} \sin(\xi \log \varrho) + O(\xi^{-2}), \\ \kappa(\xi, \varrho, p_0) &= 2[q_0 \cos(\xi \log \varrho) - p_0 \sin(\xi \log \varrho)] \xi + O(1), \\ \sigma(\xi, \varrho, p_0) &= -2[p_0 \cos(\xi \log \varrho) + q_0 \sin(\xi \log \varrho)] + O(\xi^{-1}), \\ \omega(\xi, p_0) &= q_0^2 \xi^2 + O(1) \\ \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad &\left(0 < \varrho < \infty, \quad \varepsilon \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0\right), \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

while (65), (66), and the last two of (57) lead to

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(\xi, p_0) &= q_0^2 \xi^4 + O(\xi^3), \quad \Delta_2(\xi, p_0) = -q_0 \xi^5 + O(\xi^4) \\ \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad &\left(\varepsilon \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0\right). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

The integrands in (58), (59) are continuous functions of ξ for $0 \leq \xi < \infty$ since $\Delta_1(\xi, p_0)$ and $\Delta_2(\xi, p_0)$ cannot vanish when $0 < \theta_0 \leq \pi/2$, as is clear from (56) and the discussion following (42). Let $f(\xi, \varrho, p, p_0)$ and $g(\xi, \varrho, p, p_0)$ denote any of the integrands in (58) and (59), respectively. The asymptotic results (64) to (67), together with (15) and (51) now yield, as $\xi \rightarrow \infty$,

$$\left. \begin{aligned} f(\xi, \varrho, p, p_0) &= O\{\xi^{-3/2} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)]\}, \\ g(\xi, \varrho, p, p_0) &= O\{\xi^{1/2} \exp[-\xi(\theta_0 - \theta)]\} \\ \left(0 < \varrho < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad 0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Therefore all of the improper integrals in question converge uniformly and absolutely for $0 < \varrho < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.

To prove that the stresses (59) conform to the appropriate field equations, it suffices to show that q , ψ , and the spherical components of stress satisfy (17), (19). Substituting from (58), (59) into (17), (19), and formally interchanging the order of differentiation and integration, one is led to improper integrals the uniform and absolute convergence of which for $0 < \varrho < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $0 < \theta_0 \leq \pi/2$ is assured by (64) to (67); this justifies the reversal of the two limit processes. In performing the required differentiations under the integral signs one needs to make use of the identities

$$\frac{\partial X}{\partial p} = Y, \quad q^2 \frac{\partial Y}{\partial p} = 2 p Y + \eta X, \quad (69)$$

which are obtained from (53) with the aid of (52), (51), and of LEGENDRE'S differential equation.

Both (17) and (19) involve the temperature field $T(\varrho, p)$. The integral representation (14), while convenient for the numerical evaluation of the temperature distribution, is not suited for the purpose at hand. What is needed at present is the alternative representation

$$T(\varrho, p) = \frac{T_0}{2 \pi \varrho^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\omega}{A_1} [p (\kappa - \sigma) X - \sigma q^2 Y] d\xi, \quad (70)$$

which matches the structure of the integrals in (58), (59), and may be established as follows. It was shown in [1] that (14) is equivalent to the complex integral

$$T(\varrho, p) = \frac{T_0}{2 \pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varrho^{-s} \frac{P_{s-1}(p)}{P_{s-1}(p_0)} \frac{ds}{s}, \quad (71)$$

where c may be chosen anywhere in the interval $0 < c \leq 1$, provided $0 < \theta_0 < \pi$. When $0 < \theta_0 \leq \pi/2$, as has been assumed in the present investigation, one finds by precisely the same reasoning that the admissible range of c may be extended to $0 < c \leq 3/2$.

If in (71) we choose $c = 1/2$, as specified in [1], there results (14); if, on the other hand, we take $c = 3/2$, employ the first of (41), and make use of auxiliary notation introduced previously in (53), (54), and (57), we reach (70). With the aid of (70), and by the procedure outlined above, the field equations (17), (19) are eventually found to be satisfied identically throughout the interior of the cone. The underlying computations are, of course, highly voluminous. It should be pointed out that the stresses (59) could have been deduced from the generating stress functions (58) directly by invoking (19) and without recourse to (36), (38). The fact that the physical components of stress (59) were actually

obtained through an independent inversion of their antecedents (36) in the transform domain provides an additional check on the correctness of the final results (59).

In order to verify the boundary conditions (20) one has to go to the limit as $p \rightarrow p_0$ ($\theta \rightarrow \theta_0$) in $\tau_{\theta\theta}(\varrho, p)$ and $\tau_{r\theta}(\varrho, p)$. Noting from (9), (53) that for $p = p_0$

$$q = q_0, \quad X = 1, \quad Y = Y_0, \quad (72)$$

one finds after an elementary computation that the integrands in the second and the last of (59) are identically zero when $p = p_0$, whence $\tau_{\theta\theta}$ and $\tau_{r\theta}$ indeed vanish along the boundary $\theta = \theta_0$.

We consider next the regularity conditions (21). In this connection we observe on the basis of (15), (51), (53), (54), and (57) that each of the definite integrals entering (59) may be written as a sum of integrals of the type

$$\varrho^{-3/2} \int_0^{\infty} F(\xi, p, p_0) \cos(\xi \log \varrho) d\xi, \quad \varrho^{-3/2} \int_0^{\infty} G(\xi, p, p_0) \sin(\xi \log \varrho) d\xi, \quad (73)$$

where $F(\xi, p, p_0)$ and $G(\xi, p, p_0)$ are integrable functions of ξ for $p_0 < p \leq 1$ ($0 \leq p_0 < 1$). Hence, appealing to the Riemann-Lebesgue theorem¹⁶⁾, we gather that all stresses tend to zero as $\varrho = r/a \rightarrow \infty$.

Finally, we turn to the requirement that the stress distribution be bounded in the *closed* region $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ($0 < \theta_0 \leq \pi/2$). In view of the convergence properties established already, we have to show first in this connection that all four stresses in (59) remain finite for $0 < \varrho < \infty$, $\theta = \theta_0$. This condition is evidently met by $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$ which were found to vanish for $p = p_0$, consistent with the boundary conditions (20). Let $g_{rr}(\xi, \varrho, p_0)$ and $g_{\phi\phi}(\xi, \varrho, p_0)$ denote the respective integrands of τ_{rr} and $\tau_{\phi\phi}$ in (59), evaluated at $p = p_0$. Then (72), together with (15), (51), and the asymptotic estimates (65) to (67), yield the conclusion

$$\left. \begin{aligned} g_{rr}(\xi, \varrho, p_0) &= O(\xi^{-2}), \quad g_{\phi\phi}(\xi, \varrho, p_0) = \frac{2 \sin(\xi \log \varrho)}{\xi} + O(\xi^{-2}) \\ \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad &\left(0 < \varrho < \infty, \quad 0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Consequently, the integral representing τ_{rr} is uniformly and absolutely convergent for $p = p_0$, $0 < \varrho < \infty$. Also, by DIRICHLET'S test¹⁷⁾, the integral appropriate to $\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)$ converges uniformly for ϱ in any sub-interval of $0 < \varrho < \infty$ which does not include the point $\varrho = 1$. At $\varrho = 1$, $\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)$ has a finite jump-discontinuity which will be examined in the next section.

¹⁶⁾ See TITCHMARSH [15], p. 403.

¹⁷⁾ See, for example, BROMWICH [16], p. 482.

To complete the validation of the solution under consideration we have yet to demonstrate that the components of stress remain bounded as $\varrho = r/a \rightarrow 0$. It is apparent from (59) that this is so provided all four integrals in (59) are $O(\varrho^{3/2})$ as $\varrho \rightarrow 0$. Unfortunately, an attempt to establish this order of magnitude meets with considerable analytical difficulties. The numerical results presented in what follows, however, indicate that the stresses are in fact bounded at the vertex of the cone.

6. Numerical Evaluation of Solution. Discussion

The integrands in the solution (59) for the desired thermal stresses are seen to involve only elementary functions, with the exception of $X(\xi, p, p_0)$ and $Y(\xi, p, p_0)$, defined by (53). The transcendental functions X, Y , in turn, contain the Legendre function of complex degree $P(\xi, p) \equiv P_{-1/2-i\xi}(p)$ and its derivative with respect to p , $P'(\xi, p)$. A computationally convenient integral representation for $P(\xi, p)$ follows from the Mehler-Dirichlet integral (40) through integration by parts. Thus

$$\left. \begin{aligned} P(\xi, p) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi q^2} \int_0^\theta [\cos \theta (\cos \lambda - \cos \theta)^{1/2} \\ + \frac{1}{3} (\eta + 2) (\cos \lambda - \cos \theta)^{3/2}] \cosh(\xi \lambda) d\lambda \\ (0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \xi < \infty), \end{aligned} \right\} \quad (75)^{18}$$

where η is given in (51). Similarly, taking $m = 1$, $s = -1/2 + i\xi$ in (43) and using the first of (44), as well as (46), we reach

$$\left. \begin{aligned} P'(\xi, p) = -\frac{2\sqrt{2}\eta}{\pi q^2} \int_0^\theta (\cos \lambda - \cos \theta)^{1/2} \cosh(\xi \lambda) d\lambda \\ (0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \xi < \infty). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

When $\xi = 0$, Equations (75), (76) yield in particular

$$\left. \begin{aligned} P(0, p) = P_{-1/2}(p) &= \frac{2}{\pi} K\left(\sin \frac{\theta}{2}\right), \\ P'(0, p) = P'_{-1/2}(p) &= -\frac{2}{\pi q^2} \left[E\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) - \cos^2 \frac{\theta}{2} K\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (77)^{19}$$

¹⁸ Tables of $P(\xi, p)$ appear to be in preparation in the Soviet Union [17]. Observe that the integrand in (75), unlike the integrand in (40), has no singularity. Equation (75) may alternatively be deduced by setting $m = -2$ in (45) and using (46).

¹⁹ See also [12], p. 174. The second of (77) follows from the first by differentiation with respect to p .

in which K and E are the complete elliptic integrals of the first and second kind, respectively. The integral representations (75), (76) are valid for $0 < \theta < \pi$; the corresponding values for $\theta = 0$ ($p = 1$) appear in (62). Evidently, $X(\xi, p, p_0)$ and $Y(\xi, p, p_0)$ are computable on the basis of (53), (62), (75), (76), and (77).

We recall from Section 5 that the integral representing $\tau_{rr}(\varrho, p_0)$ is uniformly convergent in $0 < \varrho < \infty$, whence the boundary values of τ_{rr} are continuous in this range. In contrast, as mentioned in Section 5, $\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)$ has a jump-discontinuity at $\varrho = 1$, where the surface temperature $T(\varrho, p_0)$ exhibits a discontinuity of the same type. We now determine the surface discontinuity in $\tau_{\phi\phi}$. To this end we observe with the aid of (59), (51), (54), (57), and (72), after some manipulation, that

$$\frac{1}{E \alpha T_0} [\tau_{rr}(\varrho, p_0) + \tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)] = \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2 \pi \varrho^{3/2}} \left[\int_0^\infty \xi d\xi + 2(1+\nu) p_0 \int_0^\infty \frac{\omega \xi Y_0^2}{\Delta_2} d\xi \right] \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Bearing in mind (51), (15), and noting the identities

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(c\xi)}{\xi^2 + b^2} d\xi &= \frac{\pi}{2b} \exp(-b|c|), \\ \int_0^\infty \frac{\xi \sin(c\xi)}{\xi^2 + b^2} d\xi &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(c) \exp(-b|c|) \quad (b > 0). \end{aligned} \right\} \quad (79)^{20}$$

one finds that

$$\frac{1}{2 \pi \varrho^{3/2}} \int_0^\infty \xi d\xi = h(1 - \varrho) = \begin{cases} 1 & \text{for } \varrho < 1 \\ 0 & \text{for } \varrho > 1 \end{cases}, \quad (80)$$

where h is the Heaviside unit step-function. From (78), (80)

$$\frac{\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)}{E \alpha T_0} = -h(1 - \varrho) - \frac{(1 + \nu) p_0}{\pi \varrho^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\omega \xi Y_0^2}{\Delta_2} d\xi - \frac{\tau_{rr}(\varrho, p_0)}{E \alpha T_0}. \quad (81)$$

By (65), (66), (67), the integral in (81) converges uniformly for $0 < \varrho < \infty$ and hence represents a function which depends continuously on ϱ . Consequently, the discontinuity of $\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)$ at $\varrho = 1$ is characterized by

$$\tau_{\phi\phi}(1+, p_0) - \tau_{\phi\phi}(1-, p_0) = E \alpha T_0, \quad (82)$$

as was to be anticipated in view of (12) and the plane-strain theory of steady-

²⁰ See [18], pp. 127, 128.

state thermoelasticity²¹). Equation (81), in which the discontinuous part of $\tau_{\phi\phi}(\varrho, p_0)$ has been isolated explicitly, provides, of course, a more efficient means for computing the surface values of $\tau_{\phi\phi}$ than does the corresponding discontinuous integral in (59).

A procedure for the numerical evaluation of the thermal stresses may be outlined as follows. Let the opening angle θ_0 ($0 < \theta_0 \leq \pi/2$) of the cone be given, along with the physical parameters E , ν , and α . Once $P(\xi, p)$, $P(\xi, p_0)$, and $P'(\xi, p)$ have been tabulated on the basis of (75), (76), and (77), the values of $X(\xi, p, p_0)$, $Y(\xi, p, p_0)$, and $Y_0(\xi, p_0)$ follow at once from (53) and (62). At this stage, the auxiliary functions $\beta(\xi, \varrho)$, $\gamma(\xi, \varrho)$, $\eta(\xi)$, $\zeta(\xi, \varrho)$, $\varkappa(\xi, \varrho, p_0)$, $\sigma(\xi, \varrho, p_0)$, $\omega(\xi, p_0)$, $A_1(\xi, p_0)$, $A_2(\xi, p_0)$ are directly computable from the defining equations (15), (51), (54), (57), with the aid of the previously determined values of Y_0 . Thus the integrands in (59) and (81) may now be tabulated and one may proceed to the numerical evaluation of the corresponding improper integrals.

In connection with the evaluation of the improper integrals just referred to, it is helpful to have available asymptotic estimates of the truncation errors thus encountered. Since the stresses on the axis and along the boundary of the cone are of particular interest, we shall confine our attention presently to the truncation errors arising when $\theta = 0$ ($p = 1$) and $\theta = \theta_0$ ($p = p_0$). Suppose that $\tau_{rr}^*(\varrho, 1; p_0, \xi_0)$ and $\tau_{\theta\theta}^*(\varrho, p; p_0, \xi_0)$ denote the right-hand members in (59) if the lower limit of integration (zero) is replaced with ξ_0 ($\xi_0 > 0$). Applying integration by parts to (59), after making use once again of (63), (66), (67), we ultimately reach the following estimates, which are valid as $\xi_0 \rightarrow \infty$ for $\varepsilon \leq \varrho < \infty$ ($\varepsilon > 0$):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr}^*(\varrho, 1; p_0, \xi_0) &= p_0 \sqrt{\frac{2q_0}{\pi\xi_0}} \frac{[\log \varrho \beta(\xi_0, \varrho) + \theta_0 \gamma(\xi_0, \varrho)]}{\varrho^{3/2} [\theta_0^2 + (\log \varrho)^2]} \exp(-\xi_0 \theta_0) \\ &\quad + O[\xi_0^{-3/2} \exp(-\xi_0 \theta_0)], \\ \tau_{\theta\theta}^*(\varrho, 1; p_0, \xi_0) &= -q_0 \sqrt{\frac{q_0}{2\pi\xi_0}} \frac{[\theta_0 \beta(\xi_0, \varrho) - \log \varrho \gamma(\xi_0, \varrho)]}{\varrho^{3/2} [\theta_0^2 + (\log \varrho)^2]} \exp(-\xi_0 \theta_0) \\ &\quad + O[\xi_0^{-3/2} \exp(-\xi_0 \theta_0)], \\ \tau_{rr}^*(\varrho, p_0; p_0, \xi_0) &= \frac{1}{\pi \varrho^{3/2}} \left\{ -\frac{1}{\xi_0} \left[\beta(\xi_0, \varrho) + \frac{p_0}{q_0} \gamma(\xi_0, \varrho) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_0}{q_0} \log \varrho \operatorname{Ci}(|\xi_0 \log \varrho|) \right. \\ &\quad \left. + |\log \varrho| \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(|\xi_0 \log \varrho|) \right] \right\} + O(\xi_0^{-2}), \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

²¹) See, for example, [19], p. 428, Equation (d).

where Ci and Si are the cosine and sine integrals defined by

$$Ci(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos \lambda}{\lambda} d\lambda, \quad Si(z) = \int_0^z \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda. \quad (84)^{22)}$$

In an analogous manner one obtains for the truncation error appropriate to the improper integral in (81) the asymptotic estimate

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_0}^\infty \frac{\omega \xi Y_0^2}{4_2} d\xi &= \frac{2}{q_0} \left[\frac{\gamma(\xi_0, \varrho)}{\xi_0} - \log \varrho Ci(|\xi_0 \log \varrho|) \right] + O(\xi_0^{-2}) \\ \text{as } \xi_0 \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \leq \varrho < \infty, \quad \varepsilon > 0). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

For the purpose of illustrating the method of computation outlined in this section, the stresses on the axis $\theta = 0$ ($p = 1$) and at the surface of the cone $\theta = \theta_0$ ($p = p_0$) were actually calculated for an opening angle of sixty degrees ($\theta_0 = \pi/6$), $p_0 = \sqrt{3}/2$, $q_0 = 1/2$) and for $\nu = 1/4$. To this end, SIMPSON's rule was applied to the evaluation of $P(\xi, p_0)$ and $P'(\xi, p_0)$ from (75), (76) for $\xi = 0$ (0.2) 20, with 50 subdivisions of the range of integration $0 \leq \lambda \leq \pi/6$. The computation of τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$ at $p = 1$ and of τ_{rr} at $p = p_0$ was based on (59), while (81) was employed to calculate $\tau_{\phi\phi}$ at $p = p_0$. In each instance the requisite improper integral was truncated at $\xi = \xi_0 = 20$ and evaluated numerically (once again by SIMPSON's rule) for $\varrho = 0.1$ (0.1) 2.5, with 100 subdivisions of the interval of integration $0 \leq \xi \leq 20$. The stress values thus obtained were corrected by means of the truncation-error estimates (83), (85). All of the numerical work described here was carried out on an I.B.M. 650 electronic computer. The graphs displayed in Figures 1 to 4 are self-explanatory.

In conclusion we merely mention that the solution to the thermoelastic problem of the cone established in this investigation, when $\theta_0 = \pi/2$, must be

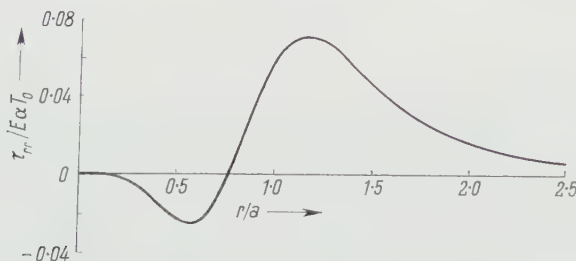


Figure 1

Variation of τ_{rr} along axis of cone. $\theta_0 = \pi/6$, $\nu = 1/4$.

²²⁾ Numerical tables for $Ci(z)$ and $Si(z)$ appear in [20, 21].

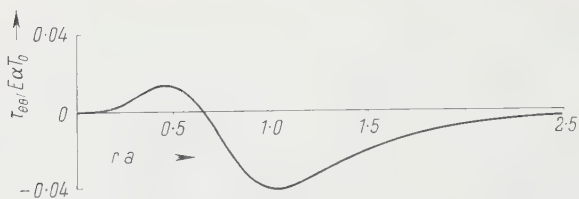


Figure 2

Variation of $\tau_{\theta\theta}$ along axis of cone. $\theta_0 = \pi/6$, $\nu = 1/4$.

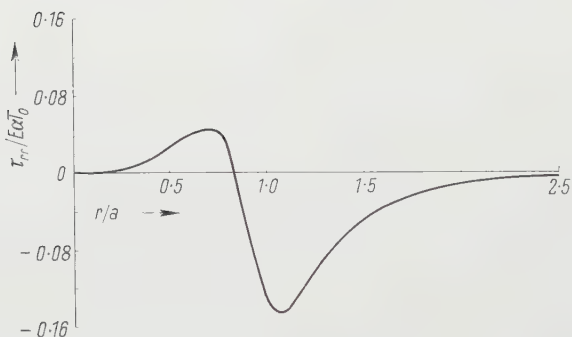


Figure 3

Variation of τ_{rr} along surface of cone. $\theta = \pi/6$, $\nu = 1/4$.

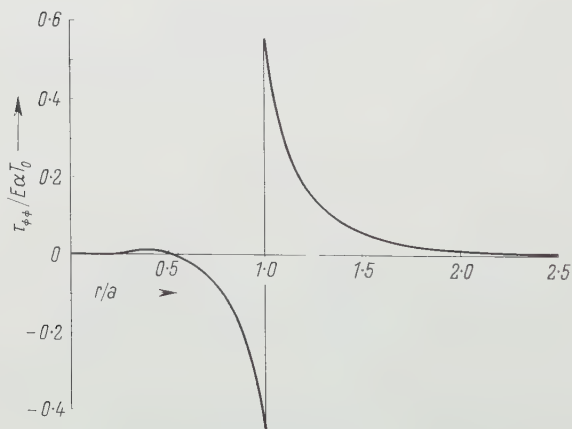


Figure 4

Variation of $\tau_{\phi\phi}$ along surface of cone. $\theta_0 = \pi/6$, $\nu = 1/4$.

reducible to the corresponding results for the half-space reached in [9]. In particular it is easily seen from (59) that for $\theta_0 = \pi/2$ ($p_0 = 0$) the normal stress $\tau_{rr}(\varrho, \phi)$ vanishes identically along the axis $\theta = 0$ ($\phi = 1$), in agreement with [9].

Acknowledgment

The authors are greatly indebted to Mrs. L. PAUL who conducted the numerical work involved in this investigation.

REFERENCES

- [1] R. MUKI and E. STERNBERG, *Steady-state heat conduction in a circular cone*, Z. angew. Math. Mech., 11, 4, 306 (1960).
- [2] J. H. MICHELL, *Some elementary distributions of stress in three dimensions*, Proc. London Math. Soc., 32, 23 (1900).
- [3] L. FÖPPL, *Die Torsion runder Stäbe von veränderlichem Querschnitt*, Bayer. Akad. Wiss., 61 (1921).
- [4] H. NEUBER, *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel*, Z. angew. Math. Mech., 14, 4, 203 (1934).
- [5] R. J. KNOPS, *On the variation of Poisson's ratio in the solution of elastic problems*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 11, 3, 326 (1958).
- [6] A. J. A. MORGAN, *Stress distributions in semi-infinite solids of revolution*, Z. angew. Math. Phys. 5, 4, 330 (1954).
- [7] A. J. A. MORGAN, *Stress distributions within solids bounded by one or two cones*, Z. angew. Math. Phys., 7, 2, 130 (1956).
- [8] C. J. TRANTER, *The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 2, 125 (1948).
- [9] E. STERNBERG and E. L. McDOWELL, *On the steady-state thermoelastic problem for the half-space*, Quart. Appl. Math. 14, 4, 381 (1957).
- [10] P. F. PAPKOVICH, *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques*, C. r., Acad. Sci. Paris, 195, 10, 513 (1932).
- [11] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Vol. 1, (Birkhäuser, Basel, 1950).
- [12] *Higher transcendental functions*, edited by A. ERDÉLYI, Vol. 1, (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [13] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, 4th ed., (Cambridge 1952).
- [14] W. MAGNUS and F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2nd ed., (Springer, Berlin 1948).
- [15] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, 2nd ed., (Oxford 1939).
- [16] T. J. I'A. BROMWICH, *An introduction to the theory of infinite series*, 2nd ed., (Macmillan, London 1949).
- [17] M. I. ZHRINA and L. N. KARMAZINA, *Tables of the Legendre functions $P_{1/2+it}(x)$* , (in Russian), Izdatel'stvo Akademii Nauk USSR, Moscow. In preparation.
- [18] W. GRÖBNER and N. HOFREITER, *Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale*, (Springer, Wien, 1950).
- [19] S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, 2nd ed., (McGraw-Hill, New York, 1951).

- [20] *Tables of sine, cosine and exponential integrals*, Vol. 2, (New York W. P. A. 1940).
 [21] *Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100*, (New York W. P. A. 1942).

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Bestimmung der stationären Wärmespannungen, die in einem elastischen Kreiskegel durch eine unstetige Verteilung der Oberflächentemperatur hervorgerufen werden. Die Temperatur der Mantelfläche wird oberhalb und unterhalb einer festen Entfernung von der Kegelspitze konstant angenommen. Das zugehörige Wärmeleitungsproblem wurde in einer früheren Veröffentlichung unabhängig gelöst. In der vorliegenden Arbeit wird eine strenge Lösung für die gesuchten Wärmespannungen mit Hilfe der Mellin-Transformation hergeleitet. Das hier benutzte Verfahren ist auch anwendbar auf das gewöhnliche Randwertproblem für einen elastischen Kegel, der durch eine entsprechende unstetige Oberflächenbelastung beansprucht wird.

(Received: December 24, 1959.)

Large Deflections of Circular Plates under Uniform and Concentrated Central Loads¹⁾

By EDWARD SAIBEL²⁾ and IRADJ TADJBAKHS³⁾, Troy, N.Y., U.S.A.

1. Introduction

In this paper we present a perturbation solution for the problem of large deflections of thin circular plates subjected to the combined action of uniform lateral pressure and a concentrated central load. The plate is assumed to be clamped at the boundary with no radial displacement, Figure 1.

In recent years the problem of large deflections of circular plates based upon the von Kármán [1]⁴⁾ equations has received considerable attention. Various approximate solutions have been obtained for the case of uniform lateral loads by S. WAY [2], CHIEN [3], BROMBERG [4] and REISS and KELLER [5]. In some simpler instances the questions of convergence of the approximate solutions have been successfully treated [4, 5].

For the present problem a simple solution beyond the linear classical theory seems to be lacking. Here we employ the well-known method of perturbation to obtain some nonlinear results inherent in the problem.

¹⁾ This work was supported in part by the Office of Ordnance Research, U.S. Army.

²⁾ Dept. of Mechanics, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y.

³⁾ Formerly Rensselaer Polytechnic Institute, presently Inst. Math. Sciences, New York University.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to references, page 502.

Nomenclature

With the exception of symbols defined in the body of the paper the following nomenclature is used:

r, θ	plane polar co-ordinates
w	transverse deflection
ϕ	Airy stress function
E	YOUNG's modulus
h	plate thickness
a	plate radius
ν	POISSON's ratio
p	lateral pressure intensity

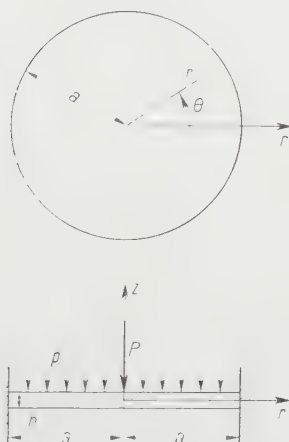


Figure 1

Clamped circular plate subjected to uniform pressure and concentrated center force.

2. Formulation

The von Kármán equations for rotationally symmetric deformations of a solid circular plate assume the following form in polar co-ordinates.

$$\left. \begin{aligned} \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w(r) &= \frac{p}{h} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) \\ \Delta^2 \phi(r) + \frac{E}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}.$$

Each of equations (1) may be integrated once and the constants of integration evaluated by the condition of symmetry at the center, $r = 0$. The resulting equations may then be simplified to yield.

$$\left. \begin{aligned} x^2 V'' - x \int_0^x q(\xi) d\xi - V\psi, \\ 32 a^2 \psi'' - V^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where we have introduced the dimensionless quantities

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r^2}{a^2}, & W(x) &= 2 [12 (1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{w(r)}{h}, \\ \psi(x) &= \frac{3 (1 - \nu^2)}{E h^2} r \frac{d\phi}{dr}, & V(x) &= [12 (1 - \nu^2)]^{1/2} \frac{r}{h} \frac{dw}{dr}, \\ q(x) &= \frac{a^4 [12 (1 - \nu^2)]^{3/2}}{8 E h^4} p(r) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

and primes denote differentiation with respect to x .

Now if the actual load on the plate consists of uniform load p_u and a concentrated central load P , we propose to express the pressure intensity function p appearing in (1) as

$$p(r) = p_u + \frac{P}{\pi a^2} 2 \delta\left(\frac{r^2}{a^2}\right), \quad (4)$$

where $\delta(\xi)$ is the symbolic Dirac-delta function possessing the properties

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= 0 \quad \text{for } \xi \neq 0, \\ \int_{-A}^A \delta(\xi) d\xi &= 1 \quad \text{for } A \neq 0. \end{aligned}$$

It is thus seen that equation (4) provides a satisfactory definition of pressure intensity, since everywhere it reduces to that of a uniform load p_u except at the center, where it remains undefined. Furthermore, it satisfies the load pressure relationship

$$T = \text{total load} = \int_0^a 2 \pi r p(r) dr.$$

If one thinks of the Dirac-delta function as an even function of its argument, then

$$\int_0^A \delta(\xi) d\xi = \frac{1}{2},$$

and therefore,

$$T = \pi a^2 \int_0^1 p(r(x)) dx = \pi a^2 p_u + 2 P \int_0^1 \delta(x) dx$$

$$\pi a^2 p_u = P.$$

Equation (4) with the aid of (3) can be written in the dimensionless form

$$q = q_u [1 + 2 \beta \delta(x)], \quad (5)$$

where

$$q_u = \frac{a^4 [12 (1 - \nu^2)]^{3/2}}{8 E h^4} p_u, \quad \beta = \frac{P}{\pi a^2 p_u}. \quad (6)$$

Here β , the ratio of the two applied loads, may assume positive or negative values depending upon the relative direction of the application of the loads.

Substituting (5) into (2) we arrive at the following system of equations

$$\left. \begin{aligned} V'' &= q_u (1 + \beta x^{-1}) + x^{-2} V \psi, \\ 32 \psi'' + x^{-2} V^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Boundary conditions at the center, $x = 0$, and edge of the plate, $x = 1$, must be specified to complete the formulation. From symmetry and regularity condition at the center we must have

$$V(0) = \psi(0) = 0. \quad (8)$$

If the plate is clamped at the edge with no radial displacement, we have

$$\left. \begin{aligned} V(1) &= W(1) = 0, \\ \psi'(1) &= \frac{1 - \nu}{2} \psi(1). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

The radial and circumferential membrane stresses σ_r^m and σ_θ^m are given in terms of the new stress function ψ by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^m &= \frac{E h^2}{3 (1 - \nu^2) a^2} \psi x^{-1}, \\ \sigma_\theta^m &= \frac{E h^2}{3 (1 - \nu^2) a^2} (2 \psi' - \psi x^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The radial and circumferential bending stresses are given in terms of k by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^b &= \frac{12 E h^2}{[12 (1 - \nu^2)]^{3/2} a^2} [2 V' - (1 - \nu) V x^{-1}], \\ \sigma_\theta^b &= \frac{12 E h^2}{[12 (1 - \nu^2)]^{3/2} a^2} [2 \nu V' + (1 - \nu) V x^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. Perturbation Solution

The above nonlinear equations and the accompanying boundary conditions may be solved by a variety of approximate techniques. For the present purposes a perturbation process will be employed. We choose for the parameter of perturbation the maximum dimensionless center deflection

$$W_m = W(0), \quad (12)$$

and expand

$$\left. \begin{aligned} (q_n, V, W) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (\lambda_n, V_n, W_n) W_m^n, \\ \psi &= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \psi_n W_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

where W_n and V_n are related by $W_n' = x^{-1} V_n$ and λ_n are constants which define the load as an odd function of the center deflection. From (12) and (13) it is evident that

$$W_1(0) = 1, \quad W_n(0) = 0, \quad n = 3, 5, 7, \dots \quad (14)$$

The boundary conditions (8) and (9) carry over directly to the new functions V_n, ψ_n and W_n .

Substituting expansions (13) into equations (7) we arrive at a set of ordinary linear differential equations the first of which is

$$\left. \begin{aligned} V_1'' &= \lambda_1 (1 + \beta x^{-1}), \\ W_1' &= x^{-1} V_1, \\ V_1(0) &= V_1(1) = W_1(1) = 0, \\ W_1(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Solution of this system leads to the following result

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \lambda_1 \left(\frac{1}{2} x^2 + \beta x \log x - \frac{1}{2} x \right), \\ \lambda_1 &= \frac{1}{\beta + \frac{1}{4}}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

which is the linear classical solution of the problem (6). The succeeding V_n 's and W_n 's satisfy linear equations of the form

$$\left. \begin{aligned} V_n'' &= \lambda_n (1 + \beta x^{-1}) + x^{-2} G_n, \\ W_n' &= x^{-1} V_n, \\ V_n(0) &= V_n(1) = W_n(0) = W_n(1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

where

$$G_n = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{n-2} V_k \psi_{n-k}, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

A formal solution of this system, after some simplification, leads to

$$V_n = \lambda_n V_1 - \int_0^1 f(x, \xi; 1) G_n(\xi) d\xi + x \int_0^1 f(1, \xi; 1) G_n(\xi) d\xi, \quad (18)$$

$$\lambda_n = \lambda_1 \int_0^1 x^{-1} \log x G_n(x) dx, \quad (19)$$

where

$$f(x, \xi; \mu) = \xi^{-1} (\mu - x \xi^{-1}). \quad (20)$$

Similarly the differential equations for ψ_n 's are of the form

$$\psi_n'' + \frac{1}{32} x^{-2} H_n = 0, \quad \psi_n(0) = \psi_n'(1) - \frac{1+\nu}{2} \psi_n(1) = 0, \quad (21)$$

where

$$H_n = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{n-1} V_k V_{n-k}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Solving system (21) we obtain

$$\psi_n = \frac{1}{32} \left[\int_0^x f(x, \xi; 1) H_n(\xi) d\xi - x \int_0^1 f\left(1, \xi; \frac{\nu+1}{\nu-1}\right) H_n(\xi) d\xi \right] \quad (22)$$

For $n=2$, we have $H_2 = V_1^2$. Then from (22)

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{\lambda_1^2}{32} \left[\beta^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 \log^2 x + \frac{3}{2} x^2 \log x - \frac{7}{4} x^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 x \right) \right. \\ & + \beta \left(-\frac{1}{6} x^3 \log x + \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{5}{36} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{18} \alpha_2 x \right) \\ & \left. + \left(-\frac{1}{48} x^4 + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{48} \alpha_3 x \right) \right], \end{aligned}$$

where

$$\alpha_1 = \frac{11-7\nu}{1-\nu}, \quad \alpha_2 = \frac{16-11\nu}{1-\nu}, \quad \alpha_3 = \frac{5-3\nu}{1-\nu}.$$

Then from (18) we obtain for λ_3

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & \frac{\lambda_1^4}{64} \left[\beta^3 \left(\frac{1}{8} \alpha_1 - \frac{47}{81} \right) + \frac{1}{36} \beta^2 \left(\alpha_2 + \frac{5}{4} \alpha_1 - \frac{791}{64} \right) \right. \\ & + \frac{1}{24} \beta \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{5}{27} \alpha_2 - \frac{953}{600} \right) \\ & \left. + \frac{1}{1728} \left(5 \alpha_3 - \frac{77}{10} \right) \right]. \end{aligned}$$

At this stage of the solution the load deflection relationship at the center of the plate assumes the form

$$T = \pi k^2 p_u (1 + \beta) = P (1 + \beta^{-1})$$

$$\frac{8 \pi E h^4 (1 + \beta)}{a^2 [12 (1 - \nu^2)]^{3/2}} (\lambda_1 W_m + \lambda_3 W_m^3).$$

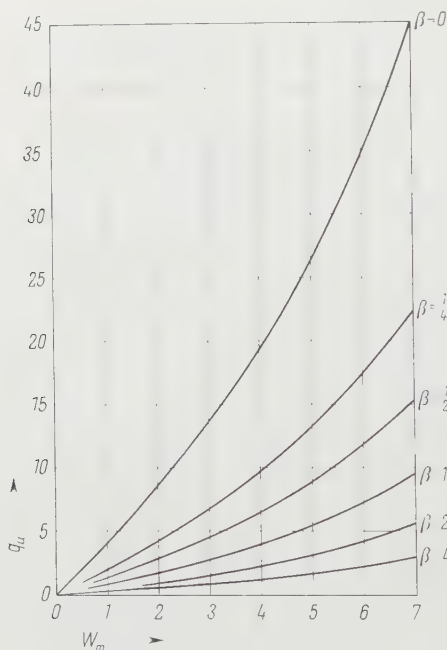


Figure 2

Dimensionless uniform pressure q_u , Dimensionless center deflection.

As $\beta \rightarrow 0$ we obtain the case of uniform load

$$p_u = \frac{32 E h^4}{a^4 [12 (1 - \nu^2)]^{3/2}} \left[W_m + \frac{1}{1728} \left(5 \alpha_3 - \frac{77}{10} \right) W_m^3 \right],$$

and as $\beta \rightarrow \infty$, a simple limiting process shows that

$$P = \frac{8 \pi E h^4}{a^2 [12 (1 - \nu^2)]^{3/2}} \left[W_m + \frac{1}{64} \left(\frac{1}{8} \alpha_1 - \frac{47}{81} \right) W_m^3 \right].$$

Both of the above limiting cases have been previously obtained by various investigators, e.g. reference (3).

The numerical work for explicit evaluation of the succeeding λ 's becomes very laborious beyond this stage and can best be done by means of modern digital computers. The question of convergence of the series

$$q_u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \lambda_n W_m^n$$

is a difficult and important one. It is evident that for convergence one must limit the range of W_m to

$$W_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-2}} \right)^{1/2}.$$

In the engineering spirit and noting that the von Kármán equations are valid for deflections of the order of the thickness of the plate, we have confined W_m to the range $0 \leq W_m \leq 7$.

In Figure 2 is depicted the maximum dimensionless center deflection in terms of the dimensionless uniform loading for various values of the ratio of concentrated load to distributed load.

REFERENCES

- [1] VON KÁRMÁN, T., *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, Nr. 4 (Teubner, Leipzig 1910), pp. 348-352.
- [2] WAY, S., *Bending of Circular Plates with Large Deflection*, Trans. A.S.M.E., 56, 627-636 (1934).
- [3] CHIEN, W. Z., *Theory of Elastic Circular Plates* (translated from Chinese into Russian by A. S. VOLMIR), Izdat. Inost. Lit., Moscow (1954).
- [4] BROMBERG, E., *Non-linear Bending of Circular Plate under Normal Pressure*, Comm. Pure Appl. Math. 9, 633-659 (1956).
- [5] REISS, L. E., and KELLER, H. B., *Iterative Solutions for the Non-linear Bending of Circular Plates*, Comm. Pure Appl. Math. 11, 273-292 (1958).
- [6] TIMOSHENKO, S., *Theory of Plates and Shells*. Engineering Societies Monograph (McGraw Hill, New York 1940).

Zusammenfassung

Die gewöhnlichen von Kármán-Föppl-Gleichungen für grosse Durchbiegungen einer kreisförmigen Platte unter kombinierter, gleichmässiger und konzentrierter Belastung werden in Potenzreihen gelöst.

(Received: March 11, 1960.)

On the Calculation of the Minimum Wave plus Vortex Drag of Supersonic Wings¹⁾

By RAUL R. HUNZIKER, Melbourne Beach, Florida, U. S. A.²⁾

1. Introduction

The calculation of the minimum wave plus vortex drag for a wing of given planform and carrying a given total lift at supersonic speeds poses the solution of the following mixed harmonic problem [1, 2]³⁾ (see Figure 1)

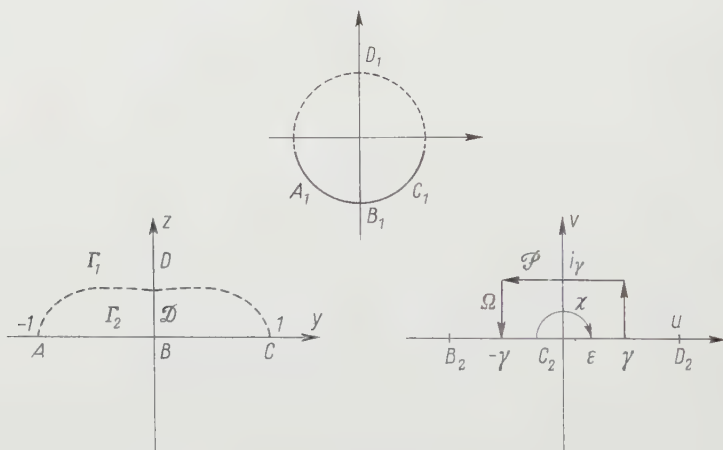


Figure 1

Conformal Mapping of \mathcal{D} on upper plane \mathcal{P} .

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{and} \quad \varphi(y, z) = \varphi(-y, z) \quad \text{over a domain } \mathcal{D} \text{ with symmetry axis } z, \quad (1)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{over the curved piece } I_1 \text{ of the boundary joining the points } A, D, C, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1, \quad \text{over the straight segment } I_2 \text{ } (-1 \leq y \leq 1, z = 0) \text{ joining } A, B, C. \quad (3)$$

¹⁾ The results presented in this paper were obtained in the course of research for CONVAIR, A Division of General Dynamics Corporation, San Diego, Calif.

²⁾ Department of Mathematics, Brevard Engineering College, Melbourne, Florida.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 507.

The boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ of \mathcal{D} corresponds to the orthogonal projection for $z \geq 0$ of the forward and rear Mach envelopes intersection on the plane y, z transversal to the direction of motion. The segment Γ_2 corresponds to the projection of the wing planform of span $2b$.

The mixed harmonic problem defined by Equations (1), (2), (3) can be solved by determining a complex function

$$F(s) = \varphi(y, z) + i \psi(y, z), \quad (4)$$

which is analytic regular over $\mathcal{D} + \Gamma$ with a vanishing real part over Γ_1 and with an imaginary part equal to

$$\psi(y) = -(a + y) \quad \text{over } \Gamma_2. \quad (5)$$

Condition (5) follows from a Cauchy-Riemann equation.

This holomorphic problem is a particular case of a more general one, related to a contour consisting of m pairs of connected pieces, which was treated by SIGNORINI [3] who showed that certain $m - 1$ definite relations are necessary and sufficient for the existence of the solution. The same problem was treated later by KELDYSH and SEDOV [4] and more recently by KOMATU [5].

KOMATU [5] has given an integral representation of the solution for the case of a single pair of arcs of a circumference bearing respectively the prescribed boundary values of the real and imaginary parts of an analytic function to be found. Although the kernels contained in this representation are expressed by elementary functions, an integral formula which is more tractable for the effective calculation of the boundary values of the solution φ over Γ_2 can be derived. The continuity and boundedness of the boundary values (2), (5) assures the existence of the solution $F(s)$ without any restriction as in the case $m > 1$ [5]. The uniqueness of $F(s)$ follows from the assertion that if a function is analytic and bounded in the domain \mathcal{D} and has real and imaginary parts which vanish respectively over the pieces Γ_1 and Γ_2 of the boundary contour Γ it must vanish identically. The analyticity of $F(s)$ in the symmetric domain \mathcal{D} and the symmetry condition of Equations (1) imply, by SCHWARZ's reflexion lemma [6] the antisymmetry of $\psi(y, z)$ with respect to $y = 0$ and the identical vanishing of ψ over BD . Therefore $a = 0$ is taken in Equation (5).

2. Conformal Mapping of \mathcal{D}

Let

$$w(s) = u(y, z) + i v(y, z) \quad (6)$$

be the complex analytic function which maps conformally the domain \mathcal{D} on the upper half plane \mathcal{Q} of the complex variable w .

Point A_2 which is not shown in Figure 1 is chosen as the point of infinity of the w -plane. Since the two plane domains \mathcal{D} and \mathcal{Q} can be mapped on a circle $|p| \leq 1$ they can be mapped on one another. Since the domain \mathcal{Q} is mapped by the inverse analytic function $s = s(w)$ on the domain \mathcal{D} of the s -plane, the solution $F(s)$ is translated into a function $F(s(w)) = \varphi(w) + i \psi(w)$ analytic and bounded in \mathcal{Q} .

As is known several methods for the effective construction of the mapping function of \mathcal{D} on the unit circle have been proposed [7] of which THEODORSEN's [8] has been the most generally used. A comparative review of the various proposed methods using high speed computing machines is given in Reference 8□.

The mapping function of the circle $|p| \leq 1$ on the upper half plane $\mathfrak{P}(v \geq 0)$ is a linear function containing three real parameters which can be determined so as to have I_2 mapped on $v = 0$, $-\infty < u \leq 0$.

3. The Singular Integral Equation and the Calculation of $\varphi(s_0)$ over I_2

The function

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{u}} = K_R + i K_I, \quad (7)$$

is analytic in the upper half plane \mathfrak{P} and

$$\left. \begin{aligned} K_R &= 0, \quad K_I = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad v = 0, \quad u < 0; \\ K_R &= \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad K_I = 0, \quad v = 0, \quad u > 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Let us introduce now the function

$$\mathcal{Q}(w) = F(w) K(w) = G(w) + i H(w),$$

where

$$G(w) = \varphi K_R - \psi K_I, \quad H(w) = \varphi K_I + \psi K_R. \quad (9)$$

By Equations (2), (5) and (7) to (9), it follows that the values of \mathcal{Q} on the real axis $v = 0$ are given by

$$G(u) = \frac{\psi(u)}{\sqrt{|u|}}, \quad u < 0$$

and because $\varphi = 0$ on I_1 , which is mapped on $u > 0$,

$$G(u) = 0, \quad u > 0;$$

similarly it follows

$$H(u) = -\frac{\varphi(u)}{\sqrt{|u|}}, \quad u < 0; \quad H(u) = \frac{\psi(u)}{\sqrt{|u|}}, \quad u > 0.$$

Let Ω be a closed rectangular contour consisting of a part Ω' and two segments of $v = 0$, $-\gamma \leq u \leq \varepsilon$, $\varepsilon \leq u \leq \gamma$ and a semi-circumference κ of radius γ with center at the singular point $w = 0$ of $K(w)$. Since $F(s)$ is by hypothesis analytic regular over $\mathfrak{D} + I$, the unknown function $F(w)$ will be also analytic regular within and over the contour Ω and the singular integral equation

$$\mathcal{Q}(w_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Omega}^* \frac{\mathcal{Q}(w)}{w - w_0} dw, \quad (10)$$

where w and w_0 are on Ω will relate the boundary values of the function $\mathcal{Q}(w)$ which is analytic regular when w is in the domain of contour Ω [6]. This singular integral equation is the necessary and sufficient condition for $\mathcal{Q}(w)$ to express the boundary values $\mathcal{Q}(w_0)$ through which it is defined as analytic regular in the domain interior to Ω .

By the maximum-modulus theorem and since $F(w)$ is analytic regular within and over Ω it follows $|\mathcal{Q}(w)| < M |w|^{-1/2}$ which shows that $\mathcal{Q}(w)$ is of the order of $w^{-1/2}$ as w tends to infinity. Then the integral over Ω' vanishes for $\gamma \rightarrow \infty$.

Since the integral over κ vanishes with ε and by taking the imaginary part of the limit of the integral for $\gamma' \rightarrow \infty$ it follows

$$\varphi(-x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda - x_0} d\lambda,$$

where

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{for } \lambda > 0, \quad \sigma(\lambda) = 0 \quad \text{for } \lambda < 0.$$

The function $\varphi(-x_0)$ is expressed as the principal value of an improper integral containing a real parameter x_0 and it can be shown to be uniformly convergent and therefore continuous in the interval $0 \leq x_0 \leq \infty$ [9, 10, 11].

Since the function $\varphi(u)$ vanishes at the points C_2 and A_2 the function $\varphi(s)$ over Γ is continuous and vanishes at $C = (1, 0)$ and $A = (-1, 0)$ as required by the boundary condition (2).

Since the Cauchy principal value exists, the numerical computation of $\varphi(-x_0)$ at a number of points x_0 which are transformed onto the axis y allows the numerical calculation of

$$\int_0^1 \varphi(0, y) dy. \quad (11)$$

4. Conclusions

The minimum wave plus vortex drag coefficient C_{Dop} of a wing of fixed planform and lift coefficient C_L can then be calculated by

$$C_{Dop} = \frac{C_L^2 S_w}{16 b^2 \int_0^1 \varphi(0, y) dy}$$

where S_w is the total area of the wing of span $2b$ [1].

This procedure can be coded for a computer and applied to wings of general planform for which a symmetric domain \mathcal{D} is defined.

As compared to another procedure that has been suggested [2] the functional theoretical basis of the present method assures that the numerical values of $\varphi(0, y)$ and its integral (11) correspond to the unique solution of the mixed harmonic problem (1) (2) (3).

REFERENCES

- [1] E. W. GRAHAM, *The Calculation of Minimum Supersonic Drag by Solution of an Equivalent Two Dimensional Potential Problem*, Douglas Aircraft Comp., Inc., Report No SM-22666 (December 1956).
- [2] H. YOSHIHARA, J. KAINER and T. STRAND, *On Optimum Thin Lifting Surfaces at Supersonic Speeds*, J. aero. Sci. 25, Nr. 8, 473-479 (1958).
- [3] A. SIGNORINI, *Sopra un Problema al Contorno nella Teoria delle Funzioni di Variabile Complessa*, Ann. Mat. pura appl. [3], 25, 253-273 (1916).
- [4] M. V. KELDYSH and L. I. SEDOV, *Effective Solution of Certain Boundary Problems for Harmonic Functions*, Doklady, A. N. U.S.S.R., 16 [1], 7-10 (1937).

- [5] Y. KOMATU, *On Mixed Boundary Value Problems for Functions Analytic in a Simply Connected Domain*, J. math. Soc. Japan 5, 269–294 (1953).
- [6] A. HURWITZ and R. COURANT, *Funktionentheorie* (Springer-Verlag, Berlin 1929).
- [7] G. BIRKHOFF, D. M. YOUNG and E. H. ZARANTONELLO, *Numerical Methods in Conformal Mapping*, Proc. of Symposia in Appl. Math. of the Am. math. Soc. 4, 117–140 (1951).
- [8] T. THEODORSEN and I. GARRICK, *General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*, NACA TR 452 (1934).
- [9] J. PIERPONT, *The Theory of Functions of Real Variables* (Ginn & Co., 1905).
- [10] I. FLÜGGE-LOTZ, *Mathematical Improvement of Method for Computing Poisson Integrals Involved in Determination of Velocity Distribution on Airfoils*, NACA TN 2451 (October 1951).
- [11] R. R. HUNZIKER, *On the Boundary Values of the Solution of a Mixed Harmonic Problem of Supersonic Wing Theory*, CONVAIR, San Diego Div., Theoretical Aerodynamics Note Nr. 11 (October 15, 1957).

Résumé

Les valeurs de contour de la solution d'un problème mixte harmonique sur l'arc portant des données de NEUMANN sont obtenus par une représentation conforme et par évaluation d'une intégrale généralisée. Cette méthode permet de calculer le minimum du coefficient de traînée d'une aile supersonique.

(Received: August 10, 1960.)

Bemerkungen zur glatten Interpolation

VON HEINZ RUTISHAUSER, ETH, Zürich.

Die Interpolation in einer durch m Funktionswerte y_k für gleichabständige Argumentwerte $x_k = x_0 + k h$ gegebenen Funktionstabelle wird gewöhnlich folgendermassen ausgeführt: Für gegebenes x wird zunächst festgestellt, in welchem der Intervalle $I_k = (x_k, x_{k+1})$ das Argument liegt. Alsdann wird die Funktion f durch ein Polygon P_k vom Grade $2r + 1$ ersetzt, welches mit f an den $2r + 2$ Stellen $x_{k-r}, x_{k-r+1}, \dots, x_{k+r+1}$ übereinstimmt, und dann der Wert von $P_k(x)$ anstelle von $f(x)$ genommen (siehe Figur 1 für $r = 2$). Die numerische Berechnung von $P_k(x)$ erfolgt zum Beispiel mit der Besselschen Interpolationsformel.

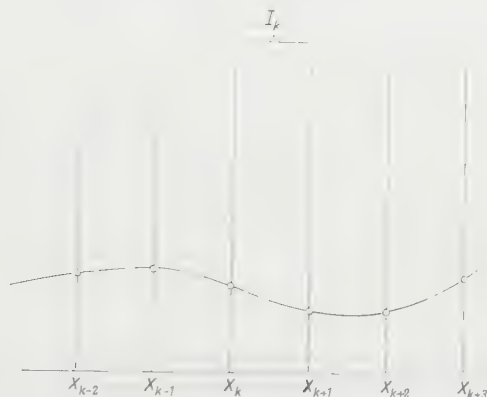
Es ist nun schwer einzusehen, warum man von $P_k(x)$ Übereinstimmung mit $f(x)$ an den Stellen $x_{k-r}, \dots, x_{k+r+1}$ fordert, währenddem doch die Werte von $P_k(x)$ nur im Intervall I_k gebraucht werden. In der Tat wird dafür ein hoher Preis bezahlt, indem die durch dieses Vorgehen definierte Approximationsfunktion für $f(x)$, die aus Polynomstücken (P_k in I_k) besteht, bereits eine unstetige erste Ableitung besitzt.

Es scheint daher zweckmässiger, zu fordern, dass die Approximationsfunktion als Ganzes s -mal stetig differenzierbar sei, dafür aber zu gestatten, dass die einzelnen Interpolationspolynome $P_k(x)$ (vom Grade $2r + 1$) nur in $2r - 2s + 2$ Punkten $x_{k-r+s}, \dots, x_{k+r-s+1}$ mit $f(x)$ übereinstimmen.

Wir betrachten die Gaußsche Interpolationsformel der Ordnung $2r+1$

$$P_k(x) = f_k + t \delta_{k+1/2} + \left(\begin{matrix} t \\ 2 \end{matrix}\right) \delta_k^2 + \left(\begin{matrix} t+1 \\ 3 \end{matrix}\right) \delta_{k+1/2}^3 + \cdots + \left(\begin{matrix} t+r-1 \\ 2r \end{matrix}\right) \delta_k^{2r} + \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r+1 \end{matrix}\right) \delta_{k+1/2}^{2r+1}, \quad (1)$$

wobei $t = (x - x_k)/h$. Die entsprechende Formel für das vorangehende Intervall I_{k-1} erhält man, indem man k durch $k-1$ und t durch $t+1$ ersetzt. Sie kann



Figur 1

Lage der Stützstellen relativ zum Interpolationsintervall I_k .

bekanntlich wie folgt umgeformt werden (mit der gleichen Bedeutung für x wie oben):

$$P_{k-1}(x) = f_k + \left(\begin{matrix} t \\ 1 \end{matrix}\right) \delta_{k-1/2} + \left(\begin{matrix} t+1 \\ 2 \end{matrix}\right) \delta_k^2 + \left(\begin{matrix} t+1 \\ 3 \end{matrix}\right) \delta_{k-1/2}^3 + \cdots + \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r \end{matrix}\right) \delta_k^{2r} + \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r+1 \end{matrix}\right) \delta_{k-1/2}^{2r+1}.$$

Damit lautet die Differenz nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} A_k(x) = P_k(x) - P_{k-1}(x) = & \left[t + \left(\begin{matrix} t \\ 2 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} t+1 \\ 2 \end{matrix}\right) \right] \delta_k^2 \\ & + \left[\left(\begin{matrix} t+1 \\ 3 \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} t+1 \\ 4 \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} t+2 \\ 4 \end{matrix}\right) \right] \delta_k^4 \\ & + \cdots + \left[\left(\begin{matrix} t+r-1 \\ 2r-1 \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} t+r-1 \\ 2r \end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r \end{matrix}\right) \right] \delta_k^{2r} + \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r+1 \end{matrix}\right) \delta_k^{2r+2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Da dabei alle eckigen Klammern verschwinden, erhalten wir

$$A_k(x) = \left(\begin{matrix} t+r \\ 2r+1 \end{matrix}\right) \delta_k^{2r+2}. \quad (3)$$

Wenn $\delta_k^{2r+2} \neq 0$, hat daher $P_k(x) - P_{k-1}(x)$ eine nichtverschwindende erste Ableitung an der Übergangsstelle $x = x_k$. Dies mag unbedeutend erscheinen, wenn δ_k^{2r+2} klein ist; jedoch hat der Verfasser diese Unstetigkeit der ersten Ableitung der Approximationsfunktion an den Übergangsstellen schon oft als sehr störend empfunden.

Zur Verbesserung dieser Situation addieren wir eine Korrektur zu dem Interpolationspolynom für das Intervall I_k

$$Q_k(x) = P_k(x) + \varphi(t) \delta_{k+1/2}^{2r+1} \quad (4)$$

(mit der gleichen Bedeutung von t wie oben) und wählen das Polynom $\varphi(t)$ vom Grade $2r+1$ so, dass $Q_k(x)$ an das entsprechend gebaute Polynom für das Intervall I_{k-1} mit s stetigen Ableitungen anschliesst; das heisst, dass die Differenz

$$\bar{A}_k(x) = \left[\varphi(t) + \binom{t+r}{2r+1} \right] \delta_{k+1/2}^{2r+1} - \left[\varphi(t+1) + \binom{t+r}{2r+1} \right] \delta_{k-1/2}^{2r+1} \quad (5)$$

an der Stelle x_k mitsamt ihren s ersten Ableitungen verschwindet. Man erhält nach (3), (4):

$$\bar{A}_k(x) = \left[\varphi(t) + \binom{t+r}{2r+1} \right] \delta_{k+1/2}^{2r+1} - \left[\varphi(t+1) + \binom{t+r}{2r+1} \right] \delta_{k-1/2}^{2r+1}. \quad (5)$$

Um die gestellte Forderung allgemein zu erfüllen, müssen wir offenbar verlangen, dass gleichzeitig

$$\left[\varphi(t) + \binom{t+r}{2r+1} \right] \quad \text{und} \quad \left[\varphi(t+1) + \binom{t+r}{2r+1} \right]$$

mitsamt den s ersten Ableitungen an der Stelle $t=0$ verschwinden. Das erfordert, wenn wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \binom{t+r}{2r+1} \quad \text{mit} \quad c_{r\mu} \quad (6)$$

bezeichnen:

$$\varphi^{(\mu)}(0) = \varphi^{(\mu)}(1) = -c_{r\mu} \quad (\mu = 0, 1 \dots s). \quad (7)$$

Da φ ein Polynom vom Grade $2r+1$ sein soll, ist φ durch (7) noch nicht festgelegt, wenn $s < r$. Wir können daher weitere Forderungen stellen, zum Beispiel

$$\varphi(n) = 0 \quad \text{für} \quad n = k-r+s, k-r+s+1, \dots, k+r-s+1. \quad (8)$$

Dies sind $2r-2s$ zusätzliche Nullstellen (0 und 1 sind unter (7) bereits berücksichtigt).

Da nun

$$\binom{t+r}{2r+1} = \frac{t(t^2-1)(t^2-4)\dots(t^2-r^2)}{(2r+1)!}$$

eine ungerade Funktion ist, werden die $c_{r\mu}$ für gerades μ verschwinden und auch die Nullstellen (8) zu $t=1/2$ symmetrisch liegen. Dies bedeutet, dass das durch (7) und (8) eindeutig bestimmte Polynom $\varphi(t)$ antisymmetrisch bezüglich $t-1/2$ ist, das heisst

$$\varphi(t) + \varphi(1-t) = 0. \quad (9)$$

Wir machen nun den Ansatz

$$\varphi(t) = \binom{t+r-s}{2r-2s+2} \psi(t), \quad (10)$$

wobei wir vermerken, dass infolge der Symmetrie von $\binom{t+r-s}{2r-2s+2}$ bezüglich $t = 1/2$ auch das Polynom $\psi(t)$ vom Grade $2s - 1$ antisymmetrisch sein muss. Da andererseits

$$\binom{t+r}{2r+1} = \frac{(t+r)(t-r)(t+r-1)(t-r+1)\dots(t+r-s+1)}{(2r+1)(2r)(2r-1)(2r-2)\dots(2r-2s+3)} \binom{t+r-s}{2r-2s+2} \quad (11)$$

und

$$\varphi(t) + \binom{t+r}{2r+1} = \binom{t+r-s}{2r-2s+2} \left[\psi(t) + \frac{(t+r)(t-r)\dots(t+r-s+1)}{(2r+1)(2r)\dots(2r-2s+3)} \right] \quad (12)$$

für $t = 0$ mitsamt den s ersten Ableitungen verschwinden sollen und $\binom{t+r-s}{2r-2s+2}$ bei $t = 0$ eine einfache Nullstelle hat, folgt:

Der Inhalt der eckigen Klammer bei (12) muss für $t = 0$ mitsamt seinen $s - 1$ ersten Ableitungen verschwinden. Zusammen mit $\psi(t) + \psi(1-t) = 0$ ist das Polynom $\psi(t)$ dadurch eindeutig bestimmt (bei festem r, s).

Damit liefert dann

$$Q_k(x) = P_k(x) + \psi(t) \binom{t+r-s}{2r-2s+2} \delta_{k+1/2}^{2r+1} \quad (13)$$

eine Interpolationsformel für das Intervall I_k , die mit dem entsprechend gebildeten Polynom für die Intervalle I_{k-1} und I_{k+1} mit s stetigen Ableitungen anschliesst. (Dabei bedeutet P_k das exakte Interpolationspolynom vom Grad $2r+1$, welches mit $f_0(x)$ an den $2r+2$ Stellen $x_{k-r}, \dots, x_{k+r+1}$ übereinstimmt; es kann nach irgendeiner der Formeln von GAUSS, BESSEL oder NEWTON berechnet werden.)

Dieser Erfolg konnte offenbar durch Abänderung nur des letzten $\left(\delta_{k+1/2}^{2r+1}\right)$ -Gliedes der Besselschen Interpolationsformel erzielt werden, und darum sinkt auch der Grad der Approximation nur um 1.

Die bisherigen Betrachtungen zeigen, dass man solche Korrekturterme für beliebiges r (wobei $2r+2$ die Anzahl der Stützstellen und $2r+1$ den Grad des Interpolationspolynoms bedeuten) und für jedes $s \leq r$ ($s =$ Anzahl der stetigen Ableitungen beim Übergang von einem Intervall zum nächsten) bilden kann, doch werden die Formeln mit steigendem s rasch komplizierter. Wir behandeln im folgenden die Fälle $s = 1$ und $s = 2$.

Konkrete Beispiele

$s = 1$ (stetiger Anschluss der ersten Ableitung):

Hier muss offenbar

$$\psi(t) + \frac{(t+r)}{2r+1}$$

für $t = 0$ verschwinden; also ist

$$\psi(0) = -\frac{r}{2r+1} \quad \text{und} \quad \psi(1) = +\frac{r}{2r+1}$$

oder

$$\psi(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{2r}{2r+1}$$

Das Korrekturglied wird also hier:

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{2r}{2r+1} \binom{t+r-1}{2r} \delta_{k+1/2}^{2r+1}.$$

Nun kann man dieses aber mit dem letzten Glied der Besselschen Formel

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2r+1} \binom{t+r-1}{2r} \delta_{k+1/2}^{2r+1}$$

zusammenfassen und erhält:

Satz: Durch Weglassen des Nenners $2r+1$ beim letzten Glied

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2r+1} \binom{t+r-1}{2r} \delta_{k+1/2}^{2r+1}$$

der Besselschen Interpolationsformel vom Grade $2r+1$ erhalten wir einen stetigen Anschluss der ersten Ableitung in diesem Intervall zum nächsten.

Beispielsweise erhält man für $r=2$ die folgende 6-Punkte-Formel:

$$\left. \begin{aligned} Q_k(x) = f_k + t \delta_{k+1/2} + \binom{t}{2} \mu \delta_{k+1/2}^2 + \frac{t-1/2}{3} \binom{t}{2} \delta_{k+1/2}^3 \\ + \binom{t+1}{4} \mu \delta_{k+1/2}^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right) \binom{t+1}{4} \delta_{k+1/2}^5, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wobei $\mu \delta_{k+1/2}^{2\nu} = 1/2 (\delta_k^{2\nu} + \delta_{k+1}^{2\nu})$ bedeutet.

Auf die Funktion e^x mit den Stützstellen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ angewendet, erhält man folgende interpolierte Werte (und ihre Differenzen):

a) mit normaler Besselscher Formel
vom Grade 5

0,8	2,23148		
0,85	2,34432	11 284	569
0,9	2,46285	11 853	601
0,95	2,58739	12 454	635
1,0	2,71828	13 089	1251
1,05	2,86168	14 340	698
1,1	3,01206	15 038	728
1,15	3,16972	15 766	761
1,2	3,33499	16 527	

b) mit Formel (16)

0,8	2,23849		
0,85	2,35074	11 225	494
0,9	2,46793	11 719	523
0,95	2,59035	12 242	551
1,0	2,71828	12 793	743
1,05	2,85364	13 536	924
1,1	2,99824	14 460	945
1,15	3,15229	15 405	960
1,2	3,31594	16 365	

Obwohl die Werte unter b) keineswegs genauer sind als die unter a), kann der glattere Verlauf der interpolierenden Funktion bedeutende Vorteile bieten.

$s=2$. Hier ist offenbar zu fordern, dass

$$\psi(t) = \frac{(t+r)(t-r)(t+r-1)}{(2r+1)2r(2r-1)}$$

an der Stelle $t=0$ mitsamt der ersten Ableitung verschwindet, was zusammen mit

der Antisymmetrie das Polynom $\psi(t)$ vom Grade 3 eindeutig bestimmt. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} \psi(t) &= \frac{r}{2r+1} \left(t - \frac{1}{2}\right) \left(t^2 - t - \frac{r-1}{2r-1}\right), \\ \varphi(t) &= r \left(t^2 - t - \frac{r}{2r+1}\right) \frac{t-1/2}{2r+1} \left(\frac{t+r-2}{2r-2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Auch hier kann man die Korrektur wieder mit dem letzten Besselschen Term zusammenfügen. Dieser ist

$$\left(\frac{t+r-1}{2r}\right) \frac{t-1/2}{2r+1} \delta_{k+1/2}^{2r+1}$$

und also der Koeffizient des $\delta_{k+1/2}^{2r+1}$ -Gliedes in der modifizierten Besselschen Interpolationsformel

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{t+r-2}{2r-2}\right) [(2r^2 - 2r + 1)(t^2 - t) - (r^2 - r)] \delta_{k+1/2}^{2r+1}, \quad (18)$$

währenddem die übrigen Glieder unverändert bleiben. Damit erhält man zum Beispiel mit $r = 3$ eine 8-Punkteformel (mit der üblichen Bezeichnung von t)

$$\left. \begin{aligned} Q_k(x) &= f_k + t \delta_{k+1/2} + \binom{t}{2} \mu \delta_{k+1/2}^2 + \cdots + \binom{t+2}{6} \mu \delta_{k+1/2}^6 \\ &\quad + \left(t - \frac{1}{2}\right) \binom{t+1}{4} [13t^2 - 13t - 6] \delta_{k+1/2}^7, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

die eine durchgehend zweimal stetig differenzierbare Approximationsfunktion definiert.

Summary

The usual interpolation formulae for equidistant abscissae (NEWTON-GREGORY, BESSEL) define a piecewise polynomial approximation function whose first derivative is generally discontinuous at every meshpoint. It is shown how these formulae can be modified (without using higher derivatives of the given function) such that the piecewise polynomial approximation function has s continuous derivatives (where s is a given integer).

(Eingegangen: 2. Juli 1960.)

Eine Methode zur numerischen Lösung einfacher nichtlinearer Randwertaufgaben mit Anwendung auf ein Randwertproblem der Himmelsmechanik

Von F. SCHLAEFFER, Zürich¹⁾

Es sei eine Funktion $x(t)$ gesucht, welche die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(x, t) \quad (1)$$

befriedigt, wobei $f(x, t)$ eine vorgegebene Funktion ist, und die inhomogenen Randbedingungen

$$x(-1) = a, \quad x(+1) = b \quad (2)$$

sind²⁾.

Mit der Einführung der zur homogenen Randwertaufgabe gehörigen Greenschen Funktion $K(t, \tau)$ wird das Problem äquivalent mit der Integralgleichung

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-1}^{+1} K(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \quad (3)$$

wie man durch auf der Hand liegende Erweiterungen der Ausführungen in [1]³⁾, Seite 306 ff. erkennt.

Dabei ist

$$x_0(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t, \quad (4)$$

also die Gleichung der Geraden durch die gegebenen Randpunkte und

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(1+t)(1-\tau)}{2} & \text{für } 1 \leq t \leq \tau \leq 1 \\ \frac{(1-t)(1+\tau)}{2} & \text{für } -1 \leq \tau \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

Kennt man eine Näherungslösung $x^*(t)$ für $x(t)$, so kann man diese auf der rechten Seite von (3) einsetzen und bekommt dann auf der linken Seite eine bessere Näherung $x^{**}(t)$, die man wiederum als neues $x^*(t)$ auf die rechte Seite bringt. Auf diese Weise

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik, ETH.

²⁾ Das hier beschriebene Verfahren lässt sich ohne Schwierigkeiten auf Gleichungssysteme

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$$

und Randbedingungen

$$x_j(-1) = a_j, \quad x_j(+1) = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

verallgemeinern. Ebenso lassen sich, sofern bereits brauchbare Näherungslösungen zur Verfügung stehen, auch Fälle, wo f noch von der ersten Ableitung abhängt, behandeln.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 517.

verfährt man so lange, bis sich zwei aufeinanderfolgende Näherungen für alle t im Intervall nur noch um einen kleinen vorgegebenen Betrag unterscheiden und erhält so die gesuchte Lösung. Verfügt man über keine spezielle erste Näherung, so kann man eine solche immer bekommen, indem man das kubische Polynom wählt, das bei $t = -1$ und $t = +1$ mit der exakten Lösung in Funktionswert und zweiter Ableitung, die sich durch (1), (2) berechnen lässt, übereinstimmt.

Die Hauptschwierigkeit besteht in der numerischen Berechnung des Integrals in (3). Da $K(t, \tau)$ bei $t = \tau$ eine unstetige erste Ableitung besitzt, lassen sich die gewöhnlichen Newton-Cotes-Formeln (vgl. z. B. [2], Seite 139ff.) nicht anwenden. Wir müssen deshalb spezielle Formeln herleiten, indem wir nicht wie normalerweise den ganzen Integranden, sondern nur $f(x, t)$ allein durch Polynome n -ten Grades in t approximieren.

Eine Näherungslösung $x^*(t)$ sei an $n+1$ verschiedenen Stützstellen t_i , $i = 0, 1, \dots, n$, deren Lage im Intervall $(-1 \leq t_i \leq +1)$ prinzipiell beliebig ist, bekannt, und es sei

$$f_i = f[x^*(t_i), t_i], \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

Bezeichnen wir mit $l_{nk}(t)$ das Polynom n -ten Grades, für das

$$l_{nk}(t_i) = \delta_{ik} \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots, n$$

gilt (Lagrange-Polynom), so ist

$$\sum_{k=0}^n f_k l_{nk}(t) = P_n(t) \quad (7)$$

das Polynom vom Höchstgrad n , das an den Stellen t_i mit $f(x^*, t)$ übereinstimmt. Die verbesserten Werte $x^{**}(t_i)$ berechnen wir mit Hilfe von Formel (3), aus der

$$x^{**}(t_i) = x_0(t_i) + \int_{-1}^{+1} K(t_i, \tau) f[x^*(\tau), \tau] d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3a)$$

folgt. Dabei approximieren wir das Integral auf der rechten Seite durch [vgl. (7)]

$$\int_{-1}^{+1} K(t_i, \tau) P_n(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n f_k \int_{-1}^{+1} K(t_i, \tau) l_{nk}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n f_k A_{ik}. \quad (8)$$

Die Koeffizienten

$$A_{ik} = \left. \int_{-1}^{+1} K(t_i, \tau) l_{nk}(\tau) d\tau, \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, n \end{matrix} \right\}, \quad (9)$$

sind von der Funktion $f(x, t)$ vollkommen unabhängig; sie sind einzig gegeben durch die gewünschte Ordnung n des Rechenverfahrens und durch die Lage der Stützstellen t_i .

Nach Formel (5) ist der Kern $K(t_i, \tau)$ in den beiden Teilintervallen $(-1 \leq \tau \leq t_i)$ und $(t_i \leq \tau \leq +1)$ je eine lineare Funktion in τ , der Integrand in (9) also je ein Polynom $(n+1)$ -ten Grades. Aus diesem Grunde können die A_{ik} analytisch berechnet werden.

Es seien noch einige Eigenschaften der A_{ik} erwähnt. Setzt man in (8) $P_n(\tau) \equiv 1$ ein, so erhält man unter Benützung von (5)

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} = \int_{-1}^{+1} K(t_i, \tau) d\tau = \frac{1 - t_i^2}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

Sind die t_i symmetrisch zum Ursprung verteilt, das heisst $t_{n-i} = -t_i$ für alle i , so gilt

$$A_{ik} = A_{n-i, n-k}. \quad (11)$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich, wenn Stützstellen mit Intervallsgrenzen zusammenfallen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } t_0 = -1 \text{ folgt } A_{i0} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \\ \text{Für } t_n = 1 \text{ folgt } A_{in} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Aus (3a) und (8) bekommt man schliesslich die endgültige Iterationsformel

$$x^{**}(t_i) = x_0(t_i) + \sum_{k=0}^n A_{ik} f_k, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

Der erste Teil rechts in (13) ist nach (4) die lineare Interpolation zwischen den gegebenen Randpunkten, und der zweite Teil lässt sich als Produkt einer Matrix (A_{ik}) und dem Vektor der Funktionswerte f_k auffassen.

Beispiel einer Matrix (A_{ik}):

Für $n = 4$ und die 5 äquidistanten Stützstellen

$$t_0 = -1, \quad t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{2}, \quad t_4 = 1$$

liefert Formel (9) die folgende Matrix (A_{ik}), welche alle Eigenschaften (10) bis (12) besitzt

$$(A_{ik}) = \frac{1}{1920} \begin{vmatrix} 0 & 27 & 16 & 7 & 0 \\ 0 & 332 & 256 & 132 & 0 \\ 0 & 222 & 416 & 222 & 0 \\ 0 & 132 & 256 & 332 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 27 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nach Beendigung der Iteration kann man auf einfache Weise die in vielen Fällen wichtige erste Ableitung von $x(t)$ an der Stelle $t = -1$ berechnen. Aus (1) und (2) folgt nämlich

$$\frac{dx}{dt}(-1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - \tau) f(x, \tau) d\tau + \frac{b-a}{2}, \quad (14)$$

wie man durch partielle Integration verifiziert. Das Integral in (14) kann man mit gewöhnlicher Quadratur berechnen.

Anwendungsbeispiel

Sind zu zwei gegebenen Zeiten die heliozentrischen Standorte eines Himmelskörpers bekannt, so läuft die Bahnbestimmung auf ein Randwertproblem vom

Typus (1), (2) heraus. BUCERIUS (vgl. [3]) hat vorgeschlagen, hier die Integralgleichungsmethode zu verwenden. Auf der ERMETH (Elektronische Rechenmaschine an der ETH) wurde folgendes Beispiel gerechnet:

Gegeben sind zwei Standorte eines Himmelskörpers verschwindender Masse:

t	x	y
2. April	0,94299	0,47748
1. Juni	0,35763	1,60295,

wobei die Koordinaten in Gaußschen Einheiten gegeben sind. Gesucht ist der Standort am 22. April. Falls nur die Anziehung durch die Sonne berücksichtigt wird, genügt der Ortsvektor $\mathbf{r} = (x, y)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei

$$k^2 = 2,95912 \cdot 10^{-4}.$$

Das Zeitintervall vom 2. April bis 1. Juni wurde durch 7 äquidistante Stützstellen in 6 Teile eingeteilt. Man erhielt für die Koordinaten am 22. April

$$x = 0,79285, \quad y = 0,91025.$$

Es waren 4 Iterationsschritte nötig, wobei das erwähnte kubische Polynom als erste Approximation diente. Die exakten Werte betragen

$$x = 0,79284, \quad y = 0,91022.$$

Es liegt auf der Hand, dass die beschriebene Methode auch angewendet werden kann, wenn in einer vorgeschriebenen Zeit ein gegebenes Ziel im Weltraum erreicht werden soll.

Die Mitteilung ist ein kurzer Auszug aus einer Diplomarbeit für angewandte Mathematik, in der auch Vorschläge zur Verwendung der Gaußschen Quadratur gemacht wurden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HILBERT-COURANT, *Methoden der mathematischen Physik I* (Julius Springer, Berlin).
- [2] F. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis* (Walter de Gruyter, Berlin).
- [3] BUCERIUS, *Bahnbestimmung als Randwertproblem*, Veröffentlichungen der Sternwarte München, Bd. 3, 15 (1949).

Summary

A method is described for solving the boundary-value problem connected with the differential equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -f(x, t).$$

The problem is replaced by an integral equation with piecewise linear Kernel. The integral equation is solved by successive approximation and numerical integration. Numerical results are given working on an example of celestial mechanics.

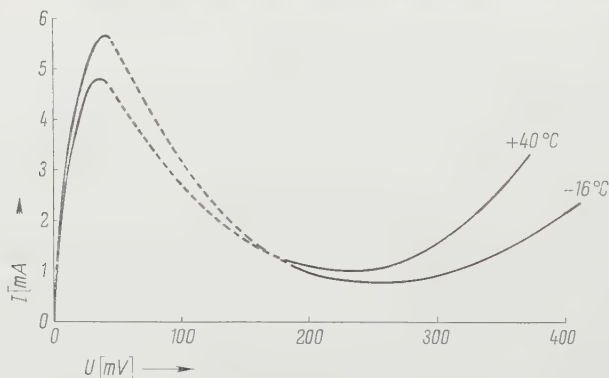
(Eingegangen: 25. Juni 1960).

**Réunion de Printemps de la Société Suisse de Physique,
à Winterthour les 7 et 8 Mai 1960**

Compte rendu des communications de physique et de mathématiques appliquées

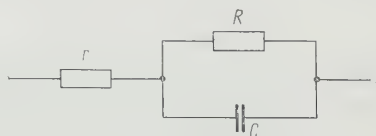
Über das Impulsverhalten von Tunneldioden. Von E. BALDINGER und U. SPYCHER, Basel¹⁾

Anfangs 1958 hat ESAKI [1]²⁾ als erster darüber berichtet, dass bei hochdotierten Flächendioden eine Kennlinie mit einem Gebiet negativen Widerstandes erreicht werden kann. Zur Erklärung der grundsätzlichen Wirkungsweise sei auf die Arbeiten von SOMMERS [2], SKLAR [3] und HALL [4] verwiesen. Stellt man einen Arbeitspunkt im Bereich des negativen Widerstandes ein (Figur 1), so lässt sich die



Figur 1
Statische Kennlinie einer Tunneldiode

Tunneldiode als Verstärker, Oszillator oder Mischstufe bis ins Gebiet der kHz verwenden [5, 6]. Für kleine Signale gilt dabei das Ersatzschema der Figur 2.



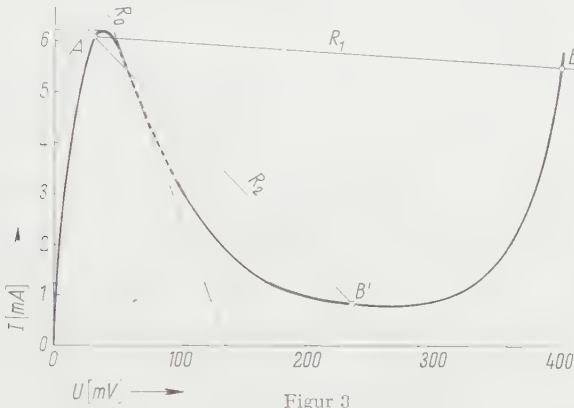
Figur 2

Ersatzschema für kleine Signale. In abgestimmten Schaltungen ist in Serie zu r noch die Induktivität von Zuleitung und Gehäuse zu berücksichtigen (~ 2 nH).

¹⁾ Anstalt für angewandte Physik der Universität.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 521.

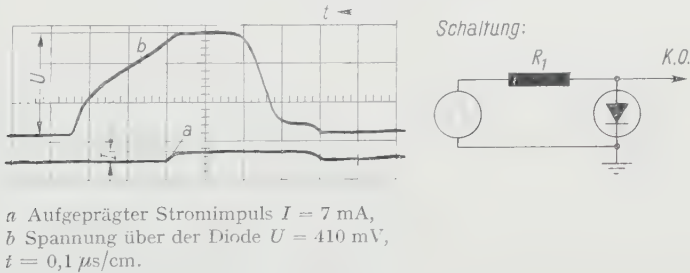
Dieses Ersatzschema kann als Näherung für die ganze Diodenkennlinie verwendet werden, wobei allerdings R sehr stark und C schwach von der Spannung abhängig sind. Ist der Widerstand des steuernden Stromkreises grösser als R_0 (bzw. dem kleinsten Wert des negativen Widerstandes der Dioden-Kennlinie), so erhält man zwei stabile Zustände A bzw. B (Figur 3). Messungen im Hinblick auf eine Anwendung



Figur 3
Aussteuerung in Kippschaltungen.

als Diskriminator ergeben bei konstanter Temperatur eine Reproduzierbarkeit des ersten Kipp-Punktes innerhalb von $0,2\text{‰}$. Wie man aus Figur 1 ersieht, besteht bei den ausgemessenen Dioden hingegen eine starke Temperaturabhängigkeit.

Die Aussteuerung mit einem Stromimpuls, dessen Amplitude knapp über I_p liegt (Lastgerade R_1 in Figur 3), ergibt einen Spannungsverlauf an der Diode nach Figur 4. Der zeitliche Verlauf dieser Spannung lässt sich qualitativ verstehen: nach



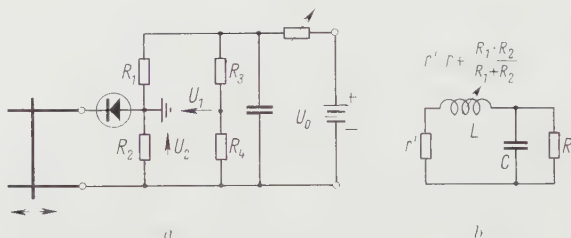
Figur 4

einem Spannungssprung an v mit der Anstiegszeit des Triggersignals muss die Kapazität auf die Kippspannung aufgeladen werden. Dann erfolgt das Umkippen mit der spannungsabhängigen Zeitkonstante RC . Die Rückflanke des Impulses ergibt zunächst wieder einen Spannungssprung über v . Anschliessend wird die Kapazität entladen (die aufgespeicherten Ladungsträger verschwinden durch Rekombination, Diffusions- und Feldstrom). Die Tunneldiode verhält sich vorerst wie eine normale p - n -Diode, deren Eigenschaften von HEINLEIN und anderen beschrieben worden sind [7, 8]. Sobald das Gebiet negativen Widerstandes wieder erreicht ist, fällt die Spannung rasch auf Null zurück.

Die Dauer des langsamen Aufladens von C ist durch die Stromamplitude gegeben. Anstiegs- und Abfallzeiten sind somit in grossem Masse durch das Aufladen bzw. Entladen der Kapazität im Gebiete positiven Widerstandes bestimmt, was insbesondere bei bistabilen und monostabilen Schaltungen zu berücksichtigen ist. Die besten Resultate erreicht man durch gleichstrommässige Vorspannung der Diode über einen Lastwiderstand, der die Kennlinie möglichst nahe an den Kippunkten schneidet (R_2 in Figur 3).

Die Messungen wurden an einer Diode mit relativ grosser Zeitkonstante ausgeführt. Eine Diode mit hoher Grenzfrequenz wird grundsätzlich dieselben Erscheinungen zeigen. Will man mit Tunneldioden hohe Schaltgeschwindigkeiten erreichen, so ist in erster Linie den beschriebenen Effekten Aufmerksamkeit zu schenken.

Bestimmung der Parameter des Ersatzschemas (Figur 2). Die Bestimmung von r , R und C erfolgte in einer Brückenordnung [9], verbunden mit einer Lecherleitung (Figur 5a). Unter der Voraussetzung, dass die Brücke ohne Tunneldiode



Figur 5

a) Brücke zur Bestimmung der Parameter; b) Wechselstromersatzschema von Diode und Brücke.

gleichstrommässig abgeglichen ist, lassen sich Gleichstrom und -spannung der Diode direkt aus Spannungsmessungen bestimmen. Es gilt

$$U_d = -U_2, \quad I_d = U_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Die Lecherleitung wirkt für alle in dieser Anordnung erzeugten Schwingungen als Induktivität. Figur 5b zeigt das Wechselstromersatzschema einschliesslich Diode. Im negativen Ast regt sich eine Schwingung ω an, wenn

$$\frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \geq r'.$$

Für die Kreisfrequenz ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\omega^2 = \frac{1}{L C \left(1 + \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)}.$$

Die Messung von ω liefert anhand der beiden Beziehungen die Grösse C sowie eine Kontrolle der aus den statischen Messungen bestimmten Werte von r und R .

Wir danken der Firma CLEVITE und Herrn LEUENBERGER für die Überlassung einiger Tunneldioden und dem Schweizerischen Nationalfonds für die finanzielle Unterstützung dieser Untersuchungen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. ESAKI, Phys. Rev. *109*, 603 (1958).
- [2] H. S. SOMMERS, Jr., Proc. IRE *47*, Nr. 7, 1201 (1959).
- [3] B. SKLAR, Electronics, *32*, Nr. 45, 54 (1959).
- [4] R. N. HALL, IRE Trans. Electron Devices (Jan. 1960).
- [5] K. K. N. CHANG, Proc. IRE *47*, Nr. 7, 1268 (1959).
- [6] R. F. RUTZ, IBM, J. of Research, *3*, Nr. 4, 372 (1959).
- [7] HEINLEIN, Arch. elektr. Übertr. *11*, 387 (1957).
- [8] ECKESS und DUCKER, Electronics *33*, Nr. 15, 51 (1960).
- [9] GOODMAN, Rev. sci. Instrum., *31*, Nr. 3, 286 (1960).

Signalfluss und Analogiedarstellung der Neutronenökonomie beim Abbrand von Reaktorbrandstoffen. Von W. HÄLG, Zürich. Erschienen als Kurze Mitteilung, ZAMP *11*, 433 (1960).

Automatische Anlage zur Registrierung digitaler Messwerte. Von E. BALDINGER, W. HÄLG und P. WEHRLI³⁾

1. Arbeitsweise der Registrieranlage

Es ist gegenwärtig in vielen Zweigen der Forschung üblich, für die Auswertung von Messdaten elektronische Digitalrechnergeräte zu verwenden. Eine solche Auswertung drängt sich besonders dann auf, wenn die Rechnungsprogramme hierfür vielfältig und zeitraubend werden oder wenn die Anzahl der Messdaten sehr gross ist. In allen diesen Fällen ist es wünschenswert, die Messresultate in einer Form zu speichern, welche deren unmittelbare Übermittlung in das Gedächtnis der Rechenmaschine erlaubt. Auf diese Weise sind Fehlerquellen, die bei der Übertragung der Daten aus einem Messprotokoll in eine dem Rechner gefällige Form entstehen, vermeidbar.

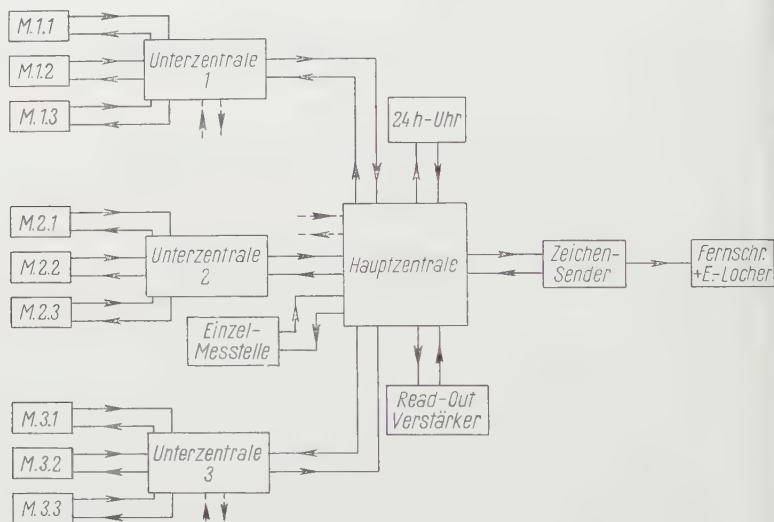
Die nachstehend in Figur 1 beschriebene Apparatur stellt eine Möglichkeit dar, diesen Anforderungen zu genügen. Sie soll hauptsächlich zur Registrierung kernphysikalischer Messergebnisse verwendet werden. Als erste Anwendungen sind die Aufzeichnungen der Messwerte von Halbwertszeitanalysen und Neutronendiffraktionsexperimenten sowie von Neutronenflussverteilungen in einem unterkritischen System vorgesehen. Die Aufzeichnung geschieht mittels eines Blattschreibers, wie er im europäischen Fernschreibnetz verwendet wird. Angebaut an den Blattschreiber ist ein Empfangslocher, der gleichzeitig im 5-Lochcode einen Papierstreifen perforiert. Ein weiterer Lochstreifensender ermöglicht die Kontrolle und eventuelle Duplizierung solcher Streifen. Während der Schreibpausen bei automatischem Betrieb können ergänzende Informationen mit Hilfe der Handtastatur dem Messprotokoll beigelegt werden. Der Blattschreiber benötigt an seinem zweidrängigen Eingang für jedes zu schreibende Symbol⁴⁾ eine Impulsfolge, die durch ein Umsetzgerät, den Zeichensender, aus den Gleichstromsymbolen der Messstellen erzeugt wird. Die Schreibgeschwindigkeit ist durch die Arbeitsweise des Zeichensenders, welcher während der Erzeugung eines Symbols und nach Ablauf desselben für die Auslösung gesperrt bleibt, auf 5 Zeichen⁴⁾ pro Sekunde beschränkt.

³⁾ Institut für angewandte Physik der Universität Basel, Eidg. Institut für Reaktorforschung, Würenlingen.

⁴⁾ Unter der Bezeichnung Symbol oder Zeichen werden sowohl Buchstaben als auch Ziffern sowie Hilfszeichen wie Zwischenraum, Zeilenvorschub, Wagenrücklauf usw. verstanden.

Ein am Ende eines Zeichens erzeugter Fortschaltungsimpuls kann zur Weiter-schaltung der Schrittschalter in der Haupt- oder Unterzentrale oder in der ange-schalteten Meßstelle benützt werden.

Die Hauptzentrale enthält im wesentlichen neben einigen Hilfsrelais einen Sucher, der den Zeichensender entweder mit einer Einzelmeßstelle oder einer Unter-zentrale verbindet, sowie einen Schrittschalter. Ist eine Meßstelle oder eine Unter-



Figur 1

Blockdiagramm der Anlage. Mit $M_{i,k}$ sind die verschiedenen Meßstellen der 3 eingezeichneten Experimente bezeichnet.

zentrale ablesebereit, so setzt sich, durch ein entsprechendes Signal betätigt, der Sucher so lange in Bewegung, bis die Meßstelle gefunden ist, worauf der Antriebsmotor des Fernschreibers anläuft. Hierauf wird mit einiger Verzögerung ein fest eingestelltes Ableseprogramm mit Hilfe eines Schrittschalters gestartet. Dieses Programm besteht vorerst aus den für Wagenrücklauf, Zeilenvorschub und Umstellung auf Ziffernempfang notwendigen Zeichen, worauf eine Kennzeichnung der angeschalteten Meßstelle erfolgt. Da es oft wünschenswert ist, die Zeit der Aufzeichnung festzuhalten, wird anschliessend eine mit der Hauptzentrale verbundene 24-Stunden-Uhr abgelesen, bevor die Daten der betreffenden Meßstelle herausgeschrieben werden. Die heute verwendete Uhr registriert Stunden und Minuten.

Gewöhnlich enthalten die Experimente mehrere Meßstellen, welche durch ein spezielles Programm miteinander gekoppelt sind. Die Ablesung dieser verschiedenen Informationsquellen erfolgt in diesem Falle über eine Unterzentrale, welche selbständig die Umschaltung zu den Teilmeßstellen besorgt. Soll jedoch eine Einzelmeßstelle abgelesen werden, dann ist deren direkter Anschluss an die Hauptzentrale unter Umgehung einer Unterzentrale möglich. Die elektrischen Signale der Ziffernsymbole aller Meßstellen werden, bevor sie dem Zeichensender mitgeteilt werden, in einem Transistor-Leistungsverstärker (Read-out-Verstärker) soweit verstärkt, dass ein einwandfreies Ansprechen der Relais im Zeichensender gewährleistet wird.

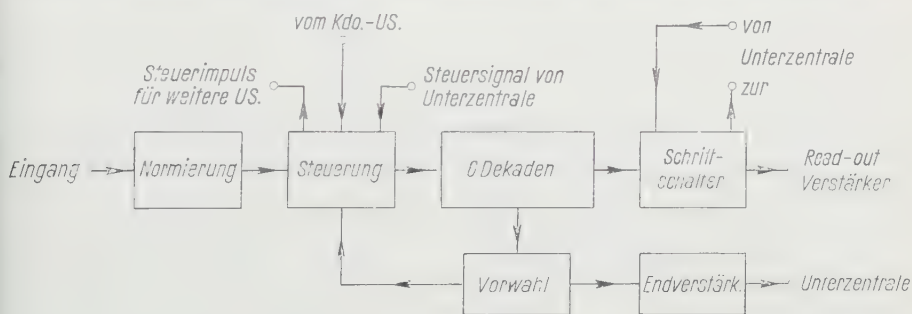
Diese Schaltung ermöglicht eine Reduktion der Anzahl von Leistungsverstärkern auf insgesamt 10, entsprechend den Ziffern 0 bis 9. Die Ausgänge der Meßstellen erlauben den Anschluss eines bis zu 300 m langen Verbindungskabels zwischen Unterzentrale und Hauptzentrale.

Im Vollausbau können 10 Abonnenten an die Hauptzentrale angeschlossen werden. Die gegenwärtig erstellten Unterzentralen sind für 6 Meßstellen ausgelegt. Unter der Annahme, dass bei jeder dieser Meßstellen eine 6stellige Zahl abgelesen werden soll, erfordert die Registrierung aller Informationen einer 6fachen Meßstelle, einschliesslich aller Hilfssymbole wie Zwischenräume, Wagenrücklauf und Zeilenvorschub, ferner einer allfälligen Verzögerung, verursacht durch die Schaltung der Minutenuhr, 15 Sekunden⁵⁾.

Ein Teil der Meßstellen wird in der Regel aus einem Geber (zum Beispiel Partikelzähler) mit nachgeschaltetem Untersetzter bestehen. Gegenwärtig sind 4 für den Exponentialversuch und 3 weitere zur Halbwertszeitanalyse im Betrieb. Die Steuerung der Experimente geschieht durch Impulse eines Programmgebers mit einer Zeitverzögerung von einigen Mikrosekunden.

2. Beschreibung der Untersetzter

Um die Wärmeproduktion und das Volumen der hier beschriebenen automatischen Registrieranlage in bescheidenen Grenzen zu halten, wurden zum Bau der elektronischen Schaltungen ausschliesslich Transistoren verwendet, wobei die überwiegende Zahl auf die Untersetzereinheiten entfallen. Wie aus dem Blockdiagramm Figur 2 zu ersehen ist, besteht jeder Untersetzter aus der Eingangsschaltung, welche



Figur 2

Blockdiagramm eines Untersetzers. Kdo-US = Kommando-Untersetzter.

die für den automatischen Betrieb notwendigen Hilfsschaltungen zur Steuerung enthält, ferner aus 6 Dekaden, Endverstärker, Schrittwähler und einem stabilisierten Transistor-Netzgerät. Der Schrittwähler dient zum Herauslesen der in den Dekaden gespeicherten Zahlen. Die Ablesung erfolgt auf ein Kommandosignal der Zentrale. Gleichzeitig stellt der Schrittwähler die Nullstellung der Untersetzter her und liefert beim Zurücklaufen in die Ruhestellung ein Hilfssignal, das die Ablung der nächsten Einheit einleitet. Zur Kennzeichnung einer Untersetzter-Einheit

⁵⁾ Für den Weiterausbau der Anlage ist die Verwendung eines Blattschreibers oder Streifenlochers mit Paralleleingang vorgesehen. Dadurch wird die Registriergeschwindigkeit auf 10 Zeichen resp. 33 Zeichen pro Sekunde erhöht.

b) Eingangsschaltung

Mit Hilfe eines von einem Steuergerät gelieferten Dauersignales lässt sich der Umsetzer ein- bzw. ausschalten. Nach Wunsch kann das Ausschalten ebenfalls durch einen kurzzeitigen Impuls geschehen, zum Beispiel dadurch, dass einer der Umsetzer (Kommando-Umsetzer) eine einstellbare und vorgewählte Ziffer erreicht hat. Alle Umsetzer sind gleichartig und austauschbar und durch geeignete Wahl der Verbindungen kann irgendeiner zum «Kommando-Umsetzer» bestimmt werden.

Die zu zählenden Impulse werden zunächst im Schmitt-Trigger normiert und gelangen über das «Gate» zum Eingang der 1. Dekade. Die Verwendung von Transistoren der Type OC170 gewährleistet auch bei μ s-Impulsen ein einwandfreies Arbeiten der Schmitt-Trigger-Schaltung.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass sich eine solche transistorisierte Anlage leicht von einem kleinen Akkumulator im Pufferbetrieb speisen lässt, wodurch Störungen durch Unterbrüche des Kraftnetzes vermieden werden.

Ein Teil der Entwicklungskosten wurde aus Mitteln der Kommission für Atomwissenschaft des Bundes finanziert, und wir möchten es nicht unterlassen, für diese Hilfe unseren besten Dank auszusprechen.

An Experimental Investigation on Potential Flow through Spiral Casings. By N. ATHANASSIADIS, Zürich⁶⁾

The flow through a water turbine spiral casing, outside a cylindrical surface S_0 surrounding the guide vanes, can be considered as a *potential* one, if:

- a) the fluid is incompressible and frictionless,
- b) the flow is continuous and stationary,
- c) there is not any vorticity in the inlet pipe and
- d) we eliminate the fixed blades outside S_0 .

It is known from potential theory, that, in a region, an *harmonic function* e.g. the velocity potential ϕ , is determined if $c_n = \partial\phi/\partial n$ throughout its surrounding surface is determined; n is the normal direction to this surface. Therefore, assuming that the inlet pipe of the casing is straight and of a constant cross-section to infinity, the potential flow through the casing is determined if the radial component C_{r_0} of the velocity along S_0 is determined. To find the function ϕ ($C = \text{grad } \phi$), throughout the casing, we have to solve an *integral equation*. The problem is not easily treated by analysis, especially in a three-dimensional casing; thus, in our investigation we used the *electric analogy* method.

Our experimental device is shown in Figure 1; the conductor was *tap water*. To identify the boundary conditions between ϕ and the electric potential V , we replaced a cross-section in the inlet pipe with an electrode (*P-electrode*) and represented the surface S_0 by a *collector of electrodes*. The current J_k through each one of the electrodes should be regulated in such a way that $Q_k \sim \sigma J_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), where Q_k is the volume flow-rate passing S_0 at the *K-Electrode*, and σ the specific resistance of the conductor. By 4 or 5 iterations of this procedure, we obtain the desired distribution of J_k along Q_k ; thus we establish in the model an electric field corresponding to ϕ . In other words, we have solved the appropriate integral equation. To avoid any secondary current between successive electrodes, and to minimize as much as possible any disturbance of the electric field near S_0 , the electrodes are placed inside S_0 as shown in Figure 2.

⁶⁾ ETH, Institut für Aerodynamik.

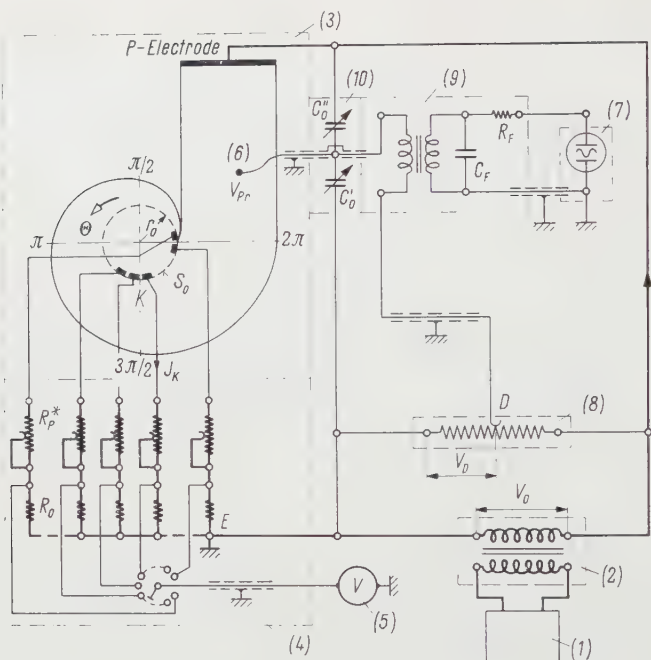


Figure 1

Electric analogy device

1 Oscillator (regulated at 300 Hz); 2 Transformer (1:1); 3 Electric Analogy Model (two- or three-dimensional); 4 Potentiometers to regulate the current through the electrodes; 5 Electronic Voltmeter (for the above operation); 6 Potential pick-up (probe); 7 Zero-indicator unit (Cathode-ray oscilloscope); 8 Decade potentiometer; 9 Pick-up transformer and filter; 10 Condensers for a complete balancing of Wheatstone-bridge.

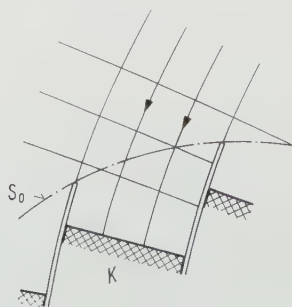


Figure 2

From our experiments, we obtained a remarkable result valid for two- as well as for three-dimensional casing forms as follows. If $c_{r_0} = \text{const.}$ along S_0 , or c_{r_0} has not extremely large variations along it, the distribution of the moment of

momentum per unit mass of the fluid along a *meridian section* of the casing remains constant, i.e. in cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$c_t \cdot r]_{\theta} = c_{t_0} r_0]_{\theta} = \text{const} \quad (1)$$

with $\theta = \text{const.}$ ($\theta < 2\pi$) and independently of z ; c_t is the tangential component of the velocity. Thus, if the casing form and c_{r_0} along S_0 are given, we can calculate $c_{t_0}(\theta)$ and consequently c_t for every $\theta < 2\pi$. Equation (1) is well known for a two-dimensional pure logarithmic field, where both $c_r \cdot r = \text{const.}$ and $c_t \cdot r = \text{const.}$ throughout. We found here that the same is true for every spiral casing form, but *only* on a meridian section and for $\theta < 2\pi$; in general $c_t \cdot r$ changes from section to section.

It has been experimentally verified that the runner of a turbine as well as the guide vanes act as rectifiers of the flow through them; thus, if the casing is symmetrical to a plane perpendicular to the z -axis (axis of the runner), $c_{r_0} = \text{const.}$ along S_0 . Figure 3 shows the (c_t) -distribution in such a casing for $c_{r_0} = \text{const.}$ The solid $(c_t)_{th}$ -curves are drawn according to equation (1); we can see that the measuring points verify this equation up to $\theta \approx 320^\circ$.

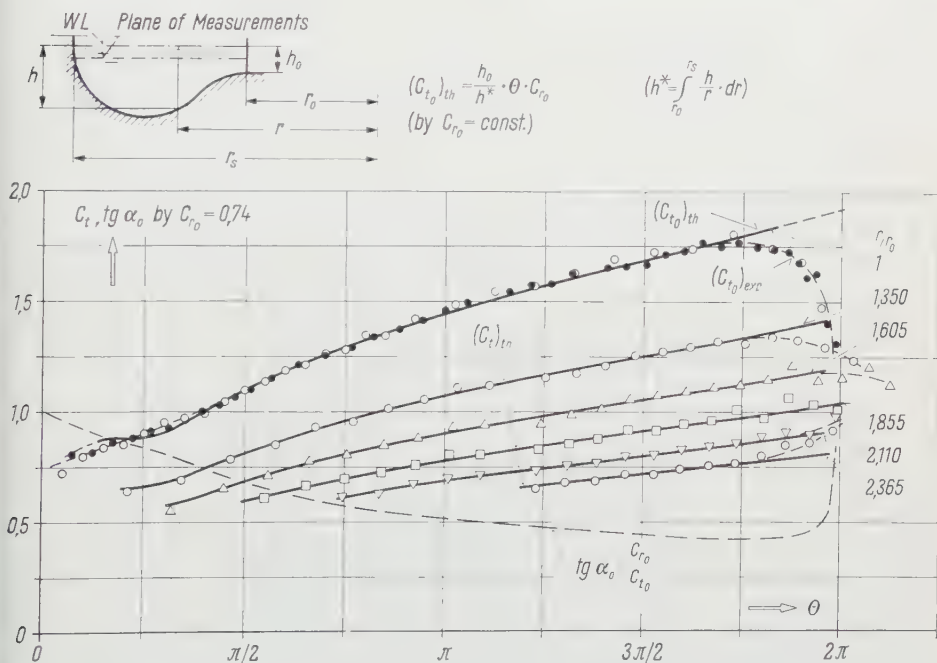


Figure 3

Conclusion: By the experimentally determined equation (1), we can design spiral casing forms to obtain $c_{r_0} = c_{t_0} \tan \alpha_0$ along S_0 where α_0 is given and $c_{r_0}, c_{t_0} = \text{const.}$ It is also possible to modify existing casing forms and fixed blade shapes outside S_0 .

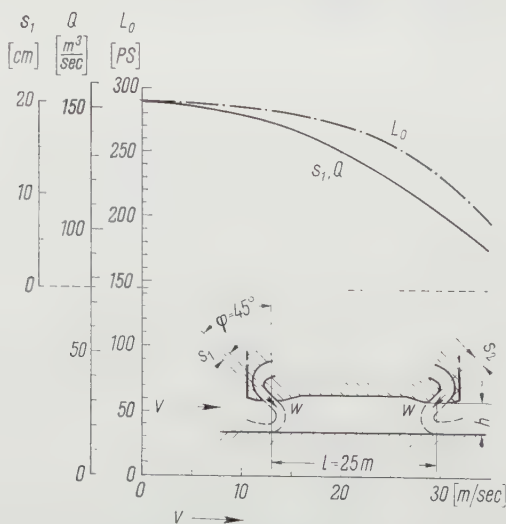
Zur Theorie der Luftkissen-Fahrzeuge. Von H. BAUMANN, Zürich⁷⁾.

Ein Luftkissen-Fahrzeug wird von einem Kissen getragen, das durch unter erhöhtem Druck stehende Luft gebildet wird. Dieses kann auf verschiedene Arten erzeugt werden, von denen hier nur auf die Methode des *Luftvorhanges* eingegangen werden soll. – Ein längs der Peripherie aus dem Boden austretender, rund herum geschlossener Luftvorhang hält im Raum unter dem Fahrzeug einen Überdruck aufrecht.

Die Strömung im Vorhang kann als ebenes Problem behandelt werden (ebener Strahl). Mit Hilfe des Impulssatzes lässt sich dann ein Zusammenhang zwischen Druckdifferenz am Vorhang und Schwebehöhe näherungsweise angeben, wenn Dicke, Geschwindigkeit und Winkel des Vorhangs beim Austritt aus dem Fahrzeug bekannt sind. Andererseits ist es auch möglich, das genaue theoretische Berechnungsverfahren für freie Strahlen hier anzuwenden (Hodograph, konforme Abbildung). Die Übereinstimmung der Ergebnisse der beiden Rechnungsarten ist gut, und auch der Vergleich mit Messungen zeigt, dass die einfache Anwendung des Impulssatzes zu Resultaten führt, die der Wirklichkeit recht genau entsprechen⁸⁾.

Veränderte Bedingungen treten auf, wenn ein Luftkissen-Fahrzeug sich in Vorwärtzfahrt befindet. Auf der Aussenseite des längs der Vorderfront verlaufenden Luftvorhangs wirkt dann zusätzlich der Fahrtstaudruck. Daher wird die durch diesen Vorhang aufzubringende Druckdifferenz vermindert, was eine Einsparung von für den Auftrieb erforderlicher Luftmenge und Leistung bedeutet.

Betrachtet man ein rechteckiges Fahrzeug, das ausschliesslich über Wasserflächen verkehren soll, so kann man sich die beiden seitlichen Luftvorhänge zum



Abhängigkeit der Dicke s_1 des vorderen Vorhangs, der Luftmenge Q und der theoretischen Leistung L_0 für den Auftrieb von der Vorwärtsgeschwindigkeit V . Das angenommene Luftkissen-Fahrzeug hat folgende Daten: Länge $L = 25$ m, Breite $B = 8$ m, Dicke des hinteren Luftvorhangs $s_2 = 20$ cm, Austrittswinkel $\varphi = 45^\circ$, Masse $M = 20\,000$ kg, Ansaugung der Luft von oben. Die Schwebehöhe h beträgt 1 m.

⁷⁾ Institut für Aerodynamik, ETH.

⁸⁾ J. ACKERET und H. BAUMANN, *Über Luftkissen-Fahrzeuge*. Schweiz. Bauztg., 78. Jg. 137–141 (1960).

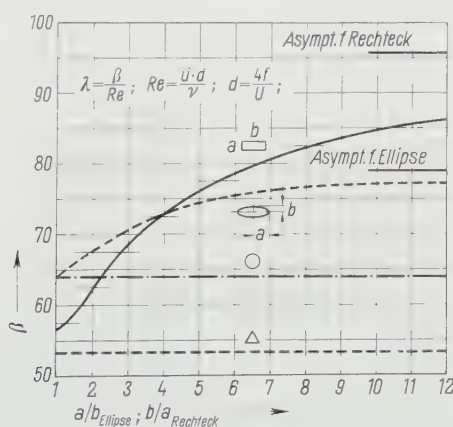
Beispiel durch Bleche ersetzt denken, die wenig ins Wasser eintauchen. Diese können sehr dünn sein und ergeben keinen grossen Widerstand. Infolge der geringeren Druckdifferenz am vorderen Vorhang lässt sich entweder bei gleichbleibender Vorhangdicke dessen Geschwindigkeit verkleinern oder bei gleichbleibender Geschwindigkeit kann er dünner gemacht werden. Sobald die Vorwärtsgeschwindigkeit so gross wird, dass der Staudruck der Flächenbelastung des Fahrzeuges entspricht, ist der vordere Vorhang überhaupt überflüssig. Leistung und Luftmenge sinken in diesem Fall auf die Hälfte gegenüber den Werten im Stillstand. In der Figur sind diese Grössen sowie die Dicke des vorderen Vorhanges für ein angenommenes Fahrzeug in Funktion der Vorwärtsgeschwindigkeit aufgetragen.

Bei diesem Beispiel erfolgt der Lufteintritt in das System senkrecht von oben. – Eine weitere Leistungsverminderung für den Auftrieb erreicht man, wenn auch hier der Fahrtstaudruck ausgenutzt wird, indem die Lufteintrittsöffnung zum Gebläse nach vorn gerichtet wird. Die Umlenkung um 90° nach unten hat aber einen zusätzlichen Widerstand zur Folge, der durch vergrösserten Schub überwunden werden muss.

Laminare Strömung in Rohren mit verschiedenen Querschnitten. Von V. STINGELIN, Zürich⁹⁾.

Im Gegensatz zur turbulenten Rohrreibung, wo erfahrungsgemäss der Druckabfallkoeffizient λ für hydraulisch glatte Rohre nur von der Reynoldszahl abhängt, sofern diese auf den hydraulischen Durchmesser bezogen ist, ergibt die strenge Theorie für die laminare Strömung eine zusätzliche Abhängigkeit von der Geometrie der Querschnittsform.

In der Literatur wird diesem Gegensatz wenig Beachtung geschenkt. Entgegen den Erwartungen fallen die Messpunkte der Experimente von NIKURADSE für verschiedene Profile auch im laminaren Gebiet auf die theoretische Kurve für kreisrunde Rohre. SCHILLER hat schon auf diese Tatsache hingewiesen; doch sind die experimentellen Nachweise wenig überzeugend.



Figur 1

Laminares Rohrreibungsgesetz $\lambda(Re)$ für verschiedene Querschnitte.

⁹⁾ Institut für Aerodynamik, ETH.

Das Ziel der nachfolgenden Arbeit war deshalb die experimentelle Bestätigung der schon bekannten exakten Lösungen der laminaren Strömung durch verschiedene Querschnittsformen.

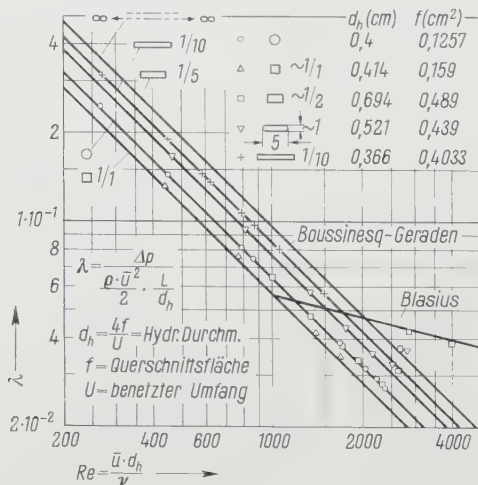
Das laminare Druckabfallsgesetz lautet:

$$\lambda = \frac{\beta}{Re},$$

wobei β eine Konstante ist, die von der Geometrie des Querschnittes abhängt.

In Figur 1 sind die theoretischen Werte von β in Abhängigkeit der Halbachsenverhältnisse der Ellipsen, der Seitenverhältnisse der Rechtecke, und vergleichsweise die Werte des Kreisrohres und des gleichseitigen Dreieckes aufgetragen. Selbst bei kleinen Änderungen der Achsen- bzw. Seitenverhältnisse werden die Abweichungen vom Kreisrohr schon bemerkenswert, daher war ein deutlicher experimenteller Nachweis zu erwarten.

Die Übereinstimmung der Messungen mit der Theorie Figur 2 war dann auch gut, besonders beim Kreisrunden und dem speziell konstruierten 1/10 Rechteckrohr aus Messing. Kleinere systematische Abweichungen der mittleren drei Rohre waren auf Ungenauigkeiten in der Geometrie zurückzuführen und zeigten die vermutete Empfindlichkeit der Zahl β von der Kontur des Querschnittes.



Figur 2

Laminarer Rohrreibungskoeffizient λ für Rohre mit verschiedenen Querschnitten.

Auswertung von Wärmeleitfähigkeitsexperimenten mit Hilfe eines elektronischen Rechenautomaten. Von P. WYDER, Zürich¹⁰⁾.

Bei Wärmeleitfähigkeitsexperimenten im Gebiete tiefer Temperaturen haben Kohlewiderstandsthermometer gegenüber den wesentlich unhandlicheren Gas-thermometern den grossen Nachteil, bei jedem Experiment mit Hilfe der Heliumdampfdruckskala neu geeicht werden zu müssen; sie sind nur innerhalb des Tief-

¹⁰⁾ Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik, ETH.

temperaturgebietes genügend genau reproduzierbar. Wärmt man sie bis zur Zimmertemperatur auf und kühlt sie wieder ab bis zur Temperatur des flüssigen Heliums, so ändert sich ihre Charakteristik um einige Prozente.

In dem uns interessierenden Temperaturgebiet von 1,5° K bis 4° K haben sich käufliche Radiowiderstände von 10^{-10} Watt Leistung der Allen-Bradley Company [1]¹¹⁾ als besonders geeignet erwiesen. Ebenfalls sehr günstig sind nach DE VROOMEN hergestellte Widerstände aus einer Kohlepulver-Aquadag-Emulsion, die auf einen isolierten Kupferdraht aufgetragen wird [2]. Charakteristische Widerstandswerte sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

	ALLEN-BRADLEY	DE VROOMEN
Zimmertemperatur	100 Ω	1000 Ω
4,2° K	$\approx 2000 \Omega$	$\approx 2600 \Omega$
2,0° K	$\approx 10000 \Omega$	$\approx 3600 \Omega$

Leider ist der Leitfähigkeitsmechanismus in diesen Kohleschichten noch nicht genügend geklärt. So gibt es nur eine zweikonstantige semiempirische Beziehung [3], die allerdings das Verhalten sowohl der Allen-Bradley- wie auch der de Vroomen-Widerstände sehr genau beschreibt:

$$T(R) = \frac{\ln R}{(a + b \ln R)^2}$$

Dabei bedeutet T die Temperatur und R den Widerstand; a und b sind anzupassende Konstanten. Wie man aus dieser komplizierten Formel sieht, sind genaue Auswertungen von Experimenten recht mühsam und zeitraubend. DE VROOMEN [4] hat kürzlich eine Methode angegeben, die wesentliche Zeitersparnisse mit sich bringt; trotzdem ist der Zeitaufwand für die Auswertung immer noch sehr gross.

Macht man verhältnismässig viele Wärmeleitfähigkeitsmessungen, so müssen für die Auswertung stets die gleichen Rechnungen wiederholt werden. Dies entspricht genau der einem elektronischen Rechenautomaten angebrachten Problemstellung. Wir haben daher die Auswertung unserer Experimente für die ERMETH (elektronische Rechenmaschine der ETH) programmiert.

Dem Automaten werden die Eich- und Messwerte, die Probenabmessungen und die zugeführte Heizleistung eingegeben, während er direkt den Wert für die Wärmeleitfähigkeit herausdruckt. Die Bestimmung der Temperaturdifferenz ist dabei der zentrale Teil des Problems. Zur Lösung kann man entweder den Eichpunkten eine Funktion einpassen, zum Beispiel mit Hilfe von Tschebyscheff-Polynomen, oder man benützt die angegebene Gleichung und bestimmt mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung die beiden Konstanten a und b . Wir wählten den zweiten Weg, da er gewisse Extrapolationsmöglichkeiten offen lässt.

Benützt man die in der Ausgleichsrechnung übliche Symbolik

$$[x, y] \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

¹¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 534.

so erhält man mit den Gleichungen

$$a + b \ln R_i - \left(\frac{\ln R_i}{T_i} \right)^{1/2} = r_i$$

und

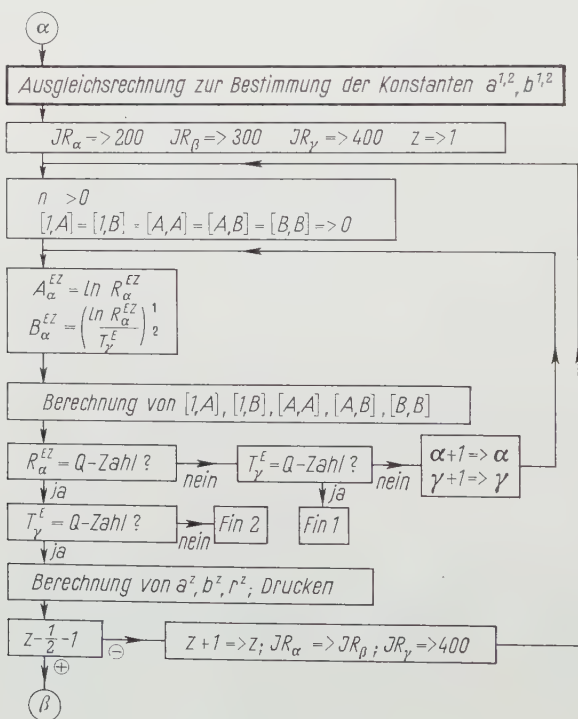
$$A_i \equiv \ln R_i, \quad B_i \equiv \left(\frac{\ln R_i}{T_i} \right)^{1/2}$$

für die beiden Konstanten die Werte

$$a = \frac{[1, B] [A, A] - [A, B] [1, A]}{[1, 1] [A, A] - [1, A] [1, A]}, \quad b = \frac{[A, B] [1, 1] - [1, B] [1, A]}{[1, 1] [A, A] - [1, A] [1, A]}.$$

Zu Kontrollzwecken wird die Summe $[\gamma, \gamma]$ berechnet, die bei einer guten Ausgleichsrechnung möglichst klein sein soll.

Die eigentliche Rechnung geht von der Voraussetzung aus, dass die Mess- und Eichwerte mittels Lochkarten gemäss Tabelle 2 bereits in der Maschine gespeichert sind. Der Probendurchmesser d und der Sondenabstand Δx wird während der Rechnung von Hand eingegeben.

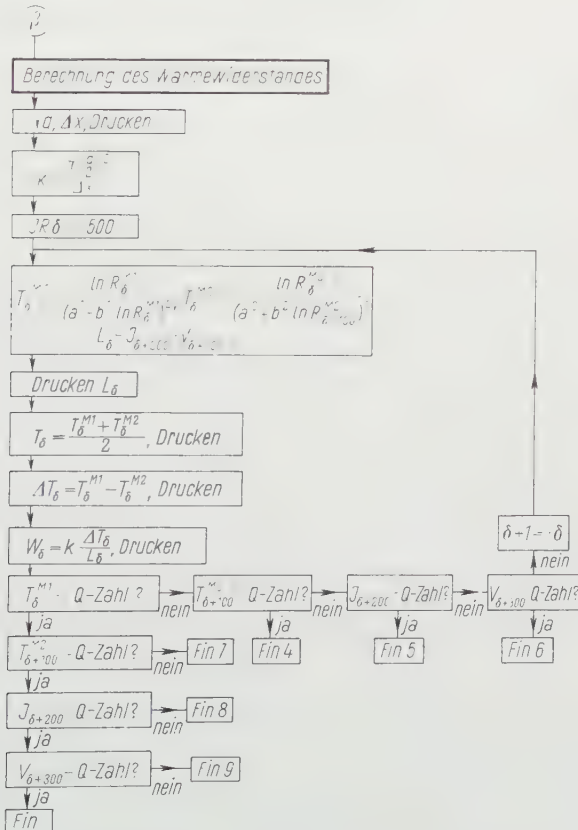


Figur 1
Flussdiagramm für Ausgleichsrechnung.

Tabelle 2

Bereits gespeichert:

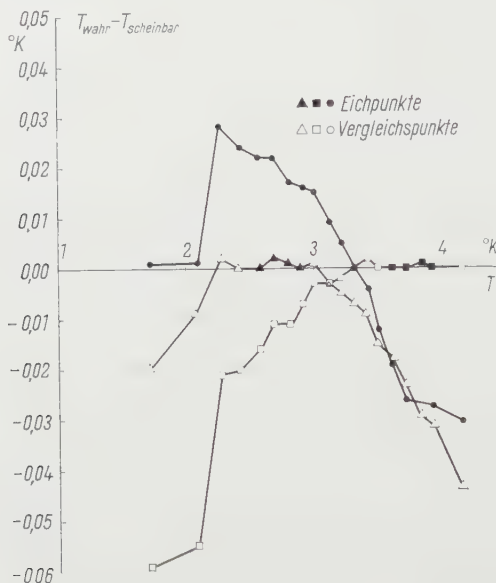
Physikalische Bedeutung	Symbol	Blockadresse
Eichwert Widerstand 1	R_{α}^{E1}	9,0200
Eichwert Widerstand 2	R_{β}^{E2}	9,0300
Eichwert Temperatur	T_{γ}^E	9,0400
Messwert Widerstand 1	R_{δ}^{M1}	9,0500
Messwert Widerstand 2	R_{ϵ}^{M2}	9,0600
Messwert Heizung Strom . . .	J_{ξ}	9,0700
Messwert Heizung Spannung .	V_{η}	9,0800



Figur 2

Flussdiagramm für Wärmewiderstandsbestimmung.

Die letzte Zahl jedes Blockes ist mit einem Q -Zeichen versehen. Das gibt eine gewisse Kontrolle dafür, dass sich zueinander gehörende Widerstands- und Temperatur-, oder Widerstands- und Leistungswerte auch entsprechen. In den Figuren 1 und 2 sind die Flussdiagramme des Programms dargestellt. Der Mangel an Zyklen wird dadurch aufgehoben, dass durch die vielfache Verwendung das Programm «aussen herum zyklisch» wird.



Figur 3

Abweichungen in den nach der Ausgleichsrechnung bestimmten Temperaturen.

Durch die Ausgleichsrechnung werden gewisse Abweichungen von den wahren Temperaturen induziert. Eicht man zwischen 2° und 4°K ungefähr jedes $\frac{1}{10}$ Grad und verwendet alle Eichpunkte für die Ausgleichsrechnung, so ist diese induzierte Abweichung im Maximum $0,03^{\circ}$. Dies ist für unsere Experimente zu gross. Teilt man das ganze Temperaturintervall in zwei Gruppen von 4° bis 3° und von 3° bis 2° ein und wählt pro Gruppe je vier Eichpunkte, so kann man mit dieser Gruppeneinteilung erreichen, dass der induzierte Fehler im ganzen Bereich nie grösser als $0,002^{\circ}$ wird. Diese Abweichungen sind in Figur 3 dargestellt.

Diese Arbeit wurde durch einen Arbeitsbeschaffungskredit des Bundes finanziell unterstützt.

LITERATURVERZEICHNIS

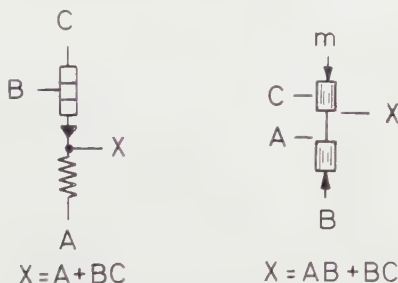
- [1] J. R. CLEMENT und E. H. QUINNELL, Nav. Res. Lab., Reprint No. 68-52 (1952).
- [2] M. S. R. CHARI, Diss. (Leiden 1956).
- [3] D. C. PEARCE, A. H. MARKHAM und J. R. DILLINGER, Rev. Sci. Instr. 27, 240 (1956).
- [4] A. R. DE VROOMEN, *Problems of Low Temperature Physics and Thermodynamics* (Pergamon Press, London 1959).

Vergleich hydraulischer digitaler Schaltelemente mit elektronischen und elektromechanischen «Äquivalenten». Von H. GLÄTTLI und H. R. MÜLLER, Zürich¹²⁾,

Hydraulische logische Elemente unterscheiden sich von elektronischen und elektromechanischen Komponenten in mehrfacher Hinsicht:

- a) durch die mittels eines Elementes darstellbaren Funktionen,
- b) durch die bei Benutzung der verschiedenen Eingänge entstehenden Impedanzverhältnisse, und
- c) durch die im Zusammenhang mit Verzweigungen entstehende Zunahme der Ansprechzeit.

Figur 1 zeigt einen NPN-Transistor in Kollektorbasis-Schaltung und ein einfaches Ventil sowie die dazugehörigen Schaltfunktionen.



Figur 1
Vergleich Transistor - Ventil.

In bezug auf das logische Verhalten sind beide Elemente als Bausteine für beliebige Matrizen verwendbar, da in beiden Fällen ohne Bezug weiterer Komponenten Matrizenpunkte auf eine Ausgangsleitung zusammengefasst werden können.

Das Bild ändert sich aber, sobald man die Impedanzverhältnisse in Betracht zieht. Das obenerwähnte Zusammenfassen besteht in einer Substitution

$$X_1 = A_1 + B_1 C_1, \quad X_2 = X_1 + B_2 C_2, \quad X_3 = X_2 + B_3 C_3,$$

usw., wobei der damit verbundene Anstieg der Ausgangsimpedanz in hydraulischen Schaltungen gering bleibt, bei Verwendung von Transistoren aber sofort prohibitiv wirkt.

Etwas ungünstiger für das Ventil fällt der Vergleich mit einem Relais aus. Die Tatsache, dass, im Gegensatz zum Relais, ein einziges Ventil die «exclusive-or»-Funktion nicht darstellen kann, ist weniger gravierend als die im Zusammenhang mit Verzweigungen auftretende Verlängerung der Ansprechzeit bei hydraulischen Schaltmitteln.

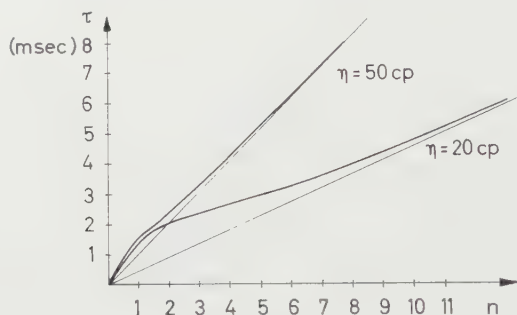
Besonders augenfällig wird dieser Effekt am Beispiel des Paralleladdierwerks, wo das Vorhandensein einer mehrfachen Verzweigung ohnehin nicht auf den ersten Blick evident ist.

Im Prinzip lässt sich eine hydraulische Schaltung analog zu bestimmten Relais-Schaltungen aufbauen, bei welchen das Übertragungssignal die Lage der Kontakte nicht ändert, sondern sich über vorbereitete Wege ausbreitet. Es geht nun aber

¹²⁾ IBM-Forschungslaboratorium.

nicht an, die Additionszeit aus der zum Stellen der Ventile nötigen Zeit sowie aus Geometrie und Schallgeschwindigkeit zu bestimmen. Der Grund liegt darin, dass zum Zwecke der Weiterverarbeitung oder Anzeige der Information in den verschiedenen Stufen endliche Volumina verdrängt werden müssen.

Figur 2 gibt die Zeit zur Ausbreitung des Übertragssignals in Funktion der Anzahl Stufen für zwei verschiedene Viskositäten wieder:



Figur 2

Ausbreitungszeit des Übertragungssignals in Funktion der Anzahl Stufen eines hydraulischen Addierwerkes.

Die beiden hier erwähnten Eigenschaften hydraulischer Komponenten und Schaltungen unterstreichen die Notwendigkeit, spezifische Schaltungen, speziell unter Verwendung der Matrizentechnik, zu entwickeln.

Méthode de mesure de la stabilité à court terme de la fréquence d'oscillateurs à quartz. Par P. KARTASCHOFF¹³⁾, J. DE PRINS¹³⁾ et J. BONAFONT¹⁴⁾.

1. Introduction

Le but des mesures présentées dans cette communication est de déterminer la précision avec laquelle la fréquence des oscillateurs à quartz peut être mesurée pour une durée de mesure donnée. Nous nous sommes surtout intéressés à la stabilité à court terme d'oscillateurs à quartz servant à la comparaison des horloges à quartz aux étalons de fréquence atomiques. En effet, seules les variations lentes pouvant être corrigées à l'aide de servomécanismes, les oscillateurs employés doivent être particulièrement stables. D'autre part, dans un résonateur à césium, les fluctuations de fréquence du signal excitant peuvent engendrer un élargissement de la raie de résonance observée, [1]¹⁵⁾. De même, la précision de la comparaison de fréquences entre un oscillateur à quartz et un maser à NH_3 est limitée par les fluctuations rapides de la fréquence de l'oscillateur à quartz [2, 3, 4].

Nous avons mesuré ces fluctuations en faisant des séries de mesures de fréquence de courte durée. Ensuite, nous avons déterminé l'écart type σ_v de la fréquence mesurée pour des durées de mesure $\bar{\tau}$ allant de 10 à 100 ms. Comme les fréquences

¹³⁾ Laboratoire suisse de recherche horlogères, Neuchâtel.

¹⁴⁾ Observatoire de Neuchâtel.

¹⁵⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 539.

sont comparées dans le domaine des microondes, la sensibilité du dispositif de mesure est élevée.

2. Méthode de mesure

La figure 1 montre le schéma de principe de l'appareillage employé. Les deux oscillateurs comparés sont identiques et oscillent à des fréquences de 8,5 MHz. Ces fréquences, multipliées par 2700 à l'aide de deux chaînes de multiplication de fréquence, produisent deux signaux de 22 900 MHz dans le domaine microonde. Un récepteur superhétérodyne employant un klystron comme oscillateur local sert à la détection du battement de ces deux signaux.

Le battement, dont la fréquence peut être variée entre 0 et 50 Hz par un réglage approprié des oscillateurs à quartz est obtenu après démodulation du signal de moyenne fréquence.

Les résultats des mesures sont obtenus de la manière suivante: Les durées τ_i des alternances positives du battement sont représentées par la longueur des impulsions sur l'écran d'un oscillographe cathodique et enregistrées par photographie. La hauteur de chaque impulsion est proportionnelle à la valeur τ_i correspondante. La formation du train d'impulsions est illustrée par la figure 1.

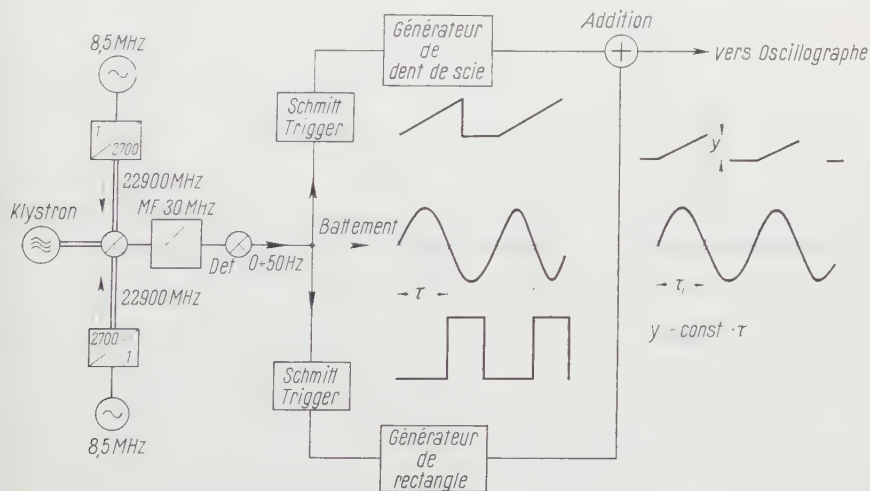


Figure 1

Le nombre n de mesure par série est d'environ 150. Remarquons ici que les fluctuations τ_i sont petites par rapport à la valeur moyenne

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

La sensibilité du système est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\Delta_i v}{v_0} = \frac{\tau_i - \bar{\tau}}{2 \bar{\tau}^2 v_0}$$

ou $\nu_0 = 22\,900$ MHz et $\Delta_i \nu / \nu_0$ est l'écart relatif de la fréquence par rapport à sa valeur moyenne, pour un τ_i donné. Ainsi pour $\bar{\tau} = 10$ ms, un écart de τ_i de 1% donne $\Delta_i \nu / \nu_0 = 2 \cdot 10^{-11}$. La hauteur des impulsions enregistrées a été mesurée à 0,5% près.

3. Résultats

Le dépouillement des enregistrements photographiques donne pour chaque série de résultats un écart-type des τ_i

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\bar{\tau}} \sqrt{\overline{\Delta^2 \tau}}$$

avec

$$\overline{\Delta^2 \tau} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})^2.$$

Ensuite, on obtient pour l'ensemble des fluctuations relatives de fréquence des deux oscillateurs un écart type

$$\sigma'_\nu = \frac{\nu_b}{\nu_0} \sigma_\tau \quad \text{où} \quad \nu_b = \frac{1}{2\bar{\tau}}.$$

L'écart type σ_ν pour un seul oscillateur est donné par

$$\sigma_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma'_\nu,$$

ceci en admettant que les fluctuations respectives sont décrites par deux distributions normales identiques.

La figure 2 montre les résultats obtenus pour des valeurs de $\bar{\tau}$ allant de 10 à 100 ms.

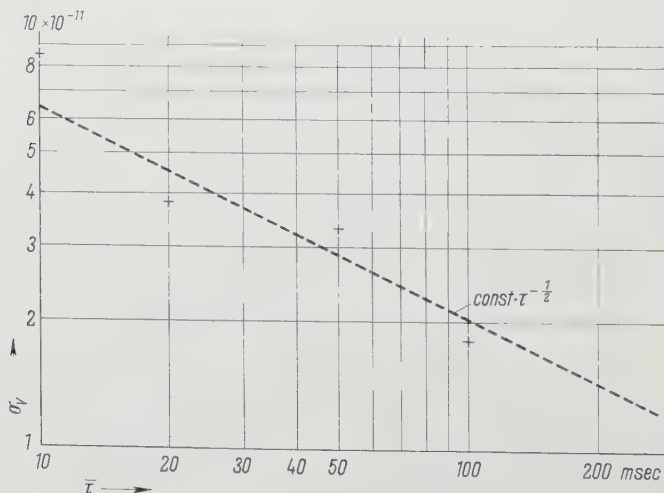


Figure 2

4. Conclusion

Dans le domaine observé, les valeurs de σ_v peuvent être considérées comme proportionnelles à $\bar{\tau}^{-1/2}$, cela en tenant compte de l'imprécision de σ_v qui est estimé à $\pm 2 \cdot 10^{-11}$.

Il est, de plus, à remarquer que les fluctuations pouvant être dues au bruit de fond dans les chaînes de multiplication de fréquence sont négligeables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. C. MOCKLER, R. E. BEEHLER and J. A. BARNES, NBS Report 6059.
- [2] J. DE PRINS und P. KARTASCHOFF, Bulletin PTT Suisse 37, 10 (1959).
- [3] P. KARTASCHOFF, Ber. Int. Congr. f. Chronometrie, München 1959 (à paraître).
- [4] J. DE PRINS, J. BONANOMI et P. KARTASCHOFF, Ber. Int. Congr. f. Chronom., München 1959 (à paraître).

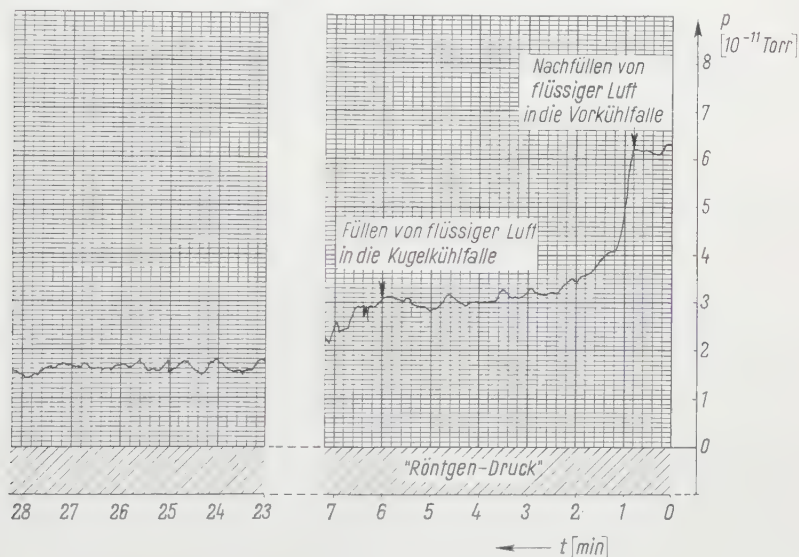
Ein Ultrahochvakuum-System mit einer ausheizbaren Hg-Diffusionspumpe zur Erzeugung von Vakua im Gebiet von 10^{-11} Torr. Von E. B. BAS, Zürich¹⁶⁾.

In den UHV-Systemen mit Hg-Diffusionspumpen kann ein Endvakuum von etwa 2×10^{-10} Torr. erreicht werden. Dieses Endvakuum ist scheinbar in der Hauptsache durch die Gasabgabe der Diffusionspumpe selbst bedingt. Um noch kleinere Drucke erreichen zu können, haben wir ein UHV-System entwickelt, bei dem eine einstufige Hg-Diffusionspumpe zusammen mit dem Rezipienten und den Kühlfallen ausgeheizt werden kann. Figur 1 zeigt dieses System schematisch dargestellt. Die im gestrichelten Rechteck 1 eingeschlossenen Elemente des Systems werden in einem Ofen bei 400–450°C ausgeheizt. Die einstufige Hg-Diffusionspumpe 2 hat als Treibdüse eine Laval-Düse, und die Quecksilberverdampfung im Boiler 3 erfolgt in einer Lichtbogen-Entladung [1]¹⁷⁾. Das Quecksilber wird der Pumpe über zwei barometrische Säulen 4 und 5 zugeführt. Mit Hilfe der atmosphärenseitig angebrachten Schwimmer 6 und 7 kann der Hg-Stand in diesen Säulen gehoben und gesenkt werden, womit während des Ausheizprozesses das Quecksilber aus der Pumpe entfernt werden kann. Auch die Zündung des Lichtbogens erfolgt mit Hilfe dieser Hebevorrichtung. Damit während des Betriebes die atmosphärischen Druckschwankungen das Brennen des Lichtbogens nicht beeinflussen, sind die Schwimmer in den hermetisch abschliessbaren Gefässen untergebracht. Unterhalb des Bodens des Ausheizofens werden die Hg-Zuführungsleitungen mit Wasser gekühlt. Bei allen UHV-Systemen mit Hg-Pumpen ist die Ausfrierung des Hg-Dampfes von grösster Bedeutung. Vor allem ist es wichtig, dass in den Kühlfällen der Stand der flüssigen Luft konstant gehalten wird, hierfür sind verschiedene Anordnungen mit automatischer Nachfüllung der flüssigen Luft bekannt geworden [2, 3, 4]. In unserem UHV-System haben wir zwischen der ausheizbaren Hg-Pumpe und dem Rezipienten zwei Kühlfallen 8 und 9 vorgesehen. Für die dem Rezipienten nächstgelegene Kühlfalle 9 haben wir in Abwandlung einer früheren Konstruktion von VENEMA [5] eine neue Kühlfalle entwickelt, deren Wirksamkeit für längere Zeit vom Absinken des Spiegels der flüssigen Luft unabhängig ist. Wie aus Figur 1 ersichtlich, besteht diese Kühlfalle aus vier ineinander geschachtelten Kugeln aus Pyrex-Glas. Der Durchmesser der äussersten Kugel beträgt 165 mm, und die kleinste Kugel weist einen Durchmesser von 65 mm auf.

¹⁶⁾ Abteilung für industrielle Forschung, ETH.

¹⁷⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 542.

Die beiden äusseren Kugeln sind in einem zylindrischen Hals vereinigt. Wenn die Kühlfalle mit flüssiger Luft vollgefüllt wird, so dauert es etwa 1 Stunde bis der Spiegel der flüssigen Luft das innere Kugelpaar erreicht. Während dieser Zeit bleibt die Wiederverdampfung des Quecksilbers von den erwähnten Partien der Kühlfalle für den Rezipienten ohne Bedeutung. Auch die weitere Verflüchtigung der flüssigen Luft ist wenig wirksam, da sich in der mittleren Kugel infolge sehr guter Wärmeisolation die flüssige Luft sehr lange hält.



Figur 2

Einfluss des Standes der flüssigen Luft in den Kühlfallen auf das Endvakuum.

Das Vorvakuum für das beschriebene System wird von zwei in Serie geschalteten einstufigen Hg-Diffusionspumpen erzeugt. Diesen ist wiederum über eine mit Trockeneis gekühlte Falle die Rotationspumpe vorgeschaltet. Das UHV-System kann mit Hilfe eines Hg-Ventiles von den Vorpumpen getrennt werden. Nach gründlichem Ausheizen des UHV-Systems (zum Beispiel eine Ausheizung über Nacht von 14 Stunden bei etwa 430°C) konnten zurzeit wiederholt Endvakua von ca. 10^{-11} Torr. erreicht werden. Für die Vakuummessung wurde ein verbessertes Bayard-Alpert-Ionisationsmanometer verwendet. Die Röntgenstrom-Grenze des neuen Manometers beträgt 1×10^{-11} Torr. bei einer Anodenspannung von 150 V und $2,5 \times 10^{-12}$ Torr. bei einer Anodenspannung von 50 V. Diese Verbesserung wurde durch die Verdoppelung der Manometerempfindlichkeit ($C = 26 \text{ Torr}^{-1}$ in $i_+ = C \cdot i_- p$) und durch Verkleinerung des Kollektordurchmessers auf 25μ erreicht. Durch eine neuartige Halterung des Kollektorfadens, in dem das freie Fadenende in einer Kapillare geführt wird, konnte diese Herabsetzung des Kollektordurchmessers auf 25μ betriebssicher realisiert werden. Es scheint, dass auf diese Art auch eine weitere Verkleinerung des Kollektordurchmessers noch möglich ist.

Figur 2 zeigt uns den Einfluss des Standes der flüssigen Luft in den Kühlfallen auf das Endvakuum.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. B. BAS: Proc. First Intern. Congress on Vacuum Technology, Namur 1958 (Pergamon Press) Vol. I, p. 134.
- [2] M. FELD und F. S. KLEIN: J. Sci. Instrum. 37, 474 (1954).
- [3] H. C. PROBYN: J. Sci. Instrum. 33, 322 (1956).
- [4] Y. F. WELLS: Rev. Sci. Instrum. 29, 893 (1958).
- [5] A. VENEMA: Vacuum, 9, 54 (1959).

Die Zustellung der Manuskripte an die Redaktion ZAMP von Seiten der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft erfolgte erst am 15. Juli 1960. Es war daher nicht möglich, die Berichte in einem der vorgesehenen Hefte (ZAMP 4 oder 5/1960) zu veröffentlichen.

International Federation of Information Processing Societies (IFIPS) Internationale Föderation für Datenverarbeitung

Der Vorstand der Internationalen Föderation für Datenverarbeitung hat am 16.–17. Juni 1960 seine erste Sitzung im Provisorischen Internationalen Rechenzentrum in Rom abgehalten.

Diese Föderation wurde anlässlich der durch die UNESCO abgehaltenen Ersten Internationalen Konferenz für Informationsverarbeitung (ICIP), die im Juni 1959 in Paris stattfand, gegründet. Mehr als 1800 Delegierte aus allen Teilen der Welt haben dieser Konferenz beigewohnt, an welcher erfolgreiche Beziehungen zwischen den Wissenschaftlern auf diesem wichtigen Gebiet angebahnt wurden.

Der Vorstand setzt sich wie folgt zusammen: ISAAC L. AUERBACH, Präsident, Auerbach Electronics Corp. National Joint Computer Committee, Philadelphia 3 Pa. (USA), Prof. Dr. A. WALTHER, Vize-Präsident, Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Rechenanlagen (DARA), TH Darmstadt, und Dr. A. P. SPEISER, Sekretär-Kassier, IBM Forschungslaboratorium Adliswil-Zürich, als Vertreter der Schweizerischen Gesellschaft für Automatik.

Die Zweite Internationale Konferenz für Datenverarbeitung soll im September 1962 in Deutschland stattfinden. Prof. Dr. A. WALTHER wurde zum Vorsitzenden der Konferenz ernannt und Dr. NIELS IVAR BECH (Dänemark) ist Vorsitzender des Programm-Komitees.

Ausser der Organisation internationaler Konferenzen besteht die Tätigkeit dieser Föderation in der Koordination von Bestrebungen zur Schaffung von Normen auf dem Gebiet der Datenverarbeitung, wofür eine Kommission ins Leben gerufen werden soll. Auf Anregung der nationalen technischen Gesellschaften werden weitere Aktivitäten aufgenommen werden, insoweit sie der Weiterentwicklung der Datenverarbeitung, eines der wichtigsten Gebiete der modernen Technik, förderlich sind.

Nationale Gesellschaften, die der Föderation angeschlossen sind:

Deutschland	Deutsche Arbeitsgemeinschaft für Rechenanlagen (DARA)
Belgien	Association Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion (inklusive Association Belge de Calcul Numérique)
Kanada	The Computing and Data Processing Society of Canada
Dänemark	Akademiet for de Tekniske Videnskaber

Spanien	Consejo Superior de Investigaciones Cientificas
Finnland	The Finnish National Committee for Information Processing
Frankreich	Association Française de Calcul (AFCAL)
Japan	Information Processing Society of Japan
Holland	Nederlands Rekenmachine Genootschap
England	The British Computer Society
Schweden	Svenska Samfundet för Informationsbehandling
Schweiz	Schweizerische Gesellschaft für Automatik
Tschechoslovakei	Commission for Technical Cybernetics of the Czechoslovak Academy of Sciences
Russland	Computing Centre of the USSR Academy of Sciences
U. S. A.	National Joint Computer Committee

A. P. SPEISER

Seventh National Symposium on Reliability and Quality Control in Philadelphia, Pa. USA.

In Philadelphia, Pa. (USA) findet vom 9. bis 11. Januar 1961 das *7th National Symposium on Reliability and Quality Control* statt. Betriebssicherheit und Qualitätsüberwachung sind Gesichtspunkte, die in heutigen elektronischen Geräten, welche tausende und oft zehntausende von Schaltelementen enthalten, grösste Bedeutung erlangt haben. Der Zweck dieser Tagung, welche vom Institute of Radio Engineers (IRE) und anderen wissenschaftlichen Vereinigungen durchgeführt wird, ist, Spezialisten, welche auf dem Gebiet der Betriebssicherheit und Qualitätsüberwachung über Erfahrung verfügen, zusammenzuführen. Programme und Anmeldungsformulare sind zu beziehen bei J. H. GOODMAN, Publicity Chairman, Burroughs Corporation, Research Center, Great Valley Laboratory, Paoli, Penna., USA.

A. P. SPEISER

Errata

On the Scattering of Waves by a Disk. By ALBERT E. HEINS and RICHARD C. MACCAMY. ZAMP 11, 249–264 (1960).

P. 249

Equation (1.2) should read

$$U(r, \theta, 0) = 0 \text{ for } r < 1.$$

The definition of R^2 in the line below Equation (1.3) should read

$$R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\theta - \phi) + z^2.$$

P. 251

Line 2 from the bottom: '(1.4)' should read '(1.3)'.

P. 252

The operator $N_n(r, z, g)$ is identically zero and should be deleted.In Equation (I) replace $(-)^n$ by $(-)^{n/2}$.

P. 253

Line 8 from the bottom: Replace $(-)^{n/4}$ by $(-)^{n/2}$.

P. 254

Equation (3.1): Replace $u(\gamma, z)$ by $\pi w(\gamma, z)$.

P. 255

Delete $(-)^n$ in Equation (4.1).

Delete $(-)^n$ in Equation (4.3).

Replace U by u in Equation (4.1).

P. 256.

Delete $(-)^n$ in the definition of $H(1 - \gamma)$.

The upper limit of the second integral in the definition of $H(1 - \gamma)$ should be γ .

For ' $H(1 - \gamma)$ ' read ' $H^n(1 - \gamma)$ '.

P. 257

Line 14 from the top should read

$$K_{nm}(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha}^1 \frac{F(K_{n,m-1}, \dots, K_{n,0}) d\beta}{\sqrt{\beta - \alpha}}.$$

P. 261

Line 11 from the bottom: Replace (5.4) by (5.5).

P. 262

Equation (6.2): In the second integral 'cosq' should read 'cosh'.

P. 263

Equation (6.4) should read

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma}^1 \frac{\cos k \sqrt{t^2 - \gamma^2}}{\sqrt{t^2 - \gamma^2}} t^3 c^2(t) dt + i \int_0^1 \frac{\sinh k \sqrt{y^2 - t^2}}{\sqrt{y^2 - t^2}} t^3 c^2(t) dt \\ &= 4 k^2 \sin^2 \gamma \left[\frac{y^2 \cosh k_z y}{k_z^2} - \frac{3 y \sinh k_z y}{k_z^3} + \frac{3 \cosh k_z y}{k_z^4} \right] + A_1^2 + A_2^2 y^2. \end{aligned}$$

Line 7 from the bottom: Replace '(6.2) and (6.3)' by '(6.3) and (6.4)'.

Line 5 from the bottom: The sentence which begins 'These are evaluated ...' should read 'These are evaluated by the requirement that $c^1(t)$ and $c^2(t)$ are finite at $t = 0$ and obey the regularity conditions which we described earlier.'

Addendum

Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. Par JOSEPH HERSCH, ZAMP 11, 387–413 (1960):

Ad § 4.4 et § 5: Ce résultat central se trouve essentiellement déjà dans E. PICARD: *Traité d'Analyse*, t. II (1^{re} éd.: 1893), p. 25–26, et dans T. BOGGIO: *Sull'equazione del moto vibratorio delle membrane elastiche*, Atti Accad. Lincei, ser 5, vol. 16 (2^o sem.), p. 386–393 (1907), notamment p. 390. — Leurs hypothèses de continuité sont les mêmes que celles de M. H. PROTTER, que j'ai critiquées au § 5. — Contrairement à PROTTER, PICARD et BOGGIO semblent avoir sous-estimé l'importance de cette inégalité: elle apparaît dans la démonstration de simples propriétés de monotonie.

J. HERSCH

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Grundzüge der Elektroakustik. Von F. A. FISCHER (Fachverlag Schiele & Schön GmbH, Berlin 1959). 210 S., 141 Abb., 7 Tabellen; DM 24.–.

Nach genau 10 Jahren kam diese 2. Auflage heraus. Sie wurde in einigen Punkten wesentlich geändert. Wertvoll ist, dass auch auf der mechanischen Seite die mechanische Innenimpedanz dem Wandler als Vierpol zugeordnet bleibt. Dieser ist dann definiert als ein Vierpol mit elektrischen Eingangsklemmen und einer Ebene, in welcher der Zusammenhang zwischen Kraft und Schnelle aus der gegebenen Belastung hervorgeht.

Das leichtverständlich geschriebene Buch gliedert sich in die Kapitel elektrische und mechanische Schwingungsgebilde, in welchem die Analogien behandelt werden, dann die Kraftwirkungen elektrischer und mechanischer Felder auf Materie, aufgeteilt in elektrische und magnetische Felder. Es folgen in Kapitel 3 die elektromechanischen Umwandlungsprinzipien und ihre Grundgesetze, ebenfalls wieder aufgeteilt nach Wandlern mit elektrischen Feldern und solchen mit magnetischen Feldern. Darin dürfte sich ein Irrtum eingeschlichen haben, weil die normalen elektromagnetischen Telephone nicht zu den behandelten elektromagnetischen Wandlern gehören, sondern zum elektrodynamischen Wandler. In einer Tabelle des Kapitels 4 ist die Systematik der elektroakustischen Wandler zusammengestellt. Es folgt in Kapitel 5 die Grundgleichung der Ersatzschaltbilder der vier Wandlerklassen. Das Kapitel 7 ist der Abstrahlung des Schalles gewidmet, wobei die gerichtete Strahlung eine wesentliche Rolle spielt. Wichtig sind die Fragen des Wirkungsgrades eines Wandlers als Schallsender (Kapitel 8), die Empfindlichkeit eines Wandlers als Schallempfänger (Kapitel 11) und die elektrischen und mechanischen Eingangsimpedanzen (Kapitel 9 und 10). Sehr kurz ist der thermische Schallwandler und der Relais-Empfänger gestreift. Den Schluss bildet ein Kapitel über die elektroakustische Messtechnik.

Auf beschränktem Raum wird das Wesentliche gesagt und gründlich behandelt. Der Elektroakustiker wird deshalb gerne nach diesem Buch greifen, das ihm hilft, seine Probleme richtig anzupacken. Sollte er keinen genügenden Aufschluss im Buche finden, so weist ihn ein Schrifttumsverzeichnis auf eine ausführlichere Behandlung hin.

H. WEBER

IS-Tafel für Luft und Verbrennungsgase. Von O. LUTZ und F. WOLF. 2. Auflage, neu bearbeitet und erweitert von Prof. Dr.-Ing. O. LUTZ und Dipl.-Ing. W. LOHSE (Springer-Verlag, Berlin 1959). 18 S., 4 Abb., 5 Kurventafeln; DM 7.50.

Die IS-Tafel für Verbrennungsgase von LUTZ und WOLF, die bereits jahrzehntlang vielen Ingenieuren wertvolle Dienste geleistet hat, liegt nun in 2. Auflage vor. Wie der Verfasser im Vorwort sagt, hat er sich zunächst die Frage gestellt, ob die Herausgabe dieser Tafel heute überhaupt noch vertretbar sei, oder ob man nicht vielmehr in Zukunft auf das graphische Arbeiten anhand solcher Tafeln völlig verzichten werde. Man muss ihm aber sicher zustimmen, wenn er zum Schluss gelangt, dass auch weiterhin die IS-Tafel ein unentbehrliches Hilfsmittel des Ingenieurs bleiben wird. Der Ingenieur sollte sich nicht zu sehr daran gewöhnen, sogleich zu komplizierten automatischen Rechengeräten seine Zuflucht zu nehmen, sondern er sollte durchaus versuchen, mit einfachen anschaulichen Verfahren rasch zum Ziel zu gelangen, dort wo der Charakter des Problems dies zulässt.

Die neue Tafel ist gegenüber der alten ins Gebiet wesentlich höherer Temperaturen erweitert, was einen zusätzlichen Kunstgriff zur Berücksichtigung des dann wesentlichen Einflusses der Dissoziation notwendig gemacht hat. Sonst ist die Tafel in ihrem Aufbau gleich geblieben wie die alte. Im beigefügten Text sind die Grundlagen klar und knapp zusammengefasst, und es ist auch angegeben, wie im Falle abnormaler Kraftstoffe (die der Verfasser «exotische» Kraftstoffe nennt) zu verfahren ist.

Die neue IS-Tafel wird sicher wie die alte eine weite Verbreitung finden. An sich möchten wir bedauern, dass man bei dieser Überarbeitung noch beim alten technischen Maßsystem geblieben ist und nicht den Übergang zum MKSA-System vollzogen hat. Man versteht aber leicht, dass dies im heutigen Zeitpunkt in bezug auf die Verbreitung der Tafel vielleicht doch noch etwas gewagt gewesen wäre.

W. TRAUPEL

Méthodes Numériques; Interpolation, Dérivées. Von J. KUNTZMANN (Dunod Editeur, Paris 1959). 272 S., 60 Fig.; fFr. 3600.—.

Dieses Buch behandelt in ausführlicher und leichtverständlicher Darstellung die verschiedenen Methoden der Interpolation und der numerischen Berechnung von Ableitungen. Die stoffliche Beschränkung gestattet es dem Verfasser, die Teilgebiete einschliesslich deren Querverbindungen sehr gründlich zu behandeln. Sorgfältige Fehlerabschätzungen und viele numerische Beispiele zu allen behandelten Methoden machen das Buch zu einer wertvollen Hilfe für praktische Anwendungen.

M. ENGELI

Advanced Mechanics of Fluids. Herausgegeben von HUNTER ROUSE (John Wiley & Sons, Inc., New York 1959). 144 S., 142 Fig.; \$9.75.

Diese Fortsetzung der «Elementary Mechanics of Fluid» des als Hydrauliker bekannten Autors beschränkt sich auf die Behandlung der inkompressiblen Flüssigkeiten. Sie ist vor allem als Hilfe für Vorlesungen über höhere Strömungslehre gedacht, und dieser Zweck ist zweifellos gut erfüllt. Nach einer interessanten Diskussion über die Wechselwirkung zwischen Theorie und Experiment wird die Methode der Dimensionsanalyse behandelt, und dann werden die klassischen Theorien der Potentialströmung und ihre mathematischen Hilfsmittel, wie Singularitätenverfahren und konforme Abbildung, ausführlich dargestellt. Es folgt ein Kapitel über Navier-Stokessche Gleichungen, laminare Strömung und ihre Stabilität und eine kurze Diskussion des Turbulenzproblems. Die Theorie der laminaren und turbulenten Grenzschicht und der Mischvorgänge bei freier Turbulenz wird ausführlich behandelt. Dem Zweck des Buches entsprechend wird das Hauptgewicht

auf die mathematische Behandlung der Probleme gelegt; es sind nur wenige, zur Hauptsache altbekannte experimentelle Resultate zur Illustration der Theorie wiedergegeben. Viele gut ausgesene Probleme und numerische Beispiele ergänzen das sehr schön gedruckte Buch.

P. DE HALLER

Glossary of Terms Used in Vacuum Technology. Herausgegeben vom Committee on Standards der American Vacuum Society (Pergamon Press, London 1958). 63 S.; \$2.00.

Durch die rasche Entwicklung der Vakuumtechnik entstand in vielen Ländern das Bedürfnis, eine auf diesem Fachgebiet allgemeingültige Nomenklatur einzuführen. Das vorliegende Heftchen versucht, diesem Bedürfnis im angelsächsischen Sprachgebiet entgegenzukommen. Insgesamt werden 428 vakuumtechnologische Begriffe definiert und näher umschrieben. Man findet unter anderem den begrüssenswerten Vorschlag, auch in Amerika die Druckeinheit 1 mm Hg-Säule mit «Torr» zu bezeichnen und damit für eine internationale Verwendung dieses Begriffes den Weg zu ebnen.

E. BAŞ

Les problèmes aux limites de la physique mathématique (Introduction à leur étude générale). Von H. G. GARNIR. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe (Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart 1958). 234 S., 5 Abb.; sFr. 25.–.

Die vorliegende Monographie behandelt nicht etwa, wie es der Titel angibt, sämtliche Randwertprobleme der mathematischen Physik, sondern nur das «Dirichlet-Neumannsche Problem» für die Wellen- und Wärmeleitungsgleichung. Der Verfasser hat sich zum Ziel gesetzt, den Leser in die moderne funktionalanalytische Behandlungsweise von Randwertproblemen einzuführen. Es handelt sich hier also um ein Werk, das sich an diejenigen Mathematiker wendet, welche die klassische Theorie dieser Randwertprobleme schon kennen. Dementsprechend fehlen Motivierungen und Beispiele vollständig. Der Einsatz der Funktionalanalysis ergibt als Hauptresultat die Möglichkeit, die Randwertprobleme ohne irgendeine Annahme über den Rand der Gebiete, in denen das Problem gelöst werden soll, zu formulieren und zu «lösen». Insbesondere ist es möglich, die Randbedingungen, welche die Normalableitung in den Randpunkten betreffen, auch in diesem ganz allgemeinen Fall zu formulieren. Die «Lösungen» sind dann allerdings auch keine Funktionen, sondern Distributionen. Diesen Distributionen kann nicht ohne weiteres ein physikalischer Sinn zugesprochen werden. Der Autor unterscheidet deshalb zwischen «mathematischen» und «physikalischen» Lösungen des Problems. «Physikalisch» heisst dabei eine Lösung, wenn die entsprechende Distribution Integralform hat.

Das Buch setzt eine sehr gründliche Kenntnis der Lebesgueschen Integrationstheorie voraus, hingegen wird die Theorie der Hilberträume sowie der Distributionen soweit wie nötig entwickelt. Etwas seltsam mutet die ausführliche Behandlung elementarer Begriffe der linearen Algebra (Skalarprodukte usw.) an; wer die Lebesguesche Theorie kennt, wird auch lineare Algebra kennen. Wenn man sich aber schon entschliesst, derart elementare Dinge ausführlich zu behandeln, so sollten auch an anderen Orten Motivierungen gegeben werden, so für den Begriff der schwachen Lösung usw. Die Ausstattung des Buches entspricht derjenigen der übrigen Publikationen dieses Verlags.

Inhaltsübersicht: Livre I: Théorie des espaces fonctionnels hilbertiens; Livre II: Problème de DIRICHLET-NEUMANN pour l'opérateur méta-harmonique; Livre III: L'opération J; Livre IV: Problème de DIRICHLET-NEUMANN pour les opérateurs des ondes et de la diffusion.

E. STAMM

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE und E. CREUTZ, Band 41/1: *Kernreaktionen II: Theorie* (Springer-Verlag, Berlin 1959). 571 S., 61 Fig.; DM 145.-.

Über den Wert bzw. Unwert von Enzyklopädien ist an anderer Stelle schon so viel geschrieben worden, dass es nicht verlohnt, diese Frage erneut aufzugreifen. Dagegen drängt sich oft der Vergleich zwischen Handbüchern und rückblickenden Zeitschriften, wie etwa der «Review of Modern Physics», auf. Solche Zeitschriften haben gegenüber Handbüchern zweifellos Vorteile: Sie verzichten darauf, Artikel in einem gewissen Zusammenhang zu ordnen, das heisst, die jeweiligen Aufsätze erscheinen zu einem Zeitpunkt, der ihnen durch den momentanen Entwicklungsstand der Physik zugewiesen ist. Damit bilden sie im besten Sinne des Wortes ein Kontinuum, denn es ist ohne weiteres möglich, ein bereits behandeltes Gebiet zu einer späteren Zeit wieder aufzugreifen, um es den neusten Erkenntnissen gemäss zu ergänzen und zu berichtigen. Auf der andern Seite gelingt es in *guten* Handbüchern, dem Leser das momentane Wissen um ein bestimmtes Sujet in übersichtlicher und konzentrierter Form vorzulegen.

In dem vorliegenden Band wird das eben geschilderte Ziel besonders durch das erste Kapitel über die Theorie von Resonanzreaktionen (G. BREIT, 407 S.) in höchst vollkommener Weise erreicht. Allgemeine Überlegungen über Streuungen an Zentralfeldern führen den Leser in den Wignerschen \mathfrak{R} -Matrix-Formalismus ein, dem ein besonders breiter Raum gewidmet wird. Das Kapitel klingt aus mit Hinweisen auf die Anwendung der Theorie auf spezielle Probleme, wie Reaktionen nahe der Schwelle, Riesenresonanzen bei Kernphotoreaktionen, durch schwere Ionen ausgelöste Prozesse usw. Das Kapitel von H. HULL und G. BREIT (57 S.) über Coulomb-Wellenfunktionen verzichtet auf Hinweise über Anwendbarkeit dieser Funktionen, sondern bietet dem Leser ausschliesslich eine recht konzentrierte und übersichtliche Darstellung der mathematischen Handhabung dieser wichtigen Funktionen (Approximationen). In einem weiteren Kapitel diskutieren G. BREIT und I. S. MCINTOSH (29 S.) die Polarisation von Nukleonen durch Streuung an Atomkernen, während sich das letzte Kapitel (G. BREIT und R. L. GLUCKSTERN, 64 S.) mit der Coulomb-Anregung beschäftigt. Dieser Artikel dürfte als Ergänzung des bekannten Aufsatzes über Coulomb-Anregung von ALDER *et. al.* [Rev. Mod. Phys. 28, 432 (1956)] zu verstehen sein.

Sämtliche Artikel erscheinen in englischer Sprache; das Inhaltsverzeichnis wird deutsch und englisch geführt. Das Buch wendet sich in erster Linie an den theoretisch interessierten Experimentalphysiker, dem es zweifellos von erheblichem Nutzen sein wird.

F. HEINRICH

Plasma Physics - Accelerators - Thermonuclear Research (Journal of Nuclear Physics: Part C.) Herausgegeben von J. V. DUNWORTH (Pergamon Press, London 1959). Preis: \$30.- jährlich.

Zur kurzen Charakterisierung der Aufgaben, die sich diese neue Zeitschrift stellt, dürfte die Angabe einiger Beispiele aus dem Inhalt des ersten Heftes am geeignetsten sein: Das Plasmabetatron, Gleichgewichtskonfigurationen toroidaler Plasmen, Zirkularbeschleuniger mit azimuthaler Magnetfeldvariation, 'Colliding beam'-Systeme mit hohen Protonintensitäten, Ionenquellen für Tandem-Bandgeneratoren, allgemeine Charakteristika von selbsterhaltenden Fusionsystemen und vieles mehr. Besonders zu begrüssen ist es, dass dem auf diesen Gebieten interessierten Leser auch die Übersetzung russischer Artikel geboten wird. Ferner enthält jede Nummer ein recht vollständiges Verzeichnis kürzlicher Publikationen aus etwa 50 bis 100 anderen Zeitschriften über Themen der Plasma- und Fusionsphysik und über den Acceleratorbau.

F. HEINRICH